Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

DEPARTEMEN TEKNIK FISIKA - FTIRS

PERSAMAAN DIFERENSIAL LEGENDRE

Seri: Matematika Rekayasa 1

Oleh: Aulia Siti Aisjah

Bentuk PD LEGENDRE

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

(n *konstan*)

Penyelesaian PD Legendre dikatakan sebagai fungsi Legendre
Fungsi Legendre: Pn(x).
Perhatikan bahwa n = parameter dari PD akan menentukan Pn(x)

Penyelesaian PD Legendre, dengan menggunakan bentuk deret pangkat

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0.$$

atau

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m = 0.$$

Di set

$m - 2 = s \quad (\text{atau } m = 2 + s)$

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty}s(s-1)a_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty}2sa_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty}ka_s x^s = 0.$$

diperoleh

Koefisien

$$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots).$$

Penyelesaian PD Legendre

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

dengan

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \cdots$$

Deret konvergen untuk $|x| < 1$.

Penyelesaian PD Legendre: Polynomial Legendre $P_n(x)$

Koefisien

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} \quad (n \text{ integer positif})$$

$a_n = 1$ jika $n = 0$).

Untuk a_s dalam suku a_{s+2},

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \qquad (s \le n-2).$$

$p_n(1) = 1$ untuk setiap n

Kita periksa solusi PD Legendre

Lihat Kembali PD legendre

Diasumsikan $$y=\sum_{k=0}^{\infty} C_k x_k$$ Dengan Ck konstanta

$$\therefore \left(1-x^2\right)y''-2xy'+n\left(n+1\right)y=$$

$$\left(1-x^2\right)\sum_{k=2}^{\infty} C_k k\left(k-1\right)x^{k-2}-2\sum_{k=1}^{\infty} C_k kx^k+n\left(n+1\right)\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty} C_k k(k-1)x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty} C_k k(k-1)x^k-2\sum_{k=1}^{\infty} C_k kx^k+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

$$=[n(n+1)C_0+2C_2]x^0+[n(n+1)C_1-2C_1+6C_3]x+\underbrace{\sum_{k=4}^{\infty} C_k k(k-1)x^{k-2}}_{j=k-2}$$

$$-\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} C_k k(k-1)x^k}_{j=k}-2\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} C_k kx^k}_{j=k}+n(n+1)\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} C_k x^k}_{j=k}$$

$$=\left[n(n+1)C_0+2C_2\right]+\left[(n-1)(n+2)C_1+6C_3\right]x$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}\left[(j+2)(j+1)C_{j+2}+(n-j)(n+j+1)C_j\right]x^j=0$$

$$\Rightarrow \qquad n(n+1)C_0+2C_2=0$$

$$(n-1)(n+2)C_1+6C_3=0$$

$$(j+2)(j+1)C_{j+2}+(n-j)(n+j+1)C_j=0,\quad j=2,3,4,\ldots$$

$$C_2=-\frac{n(n+1)}{2!}C_0$$

$$C_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}C_1$$

$$C_{j+2}=-\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}C_j;\quad j=2,3,\ldots \quad (1)$$

Iterasi pers (1)

$$C_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}C_2 = \frac{(n-2)(n)(n+1)(n+3)}{4!}C_0$$

$$C_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}C_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}C_1$$

$$C_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{5\cdot 6}C_4 = -\frac{(n-4)(n-2)\ n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}C_0$$

$$C_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{7\cdot 6}C_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}C_1$$

Dst, dan untuk $|x| < 1,$ Dihasilkan dua bentuk deret, yaitu y1 dan y2

$$y_1(x) = C_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = C_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \cdots\right]$$

Untuk n bilangan bulat, maka y1 akan berbentuk berhingga, $y_2(x)$ Deret tak terhingga

Contoh untuk $n = 4$,

$$y_1(x) = C_0\left[1 - \frac{4 \cdot 5}{2!}x^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{4!}x^4\right] = C_0\left[1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right]$$

Dengan cara yang sama untuk n = bilangan ganjil, maka bentuk y1(x) adalah deret tak terhingga dan y2(x) berbentuk berhingga

Utk $n=0$, dipilih $C_0=1$ dan $n=2,4,6,\ldots$

$$C_0=(-1)^{n/2}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots(n)}$$

Untuk $n=1$ dipilih $C_1=1$ dan $n=3,5,7,\ldots$

$$C_1=(-1)^{(n-1)/2}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots n}{2\cdot 4\cdot\ldots(n-1)}$$

Sebagai contoh $n=4$,

$$y_1(x)=(-1)^{4/2}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left[1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\right]$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{30}{8}x^2+\frac{35}{8}x^4$$

$$y_1(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$

Polinomial Legendre Pn(x)

Untuk $P_n(x)$.

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)(n-2m)!} x^{n-2m}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)(n-2)!} x^{n-2} + - \cdots$$

dimana $M = n/2$ atau $(n-1)/2$, dimana n = integer

Persamaan Legendre diberi notasi Pn(x)

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

Polinomial Legendre

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$P_n(x)$ adalah orthogonal dalam interval $-1 \le x \le 1$.

Beberapa bentuk persamaan diferensial Legendre

$n=0$	$(1-x^2)y''-2xy'=0$
$n=1$	$(1-x^2)y''-2xy'-2y=0$
$n=2$	$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$
$n=3$	$(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$
$\cdots$	$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

Persamaan Rodrigues untuk penyelesaian polynomial Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$$

Dengan bantuan koefisien ekspansi z^n

$$\phi = \left(1 - 2xz + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\phi = \left(1 - 2xz + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left\{1 - z\left(2x - z\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Dengan deret Binomial

$$\phi = 1 + \frac{1}{2} z(2x - z) + \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)}{2!}\{-z(2x-z)\}^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{3!}\{-z(2x-z)\}^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} z(2x - z) + \frac{3}{8} z^2\left(4x^2 + z^2 - 4xz\right) + \frac{5}{16} z^3\left(8x^3 - z^3 - 12x^2 z + 6xz^2\right) + \cdots$$

$$= 1 + zx - \frac{1}{2} z^2 + \frac{3}{2} x^2 z^2 + \frac{3}{8} z^4 - \frac{3}{2} xz^3 - \frac{5}{2} x^3 z^3 - \frac{5}{16} z^6 - \frac{15}{4} x^2 z^4 + \frac{15}{8} xz^5 + \cdots$$

$$= 1 + xz + \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) z^2 + \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) z^3 + \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right) z^4 + \cdots \quad (1)$$

Dan juga berlaku untuk Pn(x)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = P_0(x) + P_1(x) z + P_2(x) z^2 + P_3(x) z^3 + \cdots \quad (2)$$

Persamaan (1) dan (2)

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Menunjukkan Polinnomial Legendre Pn(x)

Persamaan rekurensi

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\cdot t^n \qquad (1)$$

Diferensiasi dari (1) terhadap t

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

Perkalian dengan $1-2xt+t^2$,

$$(x-t)\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0$$

$$x + x^2t + \sum_{n=2}^{\infty} xP_n(x)t^n - t - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} - x - 2\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)t$$

$$-\sum_{n=3}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + 2x^2t + 2x\sum_{n=2}^{\infty} nP_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0$$

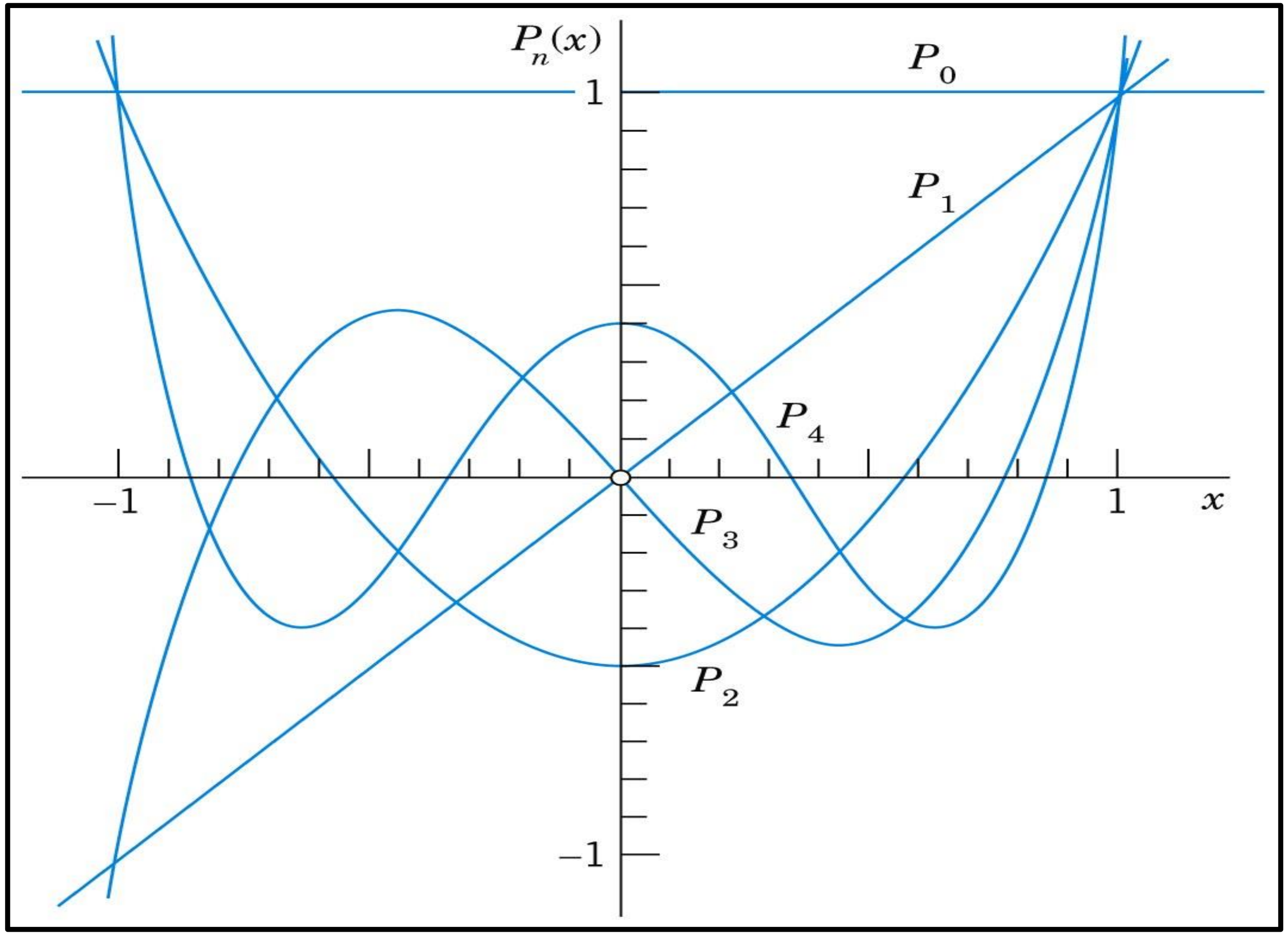
Dengan penyederhanaan dan Menyusun ulang persamaan di atas

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[-(k+1)P_{k+1}(x) + (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)\right]t^k = 0$$

Bentuk persamaan di atas dapat dikalikan dengan (-1) dan Menyusun ulang

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0, \qquad k = 2,3,4,\dots$$

Fungsi Legendre



Latihan

NRP Ganjil

Tentukan:

P6(x), P8(x), P10(x)

NRP Genap

Tentukan

P7(x), P9(x), P11(x)

Catat semua penjelasan saat kuliah sinkron

Terimakasih