MODUL MATEMATIKA REKAYASA 1

Seri – PENYELESAIAN PERS. ALJABAR LINIER

Aulia Siti Aisjah,
auliasa@ep.its.ac.id

Isi Modul disarikan dari

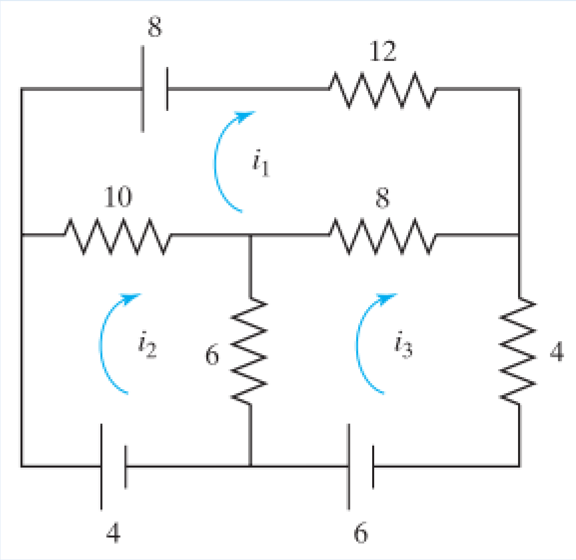
1. *Advance Engineering Mathematics, Kreizig*
2. *Numerical Method, Soichiko Nakamura*

MODUL 2

PERSAMAAN ALJABAR LINIER

Pendahuluan

Sebuah sistem yang didalamnya mengandung parameter, apabila mendapatkan masukan , maka akan ada respon dengan memberikan keluaran. Sebagai contoh, sistem elektrik berikut ini:



Sistem elektrik di atas, dapat di analisis besarnya arus pada masing masing loop dengan menggunakan Hukum Kirchof.

Persamaan berikut merupakan bentuk persamaan arus pada setiap loop

$$
\begin{aligned}
8 &= 12i_1 + 10(i_1 - i_2) + 8(i_1 - i_3)\\
4 &= 10(i_2 - i_1) + 6(i_2 - i_3)\\
6 &= 8(i_3 - i_1) + 6(i_3 - i_2) + 4i_3.
\end{aligned}
$$

Persamaan di atas apabila disusun kembali dalam bentuk suku i1, i2 dan i3 maka dinyatakan dalam bentuk berikut:

(12+10+8) i1 -10 i2 -8 i3 = 8

-10 i1 + (10+6) i2 – 6 i3 = 4

-8 i1 – i2 + (8+6+4) i3 = 6

Atau

30 i1 – 10 i2 – 8 i3 = 8

-10 i1 + 16 i2 – 6 i3 = 4

-8 i1 – 6 i2 + 18 i3 = 6

Persamaan di atas dikatakan sebagai Persamaan aljabar linier, karena koefisien pada masing masing arus bernilai konstan.

Bentuk persamaan aljabar linier dapat dinyatakan dalam persamaan matriks, berikut:

A x = b

A adalah matrik sistem, X: variabel sistem dan b: sumber daya yang diberikan sistem.

Dengan A, I dan b adalah:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 30 & -10 & -8 \\ -10 & 16 & -6 \\ -8 & -6 & 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

➔ Matriks berukuran → 3 baris, 3 kolom A_{3x3}

X_{3X1} , b_{3X1}

Perhatikan matriks A ➔ bernilai konstan → ciri PAL (persamaan aljabar linier)

Matriks A: matriks sistem

X: variabel keputusan (variabel sistem)

b: sumber daya (resource) sistem

Pada kasus PAL → tujuan adalah mendapatkan variabel sistem. Bila sistem dinyatakan dalam gambar sistem elektrik, maka diperlukan informasi nilai I1, I2 dan I3 pada masing – masing loop. Ini artinya harus dilakukan penyelesaian terhadap PAL di atas.

Beberapa metode yang telah dipelajari, untuk penyelesaian PAL:

1. Dengan metode Cramer
2. Metode eliminasi Gauss → Gaus Backward, Gauss Forward, Gauss Jordan
3. Metode secara iterasi

1. Metode Cramer

Perhatikan bentuk PAL sistem elektrik:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Secara umum, sebuah matrik A, dapat diketui nilai determinannya dengan menggunakan operasi berikut ini

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Determinan dari matrik A adalah:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kasus khusus untuk matrik yang berukuran 2 x 2, berikut

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Mempunyai determinan

$$\det\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & & a_{12} \\ a_{21} & & a_{22} \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Untuk bentuk PAL dengan 2 variabel keputusan X1, dan X2

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Dapat dilakukan dengan eliminasi: dengan memasukkan x2 dari persamaan 2: X2 = (b2-a21 X1)/a22 dan masukkan persamaan ini ke baris 1 → maka diperoleh:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Saat

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0,$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Ini secara umum dapat dituliskan kembali bahwa:

$$x_1 = (a_{22}b_1 - a_{12}b_2)/\det\mathbf{A}.$$

Dan

$$x_2 = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)/\det\mathbf{A}.$$

Perhatikan pembilan pada kedua persamaan X1 dan X2 di atas, dapat dituliskan

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad \text{and} \quad x_2 = \frac{D_2}{D},$$

$$D = \det\mathbf{A}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{and} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Persamaan di atas merupakan metode Cramer yang digunakan untuk menyelesaikan PAL. Perhatikan D1 dan D2 adalah determinan matrik dengan menggantikan kolom 1 → D1 dan kolom 2→ D2 dengan koefisien dari b

Contoh

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 1. \end{aligned}$$

P

$$D = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -22, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -21, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$x_1 = D_1/D = 21/22 \text{ and } x_2 = D_2/D = 5/22.$$

enyelesaian Cramer

Determinan Matrik

Bila ukuran sebuah matrik > 2 x 2, maka, dapat dibantu dengan menggunakan persamaan berikut;

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}.$$

Dengan C1j merupakan Cofaktor ke 1j. Bentuk persamaan umum untuk mendapatan Cofaktor adalah:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \text{for } i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

Dengan Mij → Minor ke ij artinya menentukan determinan dengan men delete baris ke i dan kolom ke j

Contoh

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Minor ke 11, dan seterusnya adalah: M11→ del baris dan kolom 1, M12 → del baris 1 dan kolom 2, dst

$$M_{11} = 4, M_{12} = 1, M_{21} = -3, \text{ and } M_{22} = 2.$$

Perhatikan saat mendapatkan Minor 11, di delete baris 1 dan bkolom 1 → yang tertinggal pada matriks hanya koefisien 4 saja, dst.

Dan kofaktornya adalah:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 4, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 3,$$
and $C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2.$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{are } C_{11} = a_{22},\ C_{12} = -a_{21},\ C_{21} = -a_{12},\ \text{and } C_{22} = a_{11}$$

Teorema Laplace

Untuk mendapatkan determinan, dapat digunakan teorema Lapca berikut ini:

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

Penyelsaian setiap variabel keputusan:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Penyelesaian untuk kasus sistem elektrik

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 29, \quad \det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 37$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad \det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

Sehingga:

X1 = det A1/det A, dst

$x_1 = 37/29$, $x_2 = 1/29$, and $x_3 = -6/29$.

Latihan Soal

1. Tentukan: Minor dan Cofaktor dari persamaan berikut ini.

13. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -2. \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2. \end{aligned}$$

2. Selesaikan bentuk PAL tersebut dengan menggunakan metode Cramer

Eliminasi Gauss

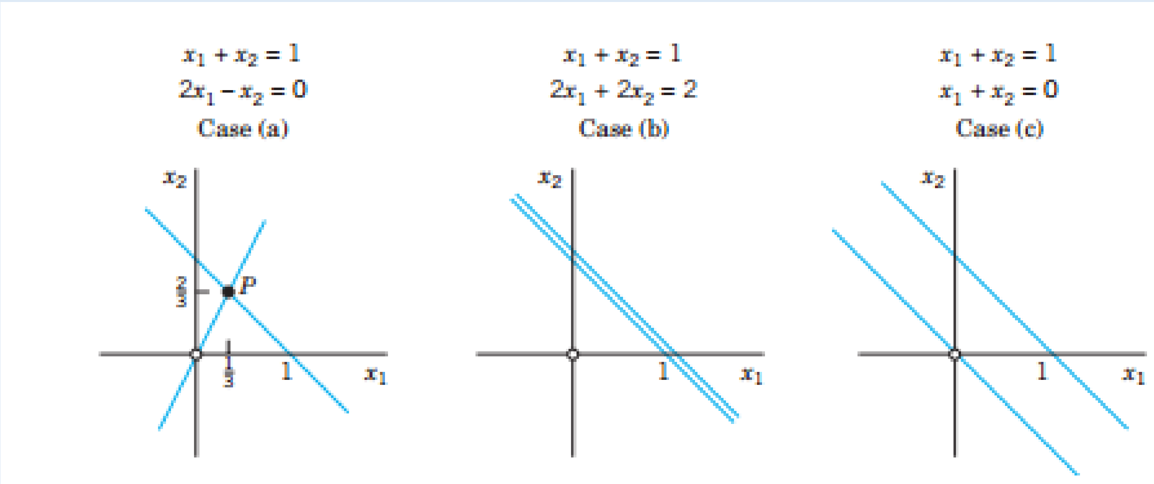
Perhatikan bentul PAL dalam persamaan matriks berikut

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ada tiga bentuk PAL yang menyebabkan beberapa kondisi berikut ini



Grafik ke 1 menunjukkan PAL mempunyai 1 penyelesaian

Grafik ke 2 menunjukkan PAL mempunyai banyak penyelesaian

Grafik ke 3 menunjukkan PAL tidak mempunyai penyelesaian

Matrik Pengembangan – Augmented

Bentuk matriks pengembangan dinyatakn dalam notasi berikut dan berisi matrik A dan b yang digabung menjadi Satu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Contoh:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ -4x_1 + 3x_2 &= -30. \end{aligned}$$ → matrik pengembangan → $$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \end{bmatrix}.$$

Pada bentuk matriks pengembangan, dapat dilakukan eliminasi koefisien yang bernilai (-4) di eliminir oleh baris ke 1 sehingga akan menghasilkan 0, dengan cara

Baris 2 yang baru = baris 2 lama + 2 x baris 1 lama → R(2)' = R(2) – 2 R(1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss Backward

Perhatikan contoh berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\
-x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
10x_2 + 25x_3 &= 90 \\
20x_1 + 10x_2 &= 80.
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan bantuan dari Excel

	X1	X2	X3	b
R(1)	1	-1	1	0
R(2)	-1	1	-1	0
R(3)	0	10	25	90
R(4)	20	10	0	80

Kolom 1 mulai baris R(2) sd R(4) (blok warna merah) dijadikan 0

	X1	X2	X3	b
R(1)	1	-1	1	0
R(2)	-1	1	-1	0
R(3)	0	10	25	90
R(4)	20	10	0	80

Dengan cara menggunakan operasi yang tersedia di Excel

	X1	X2	X3	b
R(1)	1	-1	1	0
R(2)	-1	1	-1	0
R(3)	0	10	25	90
R(4)	20	10	0	80
R(1)	1	-1	1	0
R(2)'=R(:	=C4+C3			
R(3)'=R(3)				
R(4)'=R(4)-20R(1)				

Copy equation tersebut untuk kolom yang lain pada baris 2

	X1	X2	X3	b
R(1)	1	-1	1	0
R(2)	-1	1	-1	0
R(3)	0	10	25	90
R(4)	20	10	0	80
R(1)	1	-1	1	0
R(2)'=R(2)+R1)	0			
R(3)'=R(3)				
R(4)'=R(4)-20R(1)				

Dengan melakukan operasipada baris lain diperoleh, hasil akhir dari matriks setelah dilakukan eliminasi adalah sebagai berikut:

	X1	X2	X3	b
R(1)	1	-1	1	0
R(2)	-1	1	-1	0
R(3)	0	10	25	90
R(4)	20	10	0	80
R(1)	1	-1	1	0
R(2)'=R(2)+R1)	0	0	0	0
R(3)'=R(3)	0	10	25	90
R(4)'=R(4)-20R(1)	0	30	-20	80

Perhatikan koefisien pada baris 2 → ini dapat dipindah ke baris terakhir (R4)

R(1)	1	-1	1	0
R(2)	0	10	25	90
R(3)	0	30	-20	80
R(4)	0	0	0	0

Matriks di atas menunjukkan PAL

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ \boxed{30x_2} - 20x_3 &= 80 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Pada salah satu dari persamaan R(2) atau R(3) untuk variabel X2 perlu dilakukan eliminasi:

R(1)	1	-1	1	0
R(2)	0	10	25	90
R(3)'=R(3)-3*R(2)	0	0	-95	-190
R(4)	0	0	0	0

Pada matriks di atas,

-95 X3 = -190 → X3 = 190/95 = 2

10 X2 + 25 X2 = 90 → X2 = (90 – 25 * 2)/10 = 4

X1 – X2 + X3 = 0 → X1 = 4 – 2 = 2

Perhatikan bahwa apa yang telah dilakukan pada matriks soal, adalah mengeliminasi variabel satu denganvariabel yang lain. Dan diperoleh hasil X3 → X2 → X1. Artinya mendapatkan Xn → Xn-1 → … → X1 (gerakan mundur)

Ini dikatakan sebagai metode eliminasi Gauss Bakward.

Latihan Soal

Kerjakan soal berikut, agar Anda mampu mengaplikasikan metode Gauss Backward

12. $$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13. $$\begin{aligned} 10x + 4y - 2z &= -4 \\ -3w - 17x + y + 2z &= 2 \\ w + x + y &= 6 \\ 8w - 34x + 16y - 10z &= 4 \end{aligned}$$

14. $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -11 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Elominasi Gauss Forward

Perhatikan kembali PAL berikut ini

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dengan matriks sistem A dan matriks augmented

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \textit{and} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Perhatikan contoh berikut ini

25.
$$\begin{aligned} -4w + x + y &= -10 \\ w - 4x + z &= 1 \\ w - 4y + z &= -7 \\ x + y - 4z &= 10 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan bantuan Excel

	W	X	Y	Z	b
R(1)	-4	1	1	0	-10
R(2)	1	-4	1	1	1
R(3)	1	0	-4	1	-7
R(4)	0	1	1	-4	10

Metode eliminasi di sini, apabila menggunakan eliminasi Gauss Forward, maka harus dilakukan pemindahan baris, R(4) ← → R(1), dan menjadi:

R(1)	0	1	1	-4	10
R(2)	1	-4	1	1	1
R(3)	1	0	-4	1	-7
R(4)	-4	1	1	0	-10