Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Analisa Kestabilan Lyapunov

- Pengantar
- Materi
- Contoh Soal
- Ringkasan
- Latihan
- Asesmen

- Pengantar
- Materi
- Contoh Soal
- Ringkasan
- Latihan
- Asesmen

- Sistem
- Keadaan Kesetimbangan
- Kestabilan dalam Arti Lyapunov
- Penyajian Diagram Kestabilan, Kestabilan Garis Lurus dan Ketidakstabilan
- Kedifinitan Matrik
- Bentuk Kuadrat Lyapunov
- Metode Kedua Lyapunov
- Analisa Kestabilan Sistem Linier

Pengantar

- Suatu sistem yang dikendalikan, baik dengan strategi pengendalian konvensional (P, I, D, PI, PD, PID) maupun dengan strategi pengendalian yang lain, memerlukan kondisi kestabilan.

- Kondisi kestabilan dapat dilihat dari hasil respon waktu (performansi dalam domain waktu), maupun respon dalam domain frekuensi. Untuk sistem linier dengan parameter konstan dapat digunakan analisa kestabilan menggunakan kriteria Nyquist, maupun Routh, dsb.

- Sebuah sistem non linier dan atau sistem parameter berubah dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan keadaan (*state space*).

- Analisa kestabilan dapat dilakukan dengan metode kedua Lyapunov (Metode langsung Lyapunov) berdasarkan bentuk persamaan keadaan.

Sistem

- Beberapa definisi kestabilan yang berkaitan dengan teorema Lyapunov, bisa ditinjau berdasarkan suatu ***sistem*** yang didefinisikan sebagai :

$$\dot{\mathbf{x}} = f\left(x,t\right) \qquad \text{(Pers. 1)}$$

- Dengan x : vektor keadaan (n-vektor), f(x,t) adalah n – vektor dengan komponen adalah fungsi : x_1, x_2, ..., x_n dan t. Persamaan di atas mempunyai penyelesaian yang unik, dengan tergantung pada kondisi awal. Penyelesaian dinyatakan :

$$\phi\left(t_0;\mathbf{x}_0,t_0\right) = \mathbf{x}_0 \qquad \text{(Pers. 2)}$$

Keadaan Kesetimbangan

- Jika sistem dinyatakan berada pada kondisi kesteimbangan berada pada keadaan x_e dengan $f(x_e, t) = 0$ untuk semua t

- Sistem dalam keadaan kestimbangan, jika sistem ini linier dan tidak berubah terhadap waktu.

- Jika $f(x,t)$ = **A**x, maka terdapat hanya satu keadaan setimbang pada saat **A** adalah nonsingular. Jika **A** singular maka akan didapat kondisi kesetimbangan yang tak berhingga.

Kestabilan Lyapunov

- Jika sebuah bola dengan jari – jari k terhadap kondisi kesteimbanga x_e,

$\|x - x_e\| \leq k$ $\quad$ $\|x - x_e\|$ adalah norma Euclidian, (Pers. 3)

- Misalkan S(ε) terdiri atas semua titik, sedemikian hingga :

$$\|x - x_e\| = \left[(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2\right]^{1/2} \qquad \text{(Pers. 4)}$$

- Dan bila juga S(ε) teridi dari titik sedemikian hingga :

$\|x - x_e\| \leq \delta$ $\quad$ untuk semua $t \geq t_0$. (Pers. 5)

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon \qquad \text{(Pers. 6)}$$

Materi

Kestabilan dalam Arti Lyapunov

- Keadaan kesetimbangan x_e dari sistem disebut stabil sesuai Lyapunov jika untuk setiap S(ε), ada S(δ), sehingga trayektori dengan titik awal didalam S(δ) tidak meninggalkan S(ε) dengan membesarnya waktu t menuju tak terhingga.

- Bilangan real δ tergantung pada ε dan pada umumnya juga bergantung pada t_0, maka keadaan kesetimbangan tersebut disebut stabil uniform.

Kestabilan Asimtotik

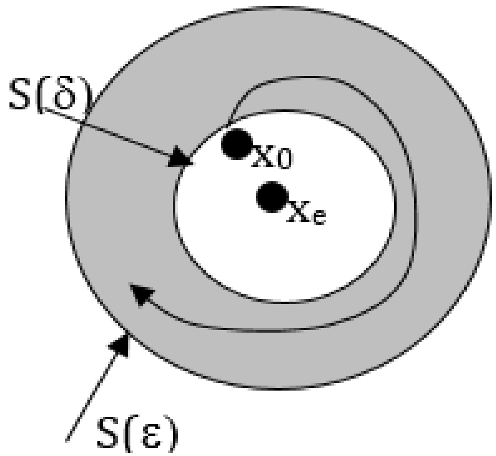
Keadaan kesetimbangan $x_e$dari sistem yang dinyatakan oleh $f(x_e,t)$ =0 untuk sembarang t disebut stabil asimptotik jika keadaan tersebut stabil Lyapunov dan setiap kondisi dengan titik awal didalam S(δ) tanpa meninggalkan S(ε), konvergen ke x_e dengan membesarnya t menuju tak berhingga.

Kestabilan Asimtotik Global

- Jika keadaan asimptotik berlaku untuk semua keadaan titik awal trayektori, maka keadaan kesetimbangan tersebut stabil asimptotik global.
- Keadaan kesetimbangan x_e dari sistem disebut stabil asimptotik global jika keadaan setimbang tersebut stabil, dan jika setiap jawab konvergen ke x_e dengan membesarnya waktu t menunju tak hingga.
- Syarat yang perlu untuk kestabilan asimptotik global adalah bahwa hanya ada satu keadaan kesetimbangan dalam seluruh keadaan

Materi

Penyajian Diagram Kestabilan dan Ketidakstabilan.



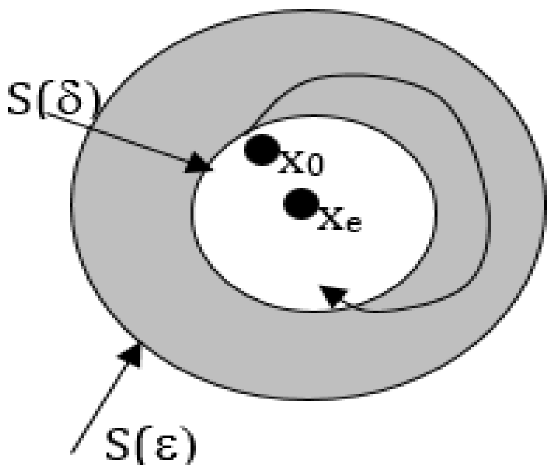
Gambar: Kondisi yang menggambarkan pergerakan perluru setimbang stabil

Terlihat pada gambar, menunjukkan lintasan peluru dari kondisi awal x_0 dengan batas keadaan awal S(δ).

Kondisi setimbang stabil sesuai hukum Lyapunov.

Materi

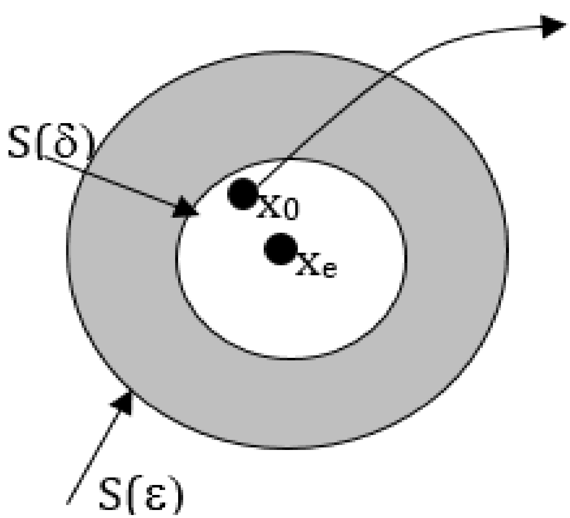
Penyajian Diagram Kestabilan dan Ketidakstabilan.



Kondisi keadaan setimbang secara garis lurus

pergerakan peluru dari titik awal x_0 pada daerah batas keadaan awal S(δ) menuju ke daerah ini kembali, pergerakan ini dikatakan sebagai kondisi setimbang secara garis lurus

Penyajian Diagram Kestabilan dan Ketidakstabilan.



Kondisi tidak stabil

pergerakan peluru dari kondisi awal x_0 menuju keluar dari batas kesetimbangan S(ε) menunjukkan bahwa kondisi setimbang tidak stabil.

Kedifinitan Matrik

Definisi 1 :
A dikatakan definit positif, jika $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} > 0$, untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
A dikatakan definit negatif, jika $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} < 0$, untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
A dikatakan semi definit positif, jika $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \geq 0$, untuk $\mathbf{x} \in R^n$ (*)
A dikatakan semi definit negatif, jika $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \leq 0$, untuk $\mathbf{x} \in R^n$ (*)
(*) dapat terjadi bila $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = 0$ untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Definisi 2 : (Kriteria *Sylvester*)
A definit positif bila $A_i > 0$ untuk $i = 1,2,3,...n$
A definit negatif $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, $A_4 > 0$,... dst atau $A_i = (-1)^i$

Kedifinitan Matrik

Definisi 3 :

A definit posisif jika semua nilai karakteristiknya positif
A definit negatif jika semua nilai karakteristiknya negatif
A semi definit posisif jika semua nilai karakteristiknya positif dan ada yang bernilai nol
A semi definit negatif jika semua nilai karakteristiknya negatif dan ada yang bernilai nol

Definit Positif akan memberikan kepastian minimum
Definit Negatif akan memberikan kepastian maksimum

Kedifinitan Matrik

- Fungsi Lyapunov V(**x**) merupakan fungsi skalar yang *definit positif* (bernilai positif) di daerah Ω bila V(**x**) untuk semua kondisi yang tidak nol **x** di daerah Ω dan juga harus memenuhi V(0) = 0.

- Sedangkan untuk fungsi Lyapunov yang bergantung pada waktu V(**x,**t) adalah *definit positif* didaerah Ω , jika fungsi itu dibatasi dari bawah oleh fungsi definit positif yang tidak berubah terhadap waktu

Hubungan tersebut dinyatakan dalam :

$V(\mathbf{x},t) > V(\mathbf{x})$ untuk semua $t \geq t_0$.

$V(0,t) = 0$ untuk semua $t \geq t_0$

Bentuk kuadrat Lyapunov

Beberapa contoh dari fungsi skalar Lyapunov yang menunjukkan sifat – sifat seperti disebutkan diatas,

Definit positif : $V(x) = x_1^{\ 2} + 4x_2^{\ 2}$

Semi definit posisif : $V(x) = (x_1 + x_2)^2$

Definit negatif : $V(x) = -x_1^{\ 2} - (2x_1 + 3x_2)^2$

Indefinitif : $V(x) = x_1 x_2 + x_2^{\ 2}$

Bentuk kuadrat Lyapunov

Untuk memahami bahwa fungsi skalar dari Lyapunov, menunjukkan suatu kondisi kestabilan, maka dinyatakan dalam bentuk kuadrat, dalam persamaan berikut,

$$V(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

X merupakan vektor bernilai real, dan **P** adalah matriks simetri bernilai real.

Bentuk Hermitian Lyapunov

Jika **x** adalah n – vektor bernilai kompleks dan **P** adalah sebuah matriks **Hermitian**, maka bentuk kuadrat kompleks dikatakan sebagai bentuk Hermitian.

$$V(x) = \mathbf{x}^{*}\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Metode kedua Lyapunov

Teorema 1 : Jika diketahui, suatu sistem dinyatakan dalam bentuk : $\dot{\mathbf{x}} = f(x,t)$
Dimana : f(0,t) = 0 untuk sembarang t. Jika ada suatu parameter V(x,t) yang mempunyai turunan parsial pertama kontinyu dan memenuhi syarat :

- V(x,t) definit positif
- $\dot{V}(x,t)$ definit negatif

Maka keadaan kesetimbangan di titik asal adalah *stabil asimptotik* secara *uniform*. Jika ternyata V(x,t) → ~ untuk $\|x\| \rightarrow$ ~, maka keadaan kesetimbangan di titik asal adalah *stabil asimptotik global* secara *uniform.*

Metode kedua Lyapunov

Teorema 2 : Jika diketahui, suatu sistem dinyatakan dalam bentuk :

$\dot{\mathbf{x}} = f(x,t)$ untuk sembarang t

.Jika ada suatu parameter V(x,t) yang mempunyai turunan parsial pertama kontinyu dan memenuhi syarat :

- V(x,t) definit positif
- $\dot{V}(x,t)$ definit negatif

$\dot{V}(\phi(t); x_0, t_0, t)$ tidak terjadi nol pada $t \geq t_0$, untuk t_0 dan x_0 dimana $\Phi(t, x_0, t_0)$ menyatakan trayektori atau jawab dengan titik awal di x_0 pada t_0 , maka keadaan kesetimbangan di titik asal dari sistem adalah *stabil asimptotik global* secara *uniform*.

Analisa Kestabilan Sistem Linier

- Analisa kestabilan sistem linier parameter konstan dengan metode Lyapunov, bila sistem tersebut dinyatakan dalam bentuk : $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$
- Dipilih suatu kemungkinan fungsi Lyapunov sebagai berikut : $V(x) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$
- Turunan dari fungsi Lyapunov dinyatakan :

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \\
&= (\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x} \\
&= -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Analisa Kestabilan Sistem Linier

Teorema 4 : Bila sebuah sistem dinyatakan dengan : $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Syarat perlu dan dan syarat cukup agar keadaan kesetimbangan **x =** 0 stabil asimptotik global adalah jika diberikan setiap matrik Hermitian definit positif (simetri nyata) **Q** , maka terdapat suatu matrik Hermitian definit positif (simetri nyata) **P** sedemikian rupa sehingga :

$$\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right) = -\mathbf{Q}$$

Fungsi skalar $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ adalah suatu fungsi Lyapunov dari sistem tersebut.

Materi

Analisa Kestabilan Sistem Linier

Teorema:

- Jika $\dot{V}(x) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ tidak menjadi nol sepanjang setiap trayektori maka **Q** dapat dipilih berupa matrik semi definit positif.
- Jika dipilih suatu matrik definit positif sembarang, yaitu **Q** (atau suatu matrik semi definit positif sembarang **Q** jika $\dot{V}(x)$ tidak menjadi nol sepanjang setiap trayektori) dan penyelesaian persamaan matrik :

$$\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right) = -\mathbf{Q}$$

- Untuk menentukan **P**, maka syarat perlu dan syarat cukup agar keadaan kesetimbangan **x =** 0 stabil asimptotik adalah bahwa **P** harus definit positif
- Hasil akhir tidak bergantung pada matrik tertentu **Q** yang dipilih, dengan syarat bahwa **Q** definit positif (semi definit negatif, tergantung kasusnya).

Materi

Analisa Kestabilan Sistem Linier

- Untuk menentukan elemen dari matrik **P**, maka disamakan $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{PA}\right)$ matrik dan –**Q** elemen demi elemen. Ini menghasilkan n(n+1)/2 persamaan linier untuk penentuan elemen – elemen $p_{ij}=\overline{p}_{ji}$ dari **P.** Jika eigenvalue dari **A** dinyatakan dengan λ_1, λ_2,... λ_n masing masing diulang sebanyak kerangkapannya sebagai akar persamaan karekteristik, dan jika untuk setiap jumlah dua akar : $\lambda_j + \lambda_k \neq 0$, maka elemen – elemen **P** dapat ditentukan secara unik. Perhatikan bahwa jika matrik **A** menyatakan suatu sistem stabil, maka jumlah $\lambda_j + \lambda_k$ selalu tidak nol.

- Dalam menentukan ada atau tidak adanya suatu matrik Hermitian definit positif atau matrik simetri nyata **P** , akan lebih mudah kalau dipilih **Q = I** , dimana **I** adalah matrik identitas. Selanjutnya elemen – elemen **P** dari $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{PA}\right)=-\mathbf{I}$ dan matrik **P** tersebut kemudian diperiksa apakah definit positif atau tidak.

Contoh Soal 1

Suatu sistem dinyatakan dalam bentuk model berikut :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}x(t) + \mathbf{E}d(t) \qquad \text{dan } y(t) = \mathbf{Cx}(t)$$

Dimana : d(t) adalah disturbance

Jika diberikan :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cari matrik **F** agar sistem dengan u(t) = **F x**(t) menjadi tidak lagi sensitif terhadap *disturbance.*

Contoh Soal 1

Penyelesaian

Dari model tersebut di atas :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}x(t) + \mathbf{E}d(t) \qquad \text{(Pers. 6)}$$
$$= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}d(t)$$
$$= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}d(t)$$

Atau

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}d(t) \qquad \text{(Pers. 7)}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) \qquad \text{(Pers. 8)}$$

Penyelesaian dari persamaan terakhir :

$$x(t) = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BF})t}x(0) + \int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BF})(t-\tau)}\mathbf{E}d(\tau)d\tau \qquad \text{(Pers. 9)}$$

Atau

$$y(t) = \mathbf{C}e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BF})t}x(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BF})(t-\tau)}\mathbf{E}d(\tau)d\tau \qquad \text{(Pers. 10)}$$

Contoh Soal 1

Penyelesaian

Agar sistem tidak sensitif terhadap *disturbance* maka :

$$\mathbf{C}\int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BF})(t-\tau)}\mathbf{E}d(\tau)d\tau = [\mathbf{0}] \qquad \text{(Pers. 11)}$$

Untuk sistem dinamik yang dinyatakan dalam (Pers. 7) state $\hat{\mathbf{x}}$ adalah *controllable* jika dan hanya jika $\hat{\mathbf{x}} \in$ col – sp[**Q**],

Dimana **Q = C[E (A+BF)E (A+BF)^{2}E ... (A+BF)$^{n-1}$E]**

$$\hat{x} = \mathbf{C}\int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BF})(t-\tau)}\mathbf{E}d(\tau)d\tau \qquad \text{(Pers. 12)}$$

y(*t*) adalah bebas terhadap efek *d*(*t*) hanya bila dipenuhi :
Q = C[E (A+BF)E (A+BF)^{2}E] = [0 0 0] yang ekivalen dengan persamaan di atas dan pasangan (**A+BF, E**) adalah *unobservale.*

Contoh Soal 1

Penyelesaian

ditentukan bahwa **F = [**$f_1 \quad f_2 \quad f_3$**]**

$$\mathbf{CE} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BF})\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ f_1 & f_2 & -3+f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$= -1 + f_1 + 4 - 2f_2 - 3 + f_3 = 0$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BF})^2\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ f_1 & f_2 & -3+f_3 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1 - f_1 - 3f_1 + f_1 f_3 - 8 + 4f_2 - 2f_2 f_3 + 9 - 6f_3 + f_3^{\,2} = 0$$

Contoh Soal 1

Penyelesaian

Atau :

Dengan substitusi pada persamaan terakhir diperoleh :

$$f_1 - 2f_2 + f_3 = 0$$
$$-4f_1 + 10f_2 - 6f_3 + f_1 f_3 - 2f_2 f_3 + f_3^{\ 2} = -2$$

$$2f_2 - 2f_3 = -2$$
$$f_2 - f_3 = -1$$

Disini jika diambil f_3 = 0, diperoleh f_3 = -1 dan f_1 = -2.
Atau : **F =** [-2   -1   0].

Ringkasan

- Sebuah sistem non-linier dan atau sistem parameter berubah dapat yang dimodelkan dalam persamaan ruang keadaan (*state space*), dapat dianalisis kestabilannyadengan menggunakan metode kedua Lyapunov (Metode langsung Lyapunov).

- Metode Lyapunov tidak memerlukan untuk menyelesaikan persamaan ruang keadaan untuk mengetahui kestabilan sistem pengendalian. Metode ini dapat memeriksa apakah sistem dalam keadaan terkendali secara sempurna atau terkendali sebagian.

Latihan

Suatu sistem dinyatakan dalam bentuk model berikut :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}x(t) + \mathbf{E}d(t) \text{ dan } y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Dimana : d(t) adalah disturbance

Jika diberikan :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Cari matrik **F** agar sistem dengan u(t) = **F x**(t) menjadi tidak lagi sensitif terhadap *disturbance.*

SEKIAN

&

TERIMAKASIH