



Institut Teknologi Sepuluh Nopember - Surabaya

DEPARTEMEN
TEKNIK FISIKA



MATEMATIKA REKAYASA I **Seri: PENYELESAIAN PD** **METODE FROBENIUS**

Oleh:
Aulia Siti Aisjah
Prof. dalam bidang ilmu Teknik Fisika

Pengantar

Pengantar

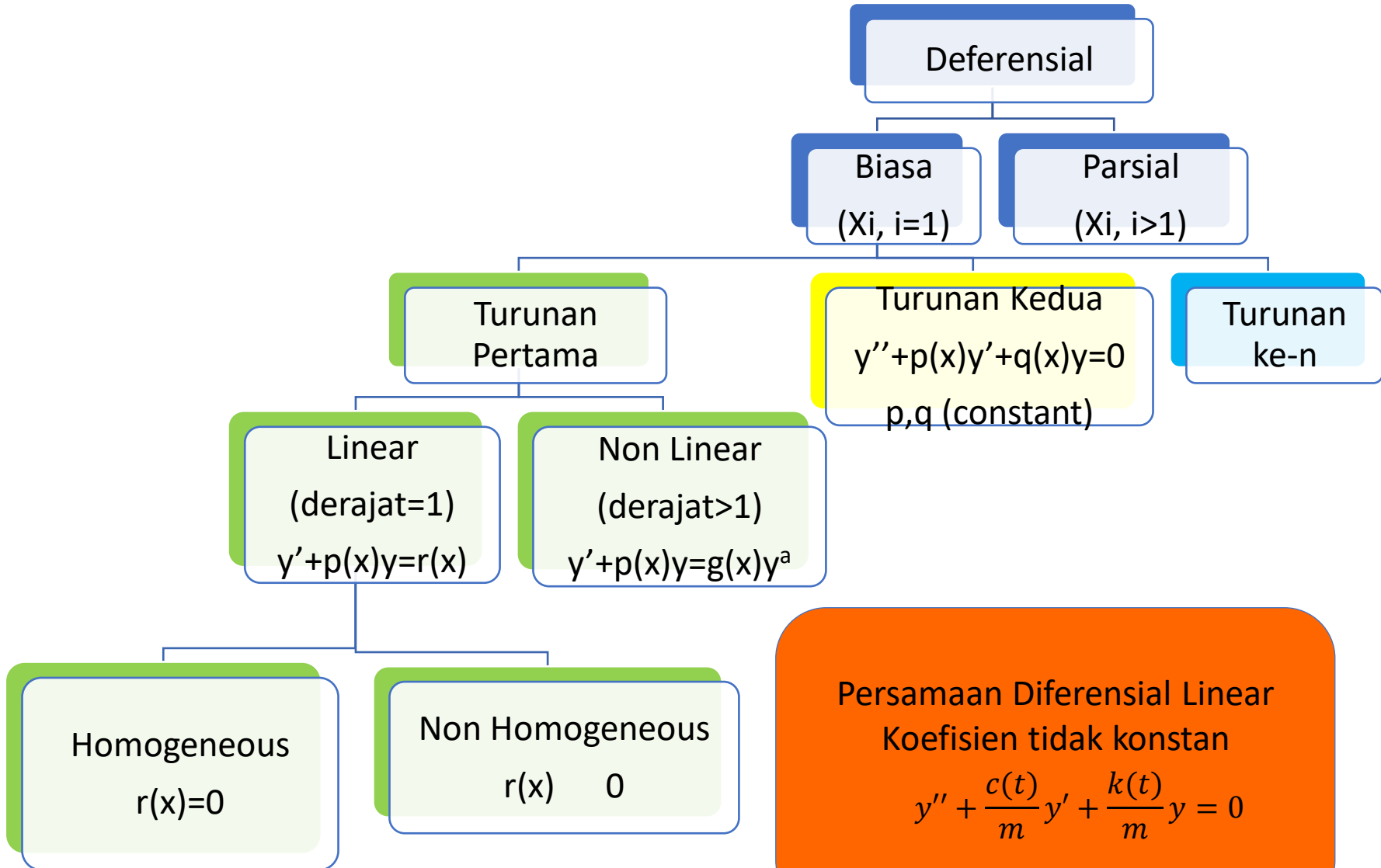
Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen



POWER SERIES METHOD

Power Series (Deret Pangkat)

Pengantar

Latihan :

Materi

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Contoh Soal

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

Ringkasan

$$y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots$$

Latihan

...

Asesmen



Extended Power Series (Deret Pangkat yang dikembangkan)

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

Tentukan y' dan y''

Bentuk extended power series digunakan untuk menyelesaikan PD?

Materi

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen



Frobenius Method

Kelebihan metoda ini adalah aplikasinya yang lebih umum, dimana Metoda Deret Pangkat tidak bisa lakukan



Metode – penyelesaian dg deret Pangkat

- Metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier dengan koefisien – berupa variable, sbg contoh;

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Disini $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan koefisien dari PD ang juga variable (tidak konnstan nilainya)

Materi

Metode Frobenius

- **TEOREMA 1:**

Untuk semua jenis persamaan differensial yang memenuhi persamaan (apakah bentuk 1 berikut sama dengan bentuk PD pada slide sebelumnya?):

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0 \quad (1)$$

mempunyai sekurang-kurangnya satu solusi yang dapat diwakili oleh:

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad (2)$$

dimana pangkat adalah bilangan riil atau kompleks yang dipilih sehingga

$$a_0 \neq 0$$

Penyelesaian dengan deret pangkat

➤ bentuk deret pangkat berikut

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

dan

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots$$

Deret Pangkat

- substitusikan bentuk deret y, y', y''
- kumpulkan semua koefisien dalam x
- samakan koefisien di sebelah kiri persamaan dengan yang di sebelah kanan persamaan.
- maka akan dapat ditentukan koefisien yang tidak diketahui nilainya.

Contoh – selesaikan bentuk PD berikut

1

$$y' - y = 0$$

2

$$y' = 2xy$$

3

$$y'' + y = 0$$

Bentuk lain – deret pangkat (deret pangkat yang dikembangkan)

- Bentuk lain deret pangkat

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Teori dalam Deret Pangkat

➤ *Konsep dasar*

Deret pangkat yang dikembangkan (extended power series)

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \quad (1)$$

X adalah variable, dengan pusat x_0 , dan koefisien a_0, a_1, a_2 bernilai real

(2) Jumlahan dari deret sd orde ke n

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

dimana $n=0,1,2..$

(3) Selisih antara pers (1) dengan (2) adalah,

$$R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \dots$$

Interval konvergensi. Jari-jari konvergensi

- Teorema
$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Merupakan sebuah deret pangkat, dan kemudian akan ada $0 < R < \infty$, yang dinamakan radius konvergensi dari deret yang menunjukkan bahwa deret konvergen untuk:

$$|(x - x_0)| < R$$

dan divergen untuk $|(x - x_0)| > R$

- Nilai dari R untuk deret yang konvergen, dikatakan sebagai interval konvergensi

Berapa nilai R?

Nilai R – dikatakan jari-jari konvergensi, diperoleh

$$R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|}$$

atau

$$R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}}$$

Perhitungan nilai R

contoh

$$\sum \frac{nx^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{|suku\ ke\ (n+1)|}{|suku\ ke\ (n)|} = \frac{(n+1)|x^{n+1}|}{2^{n+2}} * \frac{2^{n+1}}{(n)|x^n|} = \frac{(n+1)|x|}{2 \cdot n}$$

Untuk $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{(n+1)|x|}{2 \cdot n} \rightarrow \frac{|x|}{2} \quad \Rightarrow \quad R = 2$$

konvergen

$$|(x - 0)| < 2$$

divergen

$$|(x - 0)| > 2$$

Latihan soal

- Tentukan jari-jari konvergensi untuk deret berikut

1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 1}$$

Operasi deret pangkat

(1) Kesamaan dalam deret pangkat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_a)^n, \quad \text{dengan} \quad R \neq 0$$

maka $a_n = b_n$ Untuk semua n

Corollary

Jika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_a)^n = 0,$ Maka $a_n=0,$ untuk semua $n, R>0$

Teorema dalam deret

(2) Bentuk diferensiasi

jika $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Adalah konvergen maka

Maka seluruh turunan nya $y'(x), y''(x), dst$ Juga konvergen

(3) Bentuk penjumlahan

jika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergen

Dalam domain x , maka seluruh jumlahan nya konvergen dalam domain tersebut.

Penyelesaian PD dengan deret Pangkat. Fungsi analitik

- Penyelesaian dengan deret pangkat akan ada dan unik, bila koefisien dalam **$p(x)$, $q(x)$, and $f(x)$ adalah analitik**

Apa yang dimaksud dengan fungsi analitik?

Fungsi real $f(x)$ dikatakan analitik pada titik $x=x_0$ jika dapat direpresentasikan oleh deret pangkat dalam bentuk pangkat **$(x-x_0)$ dengan jari-jari konvergensi $R>0$.**

Mari kita – selesaikan PD yang dikatakan PD Frobenius

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$



Catat semua
penjelasan saat
kuliah sinkron





Terimakasih