



**Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya**



Diagonalisasi Matrik Sistem $Ax = b$

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Eigenvalue Matrik $A_{n \times n}$

Eigenvektor

Diagonalisasi Matrik $A_{n \times n}$

Pengantar

- Sub bab ini merupakan salah satu sub bab dari pokok bahasan Karakteristik Sistem Berdasar Persamaan Keadaan . Pada sub bab ini akan membahas mengenai diagonalisasi matrik $A_{n \times n}$.
- Selain diagonalisasi matrik $n \times n$, eigen value dan eigen vektor yang akan dibahas pada materi ini.



Eigenvalue Matrik $A_{n \times n}$

Eigenvalue dari matrik $A_{n \times n}$ adalah akar dari persamaan karakteristik yang dinyatakan sebagai determinan berikut,

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

eigenvalue sering disebut *akar - akar karakteristik*.
Sebagai contoh suatu matrik \mathbf{A} sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$



Eigenvalue Matrik $A_{n \times n}$

persamaan karakteristiknya adalah,

$$|\mathbf{M} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

eigenvalue dari \mathbf{A} adalah akar dari persamaan karakteristik tersebut, atau $-1, -2,$ dan -3 .



Eigenvektor

Eigenvektor sangat berguna dalam pengendalian modern. Matrik vektor tidak negatif \mathbf{p}_i , bersama dengan *eigenvalue* dinyatakan dengan persamaan.

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$$

dimana $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$, adalah *eigenvalue* matrik \mathbf{A} , disebut sebagai *eigenvektor* matrik \mathbf{A} .



Diagonalisasi Matrik $A_{n \times n}$.

Jika suatu matrik $A_{n \times n}$ dengan *eigenvalue-eigenvalue* yang berbeda dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

maka transformasi $\mathbf{x}=\mathbf{Pz}$ dimana,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$



Diagonalisasi Matrik $A_{n \times n}$.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sama dengan eigenvalue dari A yang berbeda akan mentransformasi $P^{-1}AP$ menjadi matrik diagonal, atau

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Jika matrik A yang didefinisikan oleh persamaan

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$



Diagonalisasi Matrik $A_{n \times n}$.

yang melibatkan *eigenvalue* jamak, maka diagonalisasi tersebut tidak mungkin diperoleh. Sebagai contoh, jika matrik A 3×3 dimana,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

mempunyai *eigenvalue* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_3$, maka transformasi $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$ dimana,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$



Diagonalisasi Matrik $A_{n \times n}$.

akan menghasilkan,

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

bentuk ini disebut bentuk matrik **Jordan**



Contoh Soal 1

Persamaan ruang keadaan dinyatakan dalam bentuk di bawah. Tentukan nilai eigen nya

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [6u]$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristiknya adalah,

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

eigenvalue dari \mathbf{A} adalah akar dari persamaan karakteristik tersebut, atau $-1, -2, \text{ dan } -3$.



Contoh Soal 2

Dengan menggunakan persamaan

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$$

Tunjukkan bahwa penyajian ruang keadaan seperti yang dinyatakan oleh persamaan

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

Dan

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

dengan cara diagonalisasi matrik.



Contoh Soal 2

Penyelesaian

Dari penyelesaian telah diperoleh matrik,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

dengan *eigenvalue* $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ maka matrik \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

maka matrik,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$



Contoh Soal 3

Persamaan ruang keadaan dinyatakan dalam bentuk di bawah. Tentukan diagonalisasi matrik dan persamaan keluaran nya.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [6u] \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan nilai eigen dari matrik A adalah $-1, -2,$ dan -3 , maka diperoleh bentuk diagonalisasi matrik (Pers. 10):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Persamaan keluaran, Pers. (9) dan Pers. (10): $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$



Contoh Soal 4

Diberikan matrik **A** sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Carilah *eigenvektor* matrik **A**



Contoh Soal 4

Penyelesaian

Dengan menggunakan persamaan karakteristik, diperoleh **eigenvalue** $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. Maka matrik **A** dikatakan mempunyai orde dua pada **eigenvalue**=1. **Eigenvektor** untuk **eigenvalue** $\lambda_1=2$ ditentukan dengan menggunakan persamaan

$$\begin{aligned}
 (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_i &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$



Contoh Soal 4

Penyelesaian

dari matrik ini akan diperoleh dua persamaan independent, sehingga bisa dipilih sebarang harga $p_{11}=2$ dan menghasilkan $p_{21}=-1$ dan $p_{31}=-2$, maka

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$



Contoh Soal 4

Penyelesaian

Sedangkan *generalized eigenvektor*, yang berkaitan dengan *eigenvalue* orde-2, diperoleh dengan mensubstitusi $\lambda_2=1$

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

diambil harga sebarang $p_{12}=1$, diperoleh $p_{22}=-3/7$ dan $p_{32}=-5/7$, maka

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$



Contoh Soal 4

Penyelesaian

Substitusi $\lambda_3=1$

$$(\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

diambil harga sebarang $p_{13}=1$, diperoleh $p_{23}=-22/49$ dan $p_{33}=-46/49$, maka

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{22}{49} \\ -\frac{46}{49} \end{bmatrix}$$



Ringkasan

Diagonalisasi matrik A $n \times n$ dapat dinyatakan dalam bentuk berikut yang biasa disebut dengan matrik Jordan

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Dimana mempunyai eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_3$



Latihan

Diberikan matrik **A** sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

Carilah *eigenvektor* matrik **A**



Ringkasan

1. Eigen value dari matrik system A, dapat digunakan untuk menentukan koefisien pada matrik Diagonal.
2. Diagonalisasi matrik dapat digunakan untuk membentuk persamaan keluaran, dengan semua variable statenya di amati



**SEKIAN
&
TERIMAKASIH**

