

SISTEM KONTROL OTOMATIS LANJUT

Aplikasi dalam bidang Industri, dan Kelautan

Aulia Siti Aisjah
Syamsul Arifin

DAFTAR ISI

1 PERANCANGAN SISTEM PENGENDALIAN dengan METODE PERSAMAAN RUANG KEADAAN



Gambaran Umum	Pokok Bahasan
<p>Pendekatan baru dalam menyelesaikan persoalan-persoalan pengendalian modern seringkali menuntut penggunaan komputer. Dengan berkembangnya kapasitas dan kecepatan prosesor komputer, makin mudah bagi kita untuk merancang sistem pengendalian dengan derajat kebebasan tinggi. Metode persamaan ruang keadaan untuk memodelkan sistem, menguji kestabilan dan keteramatan menjadi lebih mudah untuk dilakukan. Bab ini membahas membangun model sistem pengendalian dalam bentuk persamaan keadaan kemudian menganalisis tingkat kestabilannya. Juga akan dibahas tentang perancangan sistem pengendalian "Controller-Observer" dan perancangan regulator optimal. Pada akhir BAB dibahas Analisa Kestabilan Lyapunov, sebuah metode untuk menganalisis kestabilan sistem tanpa harus menyelesaikan persamaan keadaan sistem.</p>	<ol style="list-style-type: none">1. Diagonalisasi Matrik,2. Penyelesaian Persamaan Keadaan,3. Matrik Transisi Keadaan,4. Matrik Alih,5. Keterkendalian (<i>Controllability</i>),6. Keteramatan (<i>Observability</i>),7. Perancangan Dengan Penempatan Pole,8. Perancangan Gabungan "Controller-Observer",9. Perancangan Regulator Optimal,10. Analisis Kestabilan Lyapunov.
Tujuan Pembelajaran	
<ol style="list-style-type: none">1. Mampu membangun model sistem dalam bentuk persamaan ruang keadaan (<i>state space</i>),2. Mampu menggunakan metoda-metode penyelesaian persamaan ruang keadaan secara analitis maupun dengan pendekatan pemrograman komputer dengan menggunakan MATLAB,	

3. Mampu mengaplikasikan metoda persamaan ruang keadaan dalam perancangan sistem pengendalian yang *Controllability* dan *Observability*,
4. Memahami perancangan regulator optimal,
5. Mampu menggunakan metode Lyapunov untuk perancangan kestabilan sistem pengendalian.

“semakin jauh kita mampu membaca fenomena semesta alam raya dan memahami maknanya, maka semakin bijak kita melihat perbedaan, itulah awal tumbuhnya rasa cinta .”

Syamsul Arifin

1.1 Model Sistem dalam Persamaan Keadaan

Pada teori pengendalian konvensional, yang menjadi penting adalah sinyal masukan, sinyal keluaran dan sinyal kesalahan. Dalam menganalisa sinyal keluaran, maupun kesalahan melalui fungsi alih. Kelemahan dalam teori ini adalah hanya dapat diterapkan pada sistem linier dengan parameter konstan dengan satu masukan dan satu keluaran. Teori ini tidak dapat diterapkan pada sistem dengan parameter yang berubah (*time varying*), sistem non linier maupun sistem dengan multi masukan dan multi keluaran. Hal ini tidak bisa kita lakukan untuk merancang sistem pengendalian adaptif dan optimal, karena kedua metode tersebut sebagian besar diaplikasikan pada sistem dengan parameter berubah dan sistem non linier.

Suatu pendekatan baru dalam teori pengendalian modern, dimana teori ini berkembang sejak diketemukannya perangkat komputer. Pendekatan baru ini didasarkan pada konsep keadaan (*state*). Sebelum kita membahas persamaan ruang keadaan, terlebih dahulu dibahas beberapa istilah yang akan digunakan dalam bab ini. Hal – hal yang penting untuk dipahami adalah mengenai **Keadaan (*state*)**, **Variabel keadaan**, **Vektor keadaan** .

Definisi dari beberapa istilah di dalam persamaan Keadaan sistem, adalah sebagai berikut:

Keadaan (*state*), keadaan suatu sistem dinamik adalah himpunan terkecil dari variabel-variabel (disebut variabel keadaan) sedemikian rupa sehingga dengan mengetahui variabel-variabel ini pada $t=t_0$, bersama-sama dengan masukan untuk $t \geq t_0$, dapat menentukan secara lengkap perilaku sistem untuk setiap waktu $t \geq t_0$. Jadi, keadaan suatu sistem dinamik pada saat t secara unik ditentukan oleh keadaan tersebut pada $t=t_0$ dan masukan untuk $t \geq t_0$, tidak tergantung pada keadaan dan masukan sebelum t_0 . Perhatikan bahwa dalam membahas sistem linier parameter konstan, biasanya dipilih waktu acuan t_0 sama dengan nol.

Variabel keadaan, variabel keadaan suatu sistem dinamik adalah himpunan terkecil dari variabel-variabel yang menentukan keadaan sistem dinamik. Jika paling tidak diperlukan n variabel $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ untuk melukiskan secara lengkap perilaku suatu sistem dinamik (sedemikian rupa sehingga setelah diberikan masukan untuk $t \geq t_0$ dan syarat awal pada $t = t_0$ maka keadaan sistem yang akan datang telah ditentukan secara lengkap), maka n variabel $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ tersebut merupakan suatu himpunan variabel keadaan. Variabel keadaan tidak perlu merupakan besaran yang secara fisis dapat diukur atau diamati. Meskipun demikian sebaiknya dipilih variabel keadaan yang merupakan besaran dapat diukur secara mudah, karena hukum pengendalian optimal memerlukan umpan balik semua variabel keadaan dengan pembobotan yang sesuai.

Vektor keadaan, jika diperlukan n variabel keadaan untuk menggambarkan secara lengkap perilaku suatu sistem yang diberikan, maka n variabel keadaan ini dapat dianggap sebagai n komponen suatu vektor $\mathbf{x}(t)$. Vektor semacam ini disebut vektor keadaan. Jadi *vektor keadaan* adalah suatu vektor yang menentukan secara unik keadaan sistem $\mathbf{x}(t)$ untuk setiap $t \geq t_0$, setelah ditetapkan masukan $\mathbf{u}(t)$ untuk $t \geq t_0$.

Ruang keadaan, ruang n dimensi yang sumbu koordinatnya terdiri dari sumbu x_1 , sumbu x_2, \dots , sumbu x_n disebut ruang keadaan. Setiap keadaan dapat dinyatakan dengan suatu titik pada ruang keadaan.

Contoh Soal 1.1:

Perhatikan sistem rangkaian RLC yang ditunjukkan pada Gambar 5.1. Perilaku dinamika sistem dapat dilihat secara lengkap untuk $t \geq t_0$ jika harga-harga awal dari arus $i(t_0)$, tegangan kapasitor $v_c(t_0)$, dan tegangan masukan $v(t)$ untuk $t \geq t_0$ diketahui. Jadi keadaan rangkaian tersebut untuk $t \geq t_0$ secara dinyatakan sebagai $i(t)$, $v_c(t)$ dan tegangan masukan $v(t)$ untuk $t \geq t_0$. Maka dari itu, $i(t)$ dan $v_c(t)$ merupakan suatu himpunan variabel keadaan dari sistem tersebut. Pemilihan variabel keadaan tunak suatu sistem adalah tidak unik, sebagai contoh, pada sistem ini bisa dipilih sebagai himpunan variabel keadaan adalah $x_1(t) = i(t)$ dan $x_2(t) = v_c(t)$.

Jawab:

Misalkan dipilih $i(t)$ dan $v_c(t)$ sebagai variabel keadaan, maka persamaan yang menggambarkan dinamika sistem elektrik RLC adalah,

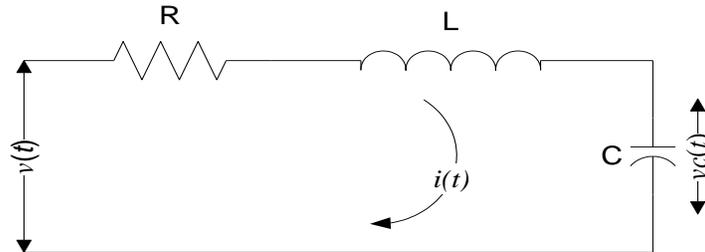
$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_c = v$$

$$C \frac{dv_c}{dt} = i$$

dalam notasi matrik-vektor, dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [v]$$

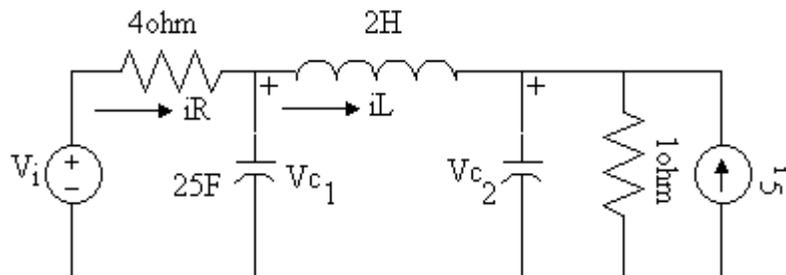
ini merupakan penyajian persamaan ruang keadaan dari sistem rangkaian RLC.



Gambar 1.1 Rangkaian RLC.

Soal Latihan 1.1

Perhatikan rangkaian listrik RLC seperti Gambar 1.2 di bawah. Bila ditentukan sebagai variabel keadaan adalah arus yang melalui induktor dan tegangan pada kapasitor C1 dan C2. Tentukan persamaan ruang keadaan sistem.



Gambar 1.2 Rangkaian RLC dengan loop lebih dari satu.

Analisis sistem kompleks, sistem modern yang kompleks mungkin mempunyai beberapa masukan dan beberapa keluaran, dan ini mungkin saling terkait secara kompleks pula. Untuk menganalisis sistem seperti ini, perlu penyederhanaan model matematik. Untuk perhitungan yang berulang-ulang sangat membantu jika menggunakan komputer. Berdasarkan pandangan ini maka pendekatan yang paling sesuai pada analisis sistem adalah pendekatan *ruang keadaan*.

Teori pengendalian konvensional adalah berdasarkan pada hubungan masukan dengan keluaran sistem atau fungsi alih, sedangkan teori pengendalian modern berdasarkan pada diskripsi

persamaan sistem dalam bentuk n persamaan diferensial orde pertama, yang dapat digunakan menjadi persamaan diferensial matrik-vektor orde pertama. Penggunaan notasi matrik-vektor akan sangat menyederhanakan penyajian model matematika dari persamaan sistem.

Penggunaan metode ruang keadaan untuk analisis suatu sistem, sangat sesuai jika menggunakan komputer digital, karena pendekatannya adalah wawasan waktu. Sehingga terhindar dari kebosanan dan kesulitan pada saat terjadi perhitungan berulang dan lebih mudah untuk menyelesaikan sistem-sistem yang berorde tinggi, ini adalah salah satu keunggulan penggunaan metode ruang keadaan.

Hal lain penting untuk diperhatikan, bahwa variabel keadaan tidak perlu menyatakan besaran-besaran fisis dari sistem. Variabel yang tidak menyatakan besaran fisis, yang tidak dapat diukur atau diamati, dapat dipilih sebagai variabel keadaan. Kebebasan dalam memilih variabel keadaan ini merupakan keunggulan lain dari metode ruang keadaan.

Persamaan Ruang Keadaan Orde- n , dengan fungsi penggerak u .

Suatu sistem persamaan diferensial orde- n dinyatakan sebagai berikut,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad \dots (1.1)$$

dengan perolehan data sebelumnya : $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ bersama dengan masukan $u(t)$ untuk $t \geq 0$, menentukan secara lengkap perilaku yang akan datang dari sistem, maka dapat dipilih $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ sebagai himpunan n variabel keadaan. Secara matematis, pemilihan variabel keadaan semacam itu adalah cukup mudah. Akan tetapi secara praktis, karena ketidak telitian bentuk turunan orde tinggi yang disebabkan oleh pengaruh *noise inhern* pada setiap kondisi praktis, maka pemilihan variabel keadaan semacam itu tidak diinginkan. Selanjutnya didefinisikan,

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad \dots (1.2)$$

selanjutnya persamaan 1.2 dapat dituliskan kembali sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned} \quad \dots (1.3)$$

atau dalam bentuk persamaan ruang keadaan (matrik-vektor),

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \dots(1.4)$$

dimana,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots (1.5)$$

persamaan keluaran menjadi,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dots (1.6)$$

atau,

$$y = \mathbf{Cx} \quad \dots(1.7)$$

dimana, $\mathbf{C}=[1 \ 0 \ \dots \ 0]$

Persamaan (1.4) adalah persamaan diferensial orde pertama yang disebut dengan *persamaan keadaan*, sedangkan persamaan (1.7) disebut *persamaan keluaran*.

Contoh Soal 1.2:

Sistem didefinisikan oleh persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u \quad \dots(1.8)$$

dimana y adalah keluaran dan u adalah masukan sistem. Tentukan penyajian ruang keadaan dari sistem yang dinyatakan pada persamaan (1.8) tersebut di atas.

Jawab:

Dipilih variabel keadaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ x_3 &= \ddot{y} \end{aligned} \quad \dots (1.9)$$

Selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u\end{aligned}\quad \dots (1.10)$$

Persamaan terakhir dari tiga persamaan ini diperoleh dengan menyelesaikan persamaan diferensial asal (persamaan 1.9) untuk suku turunan yang tertinggi dan kemudian mensubstitusikan persamaan yang kedua ke persamaan yang ketiga. Dengan menggunakan notasi matrik-vektor, tiga persamaan diferensial orde pertama ini dapat digabungkan menjadi satu sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} [u]\quad \dots(1.11)$$

persamaan keluaran dinyatakan oleh,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\quad \dots(1.12)$$

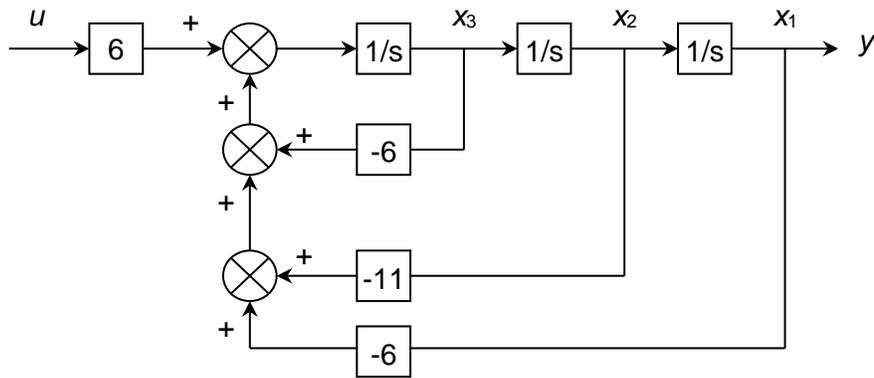
persamaan (1.11) dan (1.12) dapat ditulis dalam bentuk standar sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ y &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\quad \dots(1.13)$$

Dimana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]\quad \dots (1.14)$$

Gambar 1.3 di bawah menunjukkan penyajian diagram blok dari persamaan keadaan dan persamaan keluaran (1.12) di atas. Perhatikan bahwa fungsi alih dari blok-blok umpan balik tersebut identik dengan koefisien negatif dari persamaan diferensial asal persamaan (1.11),



Gambar 1.3 Penyajian diagram blok sistem contoh soal

Soal Latihan 1.2:

Sistem didefinisikan oleh persamaan diferensial sebagai berikut :

$$2\ddot{y} + 4\dot{y} + 6\dot{y} + 8y = 10u$$

dimana y adalah keluaran dan u adalah masukan sistem. Tentukan penyajian ruang keadaan dari sistem tersebut diatas.

Ketidak unikan himpunan Variabel Keadaan

Himpunan variabel keadaan untuk suatu sistem adalah *tidak unik*. Artinya bahwa variabel keadaan bisa dipilih dari variabel keadaan yang saling tidak terkait.

Bila dipilih variabel keadaan :

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \hat{X}_2 &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \hat{X}_3 &= X_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad \dots (1.15)$$

$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$: tidak unik (terpisah)

$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$: unik (saling terkait)

Jika \mathbf{X} merupakan suatu vektor keadaan , maka:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad \dots (1.16)$$

Dimana \mathbf{P} adalah matrik non singular.

Vektor-vektor keadaan yang berbeda membawa informasi yang sama memenuhi perilaku sistem.

Soal – soal Asesmen

1. Perhatikan bentuk persamaan diferensial dari sistem dinamik berikut ini, kemudian tentukan persamaan ruang keadaannya:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 18y = 2u$$

2. Perhatikan persamaan berikut ini, kemudian tentukan blok diagram yang menggantikan PD di ferensial tersebut.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 18y = 2u$$

3. Persamaan dinamika manuver kapal, dengan pendekatan Nomoto orde dua dinyatakan dalam bentuk PD berikut ini, nyatakan bentuk persamaan ruang keadaan dari sistem ini:

$$T_1 T_2 \ddot{\psi} + (T_1 + T_2) \dot{\psi} + \psi = K(\delta + T_3 \dot{\delta})$$

4. Nyatakan dalam bentuk blok diagram dari Persamaan Diferensial Soal No 4.

1.2 Bentuk Kanonik Persamaan Ruang Keadaan

Bentuk kanonik persamaan ruang keadaan terdiri dari dua bentuk: yaitu (1) Bentuk Controllable dan (2) Bentuk Observable. Kedua bentuk persamaan ini dapat digunakan untuk mengidentifikasi sifat “Keterkendalian” dan “Keteramatan” sebuah sistem.

Tahapan dalam menentukan persamaan kanonik:

Diagonalisasi Matrik Sistem Anxn.

Eigenvalue Matrik A nxn.

Eigenvalue dari matrik \mathbf{A} $n \times n$ adalah akar dari persamaan karakteristik yang dinyatakan sebagai diterminan berikut,

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad \dots(1.17)$$

eigenvalue sering disebut akar - akar karakteristik.

Sebagai contoh suatu matrik \mathbf{A} sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad \dots (1.18)$$

persamaan karakteristiknya adalah,

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \quad \dots (1.19)$$

eigenvalue dari \mathbf{A} adalah akar dari persamaan karakteristik tersebut, atau $-1, -2,$ dan -3 . Beberapa sifat penting *eigenvalue* adalah sebagai berikut,

1. Jika semua koefisien \mathbf{A} adalah nyata, *eigenvalue*-nya adalah juga nyata atau dalam pasangan konjugasi kompleks.
2. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah *eigenvalue* dari matrik \mathbf{A} , maka $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
trace dari matrik \mathbf{A} adalah jumlahan dari *eigenvalue* matrik \mathbf{A} .
3. Jika $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, adalah *eigenvalue* dari matrik \mathbf{A} , maka juga *eigenvalue* dari matrik \mathbf{A}' .
4. Jika matrik \mathbf{A} adalah nonsingular, dengan *eigenvalue* $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, maka $1/\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, adalah *eigenvalue* dari matrik \mathbf{A}^{-1} ,

Contoh Soal 1.3:

Perhatikan sistem yang sama seperti contoh 1.2. Tunjukkan bahwa persamaan (1.13) bukan satu-satunya persamaan keadaan sistem ini.

Jawab :

Misalkan didefinisikan suatu himpunan variabel keadaan baru $z_1, z_2,$ dan z_3 dengan transformasi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

atau $\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$... (1.20)

dimana, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$... (1.21)

selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (1.20) ke persamaan (1.21), diperoleh,

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{APz} + \mathbf{Bu} \quad \dots (1.22)$$

jika kedua ruas persamaan terakhir dikalikan didepan dengan \mathbf{P}^{-1} , maka diperoleh,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu} \quad \dots (1.23)$$

atau,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

... (1.23)

Persamaan (1.23) di atas, dapat disederhanakan, dalam bentuk persamaan matriks berikut ini:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} [u]$$

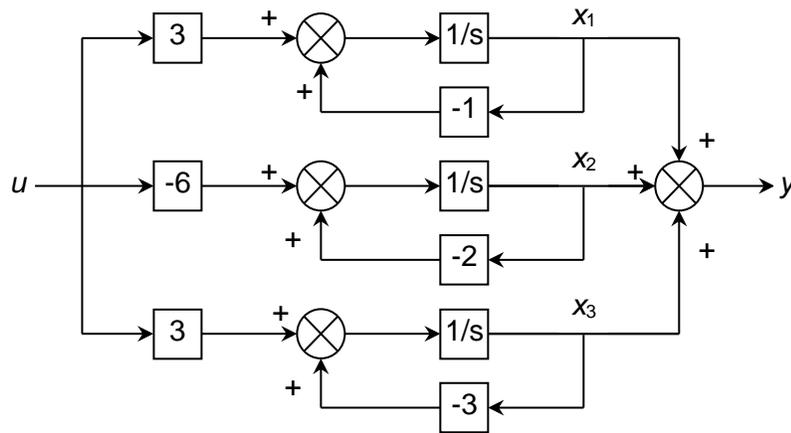
... (1.24)

Persamaan (1.24) merupakan persamaan keadaan sistem pada contoh 1.2, yang didefinisikan oleh persamaan (5.5). Sedangkan persamaannya adalah sebagai berikut,

$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} \quad \dots(1.26)$$

atau,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \dots(1.27)$$



Gambar 1.4 Blok diagram sistem persamaan untuk contoh soal 1.3

Matrik transformasi **P** yang didefinisikan oleh persamaan (1.21), memodifikasi matrik koefisien dari **z** menjadi matrik diagonal. Secara jelas terlihat dari persamaan (5.9), menunjukkan bahwa tiga persamaan keadaan yang terpisah diatas tidak saling berkaitan lagi. Perhatikan

bahwa elemen diagonal matrik $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ pada persamaan (1.23) adalah identik dengan tiga *eigenvalue* dari \mathbf{A} . Sangat penting untuk diingat bahwa *eigenvalue* dari \mathbf{A} dan elemen diagonal matrik $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ adalah identik.

Berikut, akan dibuktikan *invariansi eigenvalue* pada suatu transformasi linier, dengan membuktikan bahwa polynomial karakteristik $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ dan $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}|$ adalah identik. Karena determinan dari suatu hasil kali adalah sama dengan hasil perkalian determinan-determinannya, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| &= |\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}||\mathbf{P}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned} \quad \dots (1.28)$$

dengan mengingat $|\mathbf{P}^{-1}|$ dan $|\mathbf{P}|$ sama dengan determinan hasil kali $|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}|$, maka diperoleh,

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}||\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

Jadi, telah dibuktikan bahwa *eigenvalue* dari \mathbf{A} tidak berubah dengan adanya transformasi linier.

Eigenvektor

Eigenvektor sangat berguna dalam pengendalian modern. Matrik vektor tidak negatif \mathbf{p}_i , bersama dengan *eigenvalue* dinyatakan dengan persamaan.

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \dots (1.29)$$

dimana $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$, adalah *eigenvalue* matrik \mathbf{A} , disebut sebagai *eigenvektor* matrik \mathbf{A} .

Contoh Soal 5.4 :

Matrik $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, cari *eigenvektor*-nya.

Jawab:

Persamaan karakteristik : $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2 - 1$

Maka *eigenvalue* diperoleh : $\lambda_1=1$ dan $\lambda_2=-1$, selanjutnya *eigenvektor* ditulis,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

substitusi $\lambda_1=1$ dan \mathbf{p}_1 kedalam persamaan (1.29), diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga $p_{21}=0$, p_{11} adalah berharga sebarang, dalam hal ini bisa diambil $p_{11}=1$.

Dengan cara yang sama, substitusi $\lambda_2=-1$ dan \mathbf{p}_2 kedalam persamaan (1.29), diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga : $-2p_{12} + p_{22} = 0$

dengan mengambil $p_{12}=1$, dihasilkan $p_{22}=2$, maka *eigenvektor* matrik \mathbf{A} adalah,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jika matrik \mathbf{A} mempunyai *eigenvalue orde banyak* dan tidak simetris, maka tidak semua *eigenvektor* dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (5.12). Marilah kita ambil matrik \mathbf{A} yang mempunyai n -*eigenvalue* berbeda $q(<n)$. *Eigenvektor* yang berhubungan dengan q *eigenvalue* berbeda, dinyatakan dengan persamaan,

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0} \quad \dots (1.30)$$

dimana *eigenvalue* berbeda yang ke- i adalah $\lambda_i, i=1,2,\dots,q$. Diantara *eigenvalue orde banyak*, ambil λ_j orde ke- m ($m \leq n-q$), yang berhubungan dengan *eigenvektor* disebut dengan **generalized eigenvektor**, dinyatakan dengan persamaan m -vektor sebagai berikut,

$$\begin{aligned} (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+1} &= \mathbf{0} \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+2} &= -\mathbf{p}_{n-q+1} \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+3} &= -\mathbf{p}_{n-q+2} \\ &\vdots \\ (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+m} &= -\mathbf{p}_{n-q+m-1} \end{aligned} \quad \dots (1.31)$$

Contoh Soal 5.5:

Diberikan matrik \mathbf{A} sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Carilah *eigenvektor* matrik \mathbf{A} ,

Jawab:

Dengan menggunakan persamaan karakteristik, diperoleh *eigenvalue* $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. Maka matrik **A** dikatakan mempunyai orde dua pada *eigenvalue*=1. *Eigenvektor* untuk *eigenvalue* $\lambda_1=2$ ditentukan dengan menggunakan persamaan (5.14),

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

dari matrik ini akan diperoleh dua persamaan independent, sehingga bisa dipilih sebarang harga $p_{11}=2$ dan menghasilkan $p_{21}=-1$ dan $p_{31}=-2$, maka

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sedangkan *generalized eigenvektor*, yang berkaitan dengan *eigenvalue* orde-2, diperoleh dengan mensubstitusi $\lambda_2=1$ kedalam persamaan (5.14), sebagai berikut

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

diambil harga sebarang $p_{12}=1$, diperoleh $p_{22}=-3/7$ dan $p_{32}=-5/7$, maka

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

Substitusi $\lambda_3=1$ kedalam persamaan (5.14), sebagai berikut

$$(\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

diambil harga sebarang $p_{13}=1$, diperoleh $p_{23}=-22/49$ dan $p_{33}=-46/49$, maka

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{22}{49} \\ -\frac{46}{49} \end{bmatrix}$$

Soal latihan 5.3 :

Diberikan matrik **A** sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

Carilah *eigenvektor* matrik \mathbf{A} ,

Diagonalisasi Matrik \mathbf{A} $n \times n$.

Jika suatu matrik \mathbf{A} $n \times n$ dengan *eigenvalue-eigenvalue* yang berbeda dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \dots(1.32)$$

maka transformasi $\mathbf{x}=\mathbf{Pz}$ dimana,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \dots(1.33)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sama dengan n *eigenvalue* dari \mathbf{A} yang berbeda akan mentransformasi $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ menjadi matrik diagonal, atau

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \dots (1.34)$$

Jika matrik \mathbf{A} yang didefinisikan oleh persamaan (5.13) melibatkan *eigenvalue* jamak, maka diagonalisasi tersebut tidak mungkin diperoleh. Sebagai contoh, jika matrik \mathbf{A} 3×3 dimana,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

mempunyai *eigenvalue* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_3$, maka transformasi $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$ dimana,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

akan menghasilkan, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

bentuk ini disebut bentuk matrik **Jordan**.

Contoh Soal 1.6:

Sistem seperti pada contoh 1.2 dan 1.3 dengan menggunakan persamaan (1.4), tunjukkan bahwa penyajian ruang keadaan seperti yang dinyatakan oleh persamaan (1.7) dan (1.9) dengan cara diagonalisasi matrik.

Jawab:

Dari penyelesaian terdahulu telah diperoleh matrik,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

dengan *eigenvalue* $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ maka matrik \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

maka matrik,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan persamaan (5.6) persamaan keadaan dan persamaan keluaran diperoleh seperti persamaan (5.7) dan (5.9).

1.3 Penyelesaian Persamaan Keadaan

Pada sub-bab ini akan dibahas teorema *Cayley-Hamilton* untuk menyelesaikan masalah-masalah yang melibatkan persamaan matrik, jawab persamaan homogen, pendekatan *laplace* untuk

jawab persamaan keadaan homogen, matrik transisi keadaan, jawab persamaan keadaan non-homogen dan pendekatan laplace pada jawab persamaan keadaan non-homogen.

1.3.1 Teorema Cayley-Hamilton

Teorema *Cayley-Hamilton* adalah teorema yang sangat berguna untuk pembuktian yang melibatkan persamaan matrik atau menyelesaikan masalah-masalah yang melibatkan persamaan matrik.

Perhatikan sebuah matrik \mathbf{A} $n \times n$, dengan persamaan karakteristik sebagai berikut,

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad \dots (1.35)$$

teorema Cayley-Hamilton menyatakan bahwa matrik \mathbf{A} yang sesuai dengan persamaan karakteristiknya dinyatakan dengan bentuk persamaan sebagai berikut,

$$\mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A} + a_n \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \dots (1.37)$$

Untuk membuktikannya, dimulai dari pengetahuan bahwa $\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ polinomial derajat $n-1$ dalam suku λ sebagai berikut,

$$\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{B}_1 \lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2 \lambda^{n-2} + \dots + \mathbf{B}_{n-1} \lambda + \mathbf{B}_n \quad \dots (1.38)$$

Karena $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}$ maka,

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = [\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})](\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| \mathbf{I} \quad \dots (1.39)$$

diperoleh,

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| \mathbf{I} &= \mathbf{I} \lambda^n + a_1 \mathbf{I} \lambda^{n-1} + a_2 \mathbf{I} \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \mathbf{I} \lambda + a_n \mathbf{I} \\ &= (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{B}_1 \mathbf{I} \lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{I} \lambda^{n-2} + \dots + \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{I} \lambda + \mathbf{B}_n) \\ &= (\mathbf{B}_1 \mathbf{I} \lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{I} \lambda^{n-2} + \dots + \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{I} \lambda + \mathbf{B}_n)(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \end{aligned}$$

dari persamaan ini dapat dilihat bahwa \mathbf{A} dan \mathbf{B}_i ($i=1,2,\dots,n$) dapat ditukarkan. Karena itu hasil kali antara $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ dan $\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ adalah nol, jika salah satu atau keduanya adalah nol. Pada persamaan terakhir jika λ diganti dengan \mathbf{A} , dan mengambil harga $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})=0$, maka diperoleh,

$$\mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A} + a_n \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \dots (1.40)$$

ini adalah pembuktian teorema Cayley-Hamilton.

1.3.2 Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen

Akan dibahas berturut-turut penyelesaian umum persamaan diferensial skalar dan kemudian persamaan diferensial matrik-vektor.

Persamaan diferensial Skalar

Tinjau suatu persamaan diferensial skalar sebagai berikut,

$$\dot{x} = ax \quad \dots(1.41)$$

ambil anggapan bahwa penyelesaiannya adalah dalam bentuk sebagai berikut,

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad \dots(1.42)$$

dengan mensubstitusi persamaan (1.42) ke dalam persamaan (1.41) diperoleh,

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots) \quad \dots (1.43)$$

Jika anggapan yang diambil merupakan jawaban yang benar, maka persamaan (5.20) harus berlaku untuk setiap t . Selanjutnya, dengan menyamakan koefisien-koefisien dari suku-suku dengan pangkat t yang sama, diperoleh,

$$\begin{aligned} b_1 &= a b_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2} a b_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3} a b_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} a^3 b_0 \\ &\dots\dots\dots \\ b_k &= \frac{1}{k!} a^k b_0 \end{aligned} \quad \dots(1.44)$$

Harga b_0 diperoleh dengan mensubstitusikan $t=0$ kedalam persamaan (5.20), atau $x(0)=b_0$. Oleh karena itu jawab $x(t)$ dapat dituliskan sebagai berikut,

$$x(t) = (1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots)x(0) = e^{at} x(0) \quad \dots(1.45)$$

Persamaan (1.45) di atas adalah penyelesaian umum persamaan diferensial skalar, mengandung suku eksponensial skalar.

Persamaan diferensial Matrik-Vektor

Persamaan diferensial matrik-vektor dinyatakan dengan bentuk sebagai berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \dots(1.46)$$

dimana:

\mathbf{x} = vektor n dimensi.

\mathbf{A} = matriks konstan $n \times n$.

Analogi dengan kasus skalar, kita anggap bahwa jawab dari persamaan diatas adalah berbentuk deret pangkat vektor dalam t , atau

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_k t^k + \dots \quad \dots(1.47)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (1.47) ke dalam persamaan (1.46), diperoleh

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \dots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + \dots = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_k t^k + \dots) \quad \dots(1.49)$$

Jika jawab pemisalan tersebut merupakan jawab yang sebenarnya, maka persamaan (1.49) harus berlaku untuk semua t . Selanjutnya dengan menyamakan koefisien-koefisien dari suku-suku dengan pangkat t yang sama diperoleh,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3 \times 2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{b}_k &= \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \end{aligned} \quad \dots (1.50)$$

dengan mensubstitusikan $t=0$ kedalam persamaan (1.47), diperoleh $\mathbf{x}(0)=\mathbf{b}_0$, jadi jawab $\mathbf{x}(t)$ dapat dituliskan sebagai,

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \dots)\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \quad \dots(1.51)$$

Karena eksponensial matrik $e^{\mathbf{A}t}$ dalam analisis ruang keadaan sistem linier, maka berikut adalah beberapa sifat eksponensial matrik,

$$\begin{aligned} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &= e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} && \text{jika } \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &\neq e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} && \text{jika } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \end{aligned}$$

1.3.3 Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen Dengan Tranformasi Laplace

Tinjau suatu model matematika dalam bentuk persamaan diferensial skalar sebagai berikut,

$$\dot{x} = ax \quad \dots(1.53)$$

Transformasi Laplace dari persamaan ini, diperoleh

$$sX(s)-x(0) = aX(s) \quad \dots(1.53)$$

dimana $X(s)=\mathcal{L}[x]$. Dengan menyelesaikan persamaan (1.53) untuk $X(s)$ diperoleh,

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1}x(0)$$

transformasi Laplace balik dari persamaan terakhir ini diperoleh jawab,

$$x(t) = e^{at}x(0) \quad \dots(1.54)$$

Pendekatan jawab persamaan diferensial skalar homogen diatas dapat diperluas untuk persamaan keadaan homogen,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \dots(1.55)$$

transformasi Laplace kedua ruas persamaan (1.55) adalah,

$$s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

dimana $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}]$. Selanjutnya,

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) \quad \dots(1.56)$$

kedua persamaan (1.56) dikalikan didepan dengan $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$, maka diperoleh

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)$$

Transformasi Laplace dari $\mathbf{X}(s)$ diperoleh jawab $\mathbf{x}(t)$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \dots\right]\mathbf{x}(0) \\ &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \dots\right]\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \quad \dots(1.57) \end{aligned}$$

Pentingnya persamaan (1.57) terletak pada kenyataan bahwa persamaan tersebut memberikan suatu cara yang mudah untuk mencari jawab tertutup dalam bentuk eksponensial matrik.

Penggunaan Matlab untuk membantu penyelesaian persamaan keadaan sistem, dapat dilakukan dengan menggunakan function $[\mathbf{y},\mathbf{x}] = \text{impulse}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{i},\mathbf{u},t)$ dan $[\mathbf{y},\mathbf{x}] = \text{step}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{i},\mathbf{u},t)$ dimana kedua fungsi tersebut akan menghasilkan respon impulse dan respon step.

Contoh Soal 1.7

Persamaan keadaan sistem linier *time invariant* yang dinyatakan dalam bentuk berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$
$$y = [1 \quad 1 \quad 0]x$$

Bila diberikan kondisi awal dari variabel keadaan adalah :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

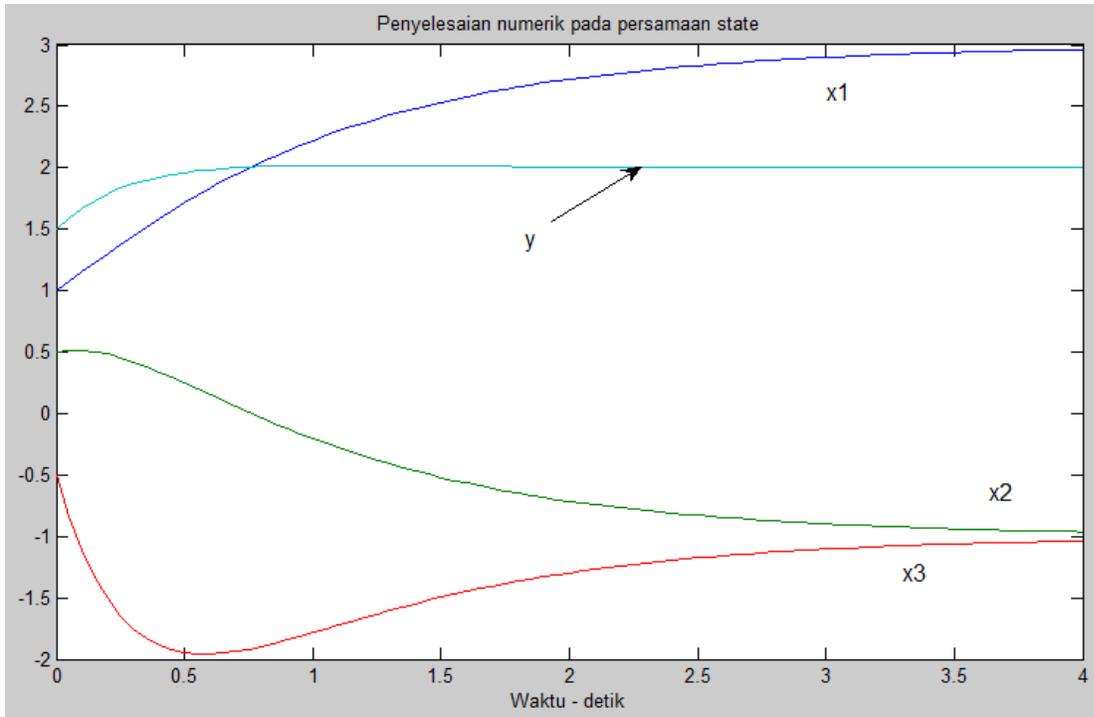
Tentukan $x(t)$ dan $y(t)$ jika $r(t)$ adalah fungsi step.

Jawab:

Program Matlab pada contoh soal tersebut,

```
A=[0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];  
B=[1;1;1]; C=[1 1 0]; D=0;  
x0=[1 .5 -0.5]; t=0:0.05:4;  
U=ones(1, length(t)); % menghasilkan vektor baris u(t)  
[y,x]=lsim(A,B,C,D,U,t,x0);  
plot(t,x,t,y);  
title('Penyelesaian numerik pada persamaan state'), xlabel('Waktu -  
detik')
```

Keluaran dari program Matlab seperti terlihat pada Gambar 1.5 di bawah.



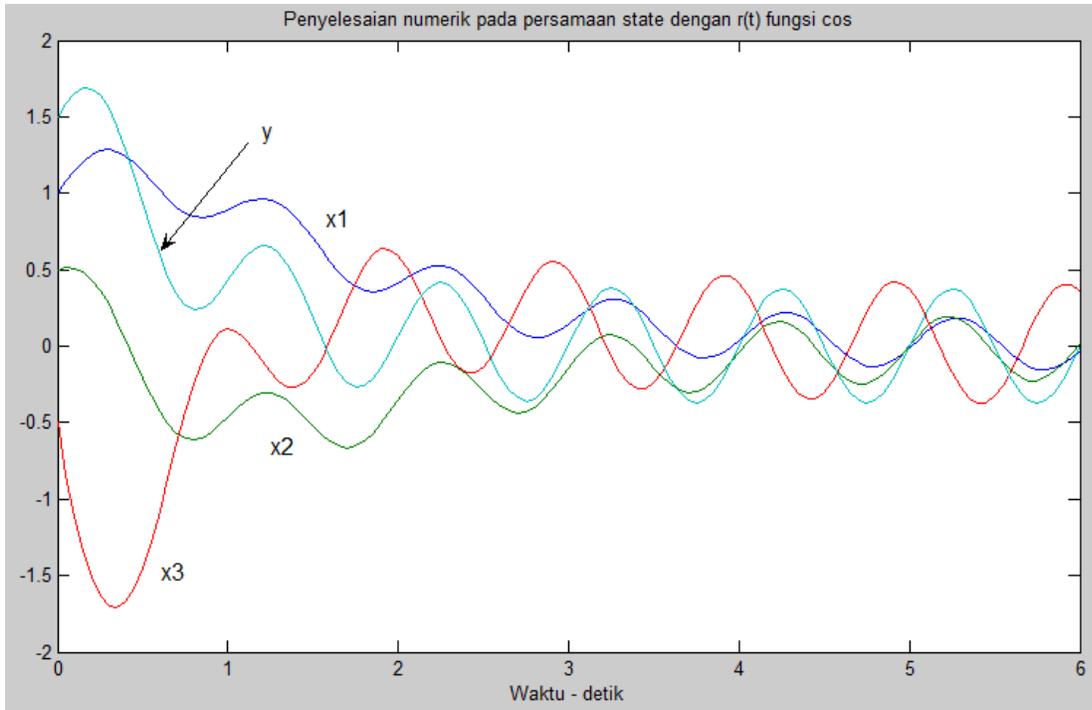
Gambar 1.5 Keluaran program Matlab untuk contoh 5.8

Contoh Soal 5.8

Pada contoh soal 5.8, tentukan dan plot $y(t)$ dan $\mathbf{x}(t)$ bila $r = \cos(2\pi t)$

Program matlab untuk contoh 5.8 tersebut diatas adalah sebagai berikut,

```
A=[0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
B=[1;1;1]; C=[1 1 0]; D=0;
x0=[1 .5 -0.5]; t=0:0.05:6;
U=cos(2*pi*t); % menghasilkan vektor baris u(t)
[y,x]=lsim(A,B,C,D,U,t,x0);
plot(t,x,t,y);
title('Penyelesaian numerik pada persamaan state dengan r(t) fungsi
cos'),
xlabel('Waktu - detik')
```



Gambar 1.6 Keluaran program Matlab untuk contoh 1.9 dengan $r(t) = \cos 2\pi t$

Terlihat pada kedua gambar 1.5 dan 1.6 di atas dengan masukan pada sistem adalah fungsi step menghasilkan nilai variabel keadaan x_1 , x_2 dan x_3 cenderung konstan saat $t > 3,5$ detik. Sedangkan dengan masukan fungsi cos, nilai ketiga variabel keadaan x_1 , x_2 dan x_3 sepanjang waktu akan mengikuti pola sinyal cos.

Soal – soal Asesmen

$$1. \begin{bmatrix} m - Y_{\dot{v}} & -mx_G - Y_{\dot{p}} & mx_G - Y_{\dot{r}} \\ -mz_G - K_{\dot{v}} & I_z - K_{\dot{p}} & mx_G - K_{\dot{r}} \\ mx_G - N_{\dot{v}} & mx_G - N_{\dot{p}} & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_v & -Y_p & mu_0 - Y_r \\ -K_v & -K_p & -mz_G u_0 - K_r \\ -N_v & -N_p & mx_G u_0 - N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & WGM_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\alpha & Y_\delta \\ K_\alpha & K_\delta \\ N_\alpha & N_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \delta \end{bmatrix}$$

- Bagaimana bentuk persamaan kanonik dari sistem di atas
- Perhatikan persamaan ruang keadaan tersebut di atas, tentukan penyelesaian untuk mendapat fungsi transfer $\phi(s)$, dengan asumsi pendekatan untuk $\psi = \cos \varphi r \approx r$

1.4 Matrik Transisi Keadaan

Kita dapat menulis jawab persamaan keadaan homogen (1.31) dengan pernyataan sebagai berikut,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) \quad \dots(1.58)$$

dimana $\Phi(t)$ adalah matrik $n \times n$ dan merupakan jawab unik dari,

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t), \quad \text{dan} \quad \Phi(0) = \mathbf{I} \quad \dots (1.59)$$

dan $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \dots (1.60)$

jadi jelas bahwa persamaan (1.59) merupakan jawab dari persamaan (1.55). Dari persamaan (1.28), (1.31) dan (132) diperoleh,

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$$

Perhatikan bahwa $\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \Phi(-t)$

Dari persamaan (1.59) kita lihat bahwa jawab persamaan (1.59) hanya merupakan *transformasi syarat awal*. Oleh karena itu, matrik unik $\Phi(t)$ disebut *matrik transisi keadaan*. Matrik transisi keadaan mengandung semua informasi mengenai gerak bebas sistem yang didefinisikan oleh persamaan (1.59).

Jika *eigenvalue* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dari matrik \mathbf{A} berbeda, maka $\Phi(t)$ akan mengandung eksponensial, $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$. Khususnya jika matrik \mathbf{A} merupakan matrik diagonal, maka

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A}: \text{matrik diagonal})$$

jika ada *eigenvalue* rangkap, misal jika *eigenvalue* dari matrik \mathbf{A} adalah $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_n$ maka disamping akan mengandung $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_4 t}, e^{\lambda_5 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$, juga akan mengandung suku $t e^{\lambda_1 t}$ dan $t^2 e^{\lambda_1 t}$. Berikut beberapa sifat matrik keadaan,

1. $\Phi(0) = e^{A0} = \mathbf{I}$
2. $\Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$ atau $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
3. $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$
4. $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$
5. $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$

Cari juga kebalikan dari matrik transisi keadaan $\Phi(t)$.

Jawab :

Matrik \mathbf{A} sistem tersebut adalah,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

matrik transisi keadaan $\Phi(t)$ dinyatakan oleh,

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Karena $s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$

Kebalikan dari $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ diberikan oleh

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu,

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Dengan mengingat bahwa $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$, maka kita peroleh kebalikan dari matrik transisi keadaan tersebut sebagai berikut,

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} (2e^t - e^{2t}) & (e^t - e^{2t}) \\ (-2e^t + 2e^{2t}) & (-e^t + 2e^{2t}) \end{bmatrix}$$

1.5 Matrik Alih

Konsep *matrik alih* merupakan perluasan dari konsep *fungsi alih*. Terlebih dahulu mari kita perhatikan persamaan ruang keadaan dan persamaan keluaran sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\quad \dots(1.61)$$

dimana, \mathbf{x} = vektor keadaan (n -vektor)
 \mathbf{u} = vektor pengendali (r -vektor)
 \mathbf{y} = vektor keluaran (m -vektor)
 \mathbf{A} = matrik $n \times n$.
 \mathbf{B} = matrik $n \times r$.
 \mathbf{C} = matrik $m \times n$.
 \mathbf{D} = matrik $m \times r$.

Transformasi persamaan (1.61) adalah,

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s)\end{aligned}$$

Dengan mengambil kondisi awal $\mathbf{x}(0)=0$ dan mensubstitusikan ke dalam kedua persamaan tersebut, diperoleh

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

Dengan demikian diperoleh matrik alih sebagai berikut,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad \dots(1.62)$$

Perhatikan bahwa ruas kanan dari persamaan (5.34) melibatkan $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Oleh karena itu $\mathbf{G}(s)$ dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad \dots(1.63)$$

dimana $Q(s)$ adalah polynomial dalam s . Oleh karena itu, $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ sama dengan polynomial karakteristik dari $\mathbf{G}(s)$. Dengan kata lain *eigenvalue* dari \mathbf{A} identik dengan pole-pole dari $\mathbf{G}(s)$.

Contoh Soal 1.10 :

Cari fungsi alih sistem yang ditunjukkan pada Gambar 1.7 di bawah.

Jawab :

Dari gambar dibawah diperoleh persamaan keadaan dan keluaran sebagai berikut,

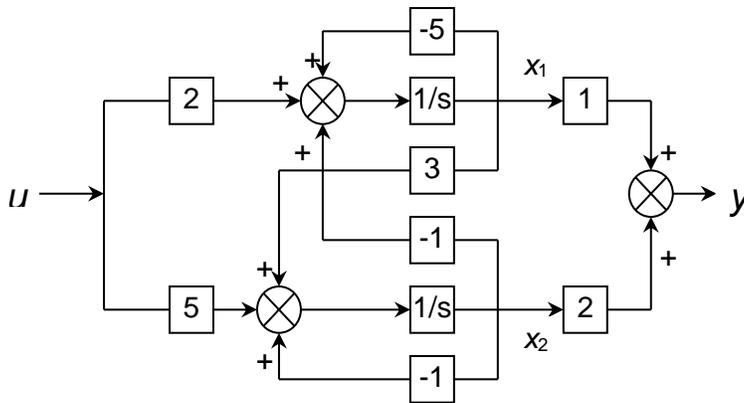
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -5x_1 - x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - x_2 + 5u \\ y &= x_1 + 2x_2\end{aligned}$$

dalam bentuk matrik-vektor, dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Blok diagram dari persamaan ruang keadaan dan keluaran adalah sebagai berikut,



Gambar 1.7 Blok sistem pengendalian untuk contoh soal 1.10

Selanjutnya fungsi alih sistem yang digambarkan di dalam Gambar 1.7 di atas adalah,

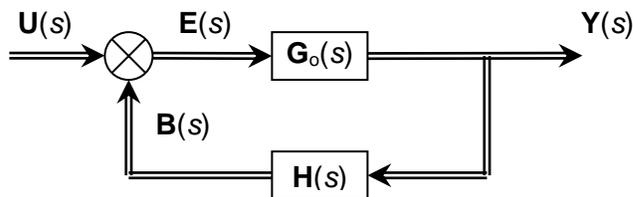
$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \\
&= [1 \quad 2] \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= [1 \quad 2] \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s+4)} & \frac{-1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{3}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{12s + 59}{(s+2)(s+4)}
\end{aligned}$$

1.5.1 Matrik Alih Sistem Lup Tertutup

Sistem multi-masukan-multi-keluaran (MIMO) seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.5. Matrik alih lintasan umpan maju adalah $\mathbf{G}_o(s)$, sedangkan pada lintasan umpan baliknya adalah $\mathbf{H}(s)$. Matrik alih antara vektor sinyal umpan balik $\mathbf{B}(s)$ dan vektor kesalahan $\mathbf{E}(s)$ diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(s) &= \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s) \\
&= \mathbf{H}(s)\mathbf{G}_o(s)\mathbf{E}(s)
\end{aligned}$$

Blok diagram sebuah sistem MIMO ditunjukkan pada Gambar 1.8 di bawah ini.



Gambar 1.8 Diagram blok sistem MIMO.

Matrik alih dari representasi blok diagram Gambar 1.18 di atas yaitu matrik alih antara $\mathbf{B}(s)$ dan $\mathbf{E}(s)$ adalah $\mathbf{H}(s)\mathbf{G}_o(s)$. Matrik alih elemen-elemen yang terhubung seri (*cascade*) merupakan hasil perkalian dari matrik alih masing-masing elemennya. Sedangkan matrik lup tertutup diperoleh hubungan sebagai berikut,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_o(s)[\mathbf{U}(s) - \mathbf{B}(s)] = \mathbf{G}_o(s)[\mathbf{U}(s) - \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s)] \quad \dots (1.64)$$

atau, $[\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_o(s)\mathbf{U}(s)$

Kedua ruas persamaan terakhir dikalikan dengan $[\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}$, dihasilkan

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]^{-1} \mathbf{G}_o(s)\mathbf{U}(s) \quad \dots (1.65)$$

Maka matrik alih lup tertutup diperoleh,

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]^{-1} \mathbf{G}_o(s) \quad \dots(1.66)$$

1.5.2 Non-interaksi dalam Sistem Multi-Input-Multi-Output (MIMO)

Beberapa sistem pengendalian pada proses mempunyai multi-masukan-multi keluaran, dan sering digunakan bahwa perubahan pada satu masukan acuan hanya mempengaruhi satu keluaran. Jika non-interaksi tersebut dapat dicapai, maka akan mempermudah dalam menjaga tiap harga keluaran pada harga konstan yang diinginkan tanpa adanya gangguan-gangguan eksternal.

Perhatikan matrik alih $\mathbf{G}_p(s)$ (matrik $n \times n$) dari suatu *plant* dan dirancang suatu kompensator seri $\mathbf{G}_c(s)$ (matrik $n \times n$) sehingga n masukan dan n keluaran sistem tidak berinteraksi. Jika diinginkan non-interaksi antara n masukan dan n keluaran, maka matrik alih lup tertutup harus merupakan matrik diagonal, atau dinyatakan dalam bentuk berikut

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & 0 & 0 \\ & G_{22}(s) & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad \dots (1.67)$$

Selanjutnya diambil matrik umpan balik $\mathbf{H}(s)$ merupakan matrik satuan. Maka selanjutnya persamaan (1.67) dapat dituliskan kembali sebagai berikut,

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)]^{-1} \mathbf{G}_o(s) \quad \dots (1.68)$$

Dimana,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_p(s)\mathbf{G}_c(s) \quad \dots (1.69)$$

$$[\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)]\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_o(s) \quad \dots (1.70)$$

$$\mathbf{G}_o(s) [\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)] = \mathbf{G}(s) \quad \dots (1.71)$$

Jika kedua ruas persamaan terakhir dikalikan dengan $[\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)]^{-1}$, maka diperoleh persamaan $\mathbf{G}_o(s)$ sebagai berikut:

$$\mathbf{G}_o(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)]^{-1} \quad \dots (1.72)$$

Bentuk $\mathbf{G}(s)$ adalah matrik diagonal, maka $[\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)]$ juga merupakan matrik diagonal. Selanjutnya $\mathbf{G}_o(s)$, hasil kali dua buah matrik diagonal, juga merupakan matrik diagonal. Kondisi yang diharapkan agar tidak terjadi interaksi, harus dibuat agar $\mathbf{G}_o(s)$ merupakan matrik diagonal, dengan syarat bahwa matrik umpan balik $\mathbf{H}(s)$ merupakan matrik satuan.

Contoh Soal 1.11 :

Tinjau sistem seperti Gambar 1.5. Tentukan matrik alih dari kompensator seri tersebut, sedemikian rupa sehingga matrik alih lup tertutup sistem tersebut adalah,

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}$$

Jawab:

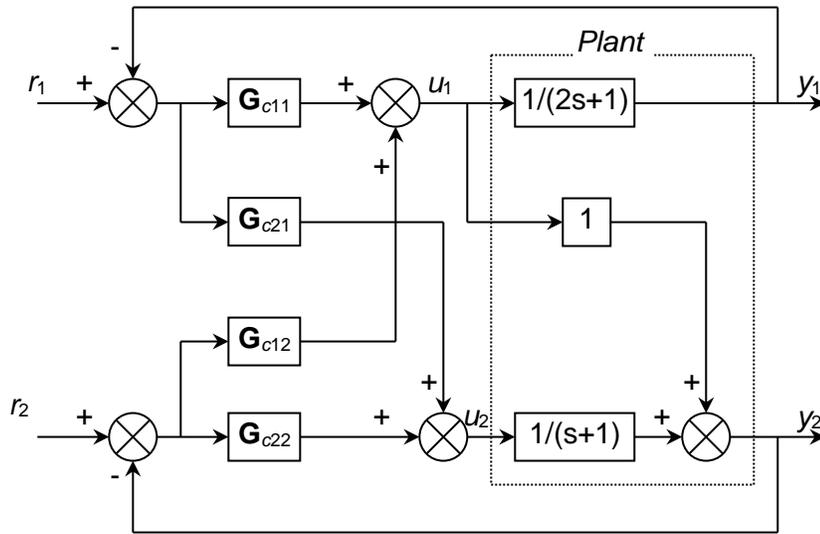
Matrik alih lintasan umpan maju,

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{5s+1}{5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

dan,

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix}$$



Gambar 1.9 Blok diagram sistem multi-masukan-multi-keluaran (MIMO) untuk contoh soal 1.11

selanjutnya diperoleh persamaan keluaran sistem, yaitu

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix}$$

dengan demikian matrik alih kompensator adalah,

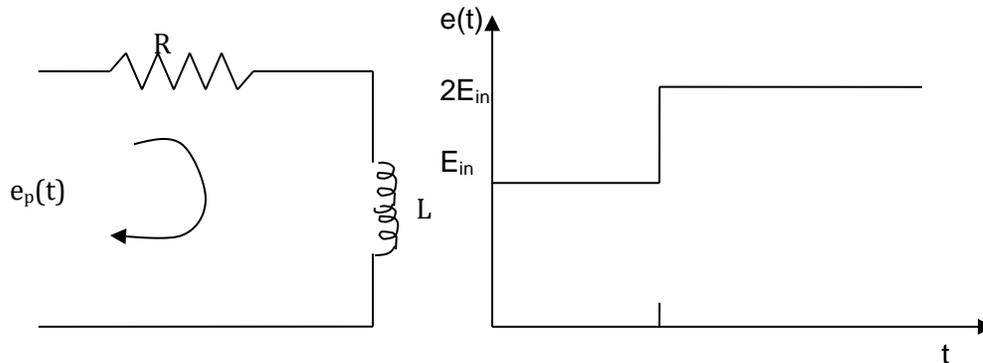
$$\mathbf{G}_c(s) = \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & 0 \\ -\frac{(s+1)(2s+1)}{s} & \frac{s+1}{5s} \end{bmatrix}$$

Persamaan terakhir adalah merupakan matrik alih kompensator seri. Perhatikan bahwa $\mathbf{G}_{c11}(s)$ dan $\mathbf{G}_{c22}(s)$ adalah ***pengendali proporsional-plus-integral*** dan $\mathbf{G}_{c21}(s)$ adalah ***pengendali proporsional-plus-integral-plus-turunan***.

Dalam analisis ini belum ditinjau gangguan eksternal. Dalam pendekatan kali ini, pada umumnya, terjadi penghapusan pada pembilang dan penyebut. Oleh karena itu beberapa *eigenvalue* dari $\mathbf{G}_p(s)\mathbf{G}_c(s)$ akan hilang. Ini berarti bahwa sekalipun pendekatan ini akan memberikan hasil yang diinginkan, yakni non-interaksi pada respon terhadap masukan-masukan acuan tanpa adanya gangguan eksternal, akan tetapi jika sistem diganggu oleh gaya eksternal, maka sistem menjadi tidak terkendali karena setiap gerakan yang ditimbulkan oleh *eigenvalue* yang terhapus tidak dapat dikendalikan.

Contoh Soal 1.12 :

Sebuah jaringan RL yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini, dengan kondisi awal $i(0) = 0$ pada $t = 0$. Dengan tegangan yang diberikan pada jaringan seperti pada gambar bagaimana bentuk persamaan keadaan dari jaringan untuk $t > 0$.



Jawab:

Persamaan differensial untuk jaringan listrik dengan komponen R dan L adalah :

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}e_{in}(t)$$

Persamaan di atas dapat dituliskan dengan :

$$\frac{di(t)}{dt} = -Ai(t) + Be_{in}(t)$$

Matriks transisi dari persamaan di atas adalah :

$$\Phi(t) = e^{-At} = e^{-Rt/L}$$

Pendekatan konvensional dari penyelesaian $i(t)$ untuk $t \geq 0$, yang menyatakan tegangan masukan sebagai:

$$e(t) = E_{in}u_s(t) + E_{in}u_s(t - t_1)$$

Dengan $u_s(t)$ adalah fungsi step / undak satuan. Transformasi Laplace dari $e(t)$ pada persamaan di atas adalah :

$$E_{in}(s) = \frac{E_{in}}{s} (1 + e^{-t_1s})$$

Sehingga persamaan untuk memperoleh variabel state, dengan menyelesaikan persamaan berikut ini,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) = \frac{E_{in}}{Ls(s + R/L)} (1 + e^{-t_1s})$$

Persamaan transisi keadaan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan invers balik transformasi Laplace, sehingga diperoleh arus untuk $t \geq 0$ adalah:

$$i(t) = e^{-Rt/L} i(0) u_s(t) + \frac{E_{in}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) u_s(t) + \frac{E_{in}}{R} (1 - e^{-R(t-t_1)/L}) u_s(t - t_1)$$

Dengan menggunakan transisi keadaan, dapat dibagi periode transisi dalam dua bagian: $t = 0$ sampai $t = t_1$ dan $t = t_1$ sampai $t = \infty$. Pertama, untuk selang waktu $0 \leq t \leq t_1$, masukannya adalah:

$$e(t) = E_{in} u_s(t) \quad 0 \leq t \leq t_1$$

Dan kemudian persamaan penyelesaian untuk variabel keadaan adalah, sebagai berikut:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s) = \frac{E_{in}}{Ls(s + R/L)} = \frac{E_{in}}{Rs[1 + (L/R)s]}$$

Persamaan keadaan untuk selang waktu $0 \leq t \leq t_1$ adalah:

$$i(t) = \left[e^{-Rt/L} i(0) + \frac{E_{in}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \right] u_s(t)$$

Dengan substitusi $t = t_1$ ke dalam persamaan di atas diperoleh:

$$i(t_1) = e^{-Rt_1/L} i(0) + \frac{E_{in}}{R} (1 - e^{-Rt_1/L})$$

Nilai $i(t)$ pada $t = t_1$ digunakan sebagai keadaan awal untuk periode transisi $t_1 \leq t \leq \infty$ berikutnya. Amplitudo masukan untuk selang waktu tersebut adalah $2 E_{in}$. Persamaan transisi keadaan untuk periode transisi kedua adalah:

$$i(t) = e^{-R(t-t_1)/L} i(t_1) + \frac{2E_{in}}{R} (1 - e^{-R(t-t_1)/L}) \quad t \geq t_1$$

Contoh Soal 1.13:

Perhatikan sistem yang dinyatakan dalam persamaan keadaan berikut ini:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan keluaran sistem dengan masukan fungsi step.

Jawab :

Dalam bentuk persamaan matriks dari sistem yang dalam contoh

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad \dots (1.73)$$

Fungsi alih $\mathbf{G}(s)$ adalah matriks yang menghubungkan output $Y(s)$ dengan input $U(s)$, dinyatakan:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \quad \dots (1.74)$$

Bentuk transformasi Laplace dari persamaan keadaan (1.73) dan keluaran sistem (1.74) adalah:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad \dots (1.75)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad \dots (1.76)$$

Bila diasumsikan bahwa $\mathbf{x}(0) = 0$, maka persamaan (1.75) di atas menjadi bentuk persamaan (1.77),

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad \dots (1.77)$$

Dan persamaan keluaran (persamaan 1.76) di atas, menjadi bentuk berikut

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s) \quad \dots (1.78)$$

Dengan matriks fungsi alih dinyatakan dalam bentuk persamaan (1.79)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Pada contoh kasus untuk soal 1.13, fungsi $G(s)$ menjadi:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -6,5 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6,5} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6,5 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6,5} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ s+7,5 & 6s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

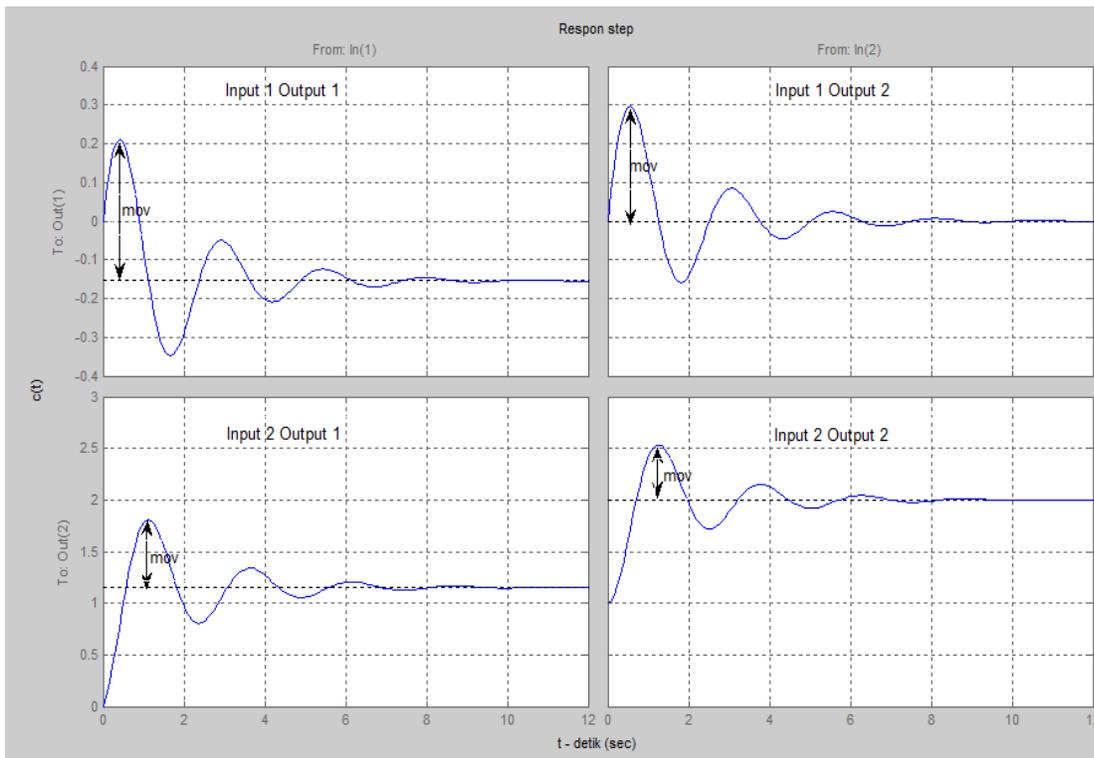
Dan bentuk persamaan keluaran dari sistem dinyatakan dalam bentuk persamaan di bawah:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s^2 + s + 6,5} & \frac{s}{s^2 + s + 6,5} \\ \frac{s+7,5}{s^2 + s + 6,5} & \frac{6,5}{s^2 + s + 6,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Keluaran dari sistem merupakan transformasi Laplace balik dari bentuk persamaan di atas.

Dengan menggunakan Program MATLAB, dapat diperoleh keluaran sistem saat masukan adalah fungsi step / respon step. Program dapat dituliskan seperti terlihat pada tabel di bawah dan plot hasil keluaran MATLAB terlihat pada Gambar 1.10.

```
A = [-1 -1; 6.5 0];
B = [1 1; 1 0];
C = [1 0; 0 1];
D = [0 0; 0 1];
t = 0:0.05:20,
step(A,B,C,D);
xlabel('t - detik'); ylabel('c(t)'), title('Respon step');grid,
```



Gambar 1.10 Keluaran program untuk contoh soal 1.13

Respon ramp

Sebuah sistem yang dinyatakan dalam bentuk persamaan keadaan berikut :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

... (1.79)

Dimana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = 0$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0], \mathbf{D} = [0]$$

Saat kondisi awal adalah nol, respons unit ramp merupakan integral dari unit step. Atau dinyatakan sebagai :

$$z = \int_0^t y dt$$

$$\dot{z} = y = x_1$$

Didefinisikan bahwa :

$$z = x_3$$

Maka $\dot{x}_3 = x_1$, dan dengan menggunakan persamaan keadaan awal dapat dibentuk kembali persamaan keadaan :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$z = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan kembali menjadi bentuk persamaan di bawah ini

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{AAx} + \mathbf{BBu}$$

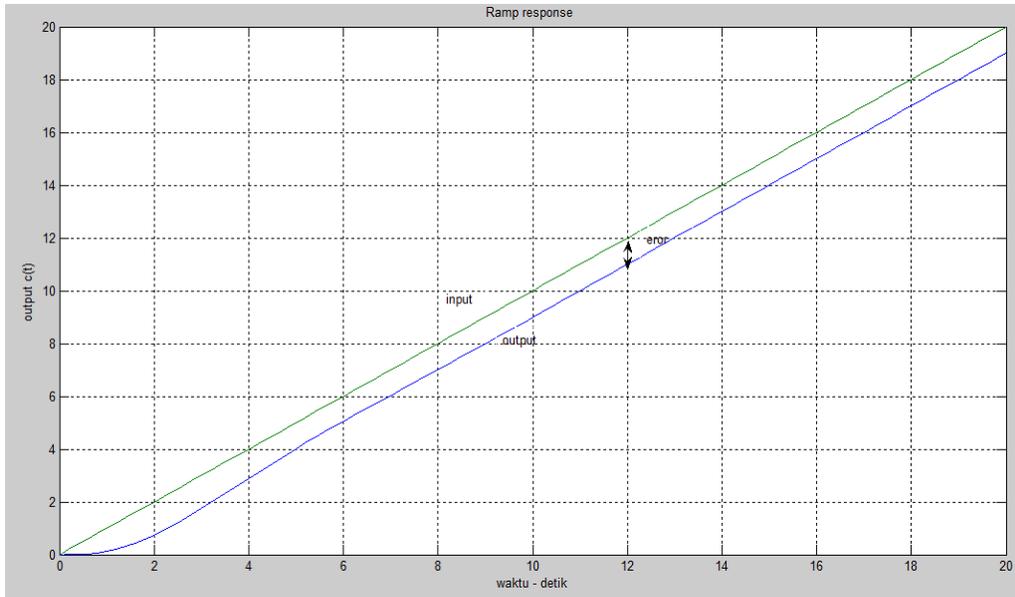
$$\mathbf{y} = \mathbf{CBx} + \mathbf{DDu} \quad \dots (1.80)$$

Dengan:

$$\mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & 0 \\ \mathbf{C} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{CC} = [0 \ 0 \ 1], \mathbf{DD} = [0]$$

Dengan menggunakan bantuan Program MATLAB untuk memperoleh nilai variabel keluaran dengan masukan fungsi ramp:



Gambar 1.11 Respon ramp untuk contoh soal 1.13

1.6 Keterkendalian (*Controllability*)

Suatu sistem dikatakan dapat dikendalikan (*controllable*) pada saat t_0 , jika vektor pengendalian dapat memindahkan sistem dari keadaan mula-mula sebarang $x(t_0)$ ke keadaan yang lain dalam suatu interval waktu yang berhingga. Suatu sistem dikatakan dapat teramati (*observable*) pada saat t_0 , jika sistem dalam keadaan $x(t_0)$ dapat ditentukan keadaannya dari pengamatan terhadap keluarannya dalam suatu interval waktu yang berhingga.

Konsep *controllability* dan *observability* diperkenalkan oleh Kalman. Konsep tersebut digunakan untuk merancang sistem pengendalian dengan menggunakan metode ruang keadaan. Dalam kenyataan konsep *controllability* dan *observability* dapat memberikan penyelesaian yang lengkap terhadap masalah-masalah yang timbul dalam perancangan sistem pengendalian. Meskipun kebanyakan sistem fisik adalah *controllable* dan *observable*, namun model-model matematika yang berkaitan tidak memiliki sifat-sifat *controllability* dan *observability*. Kemudian diperlukan pengetahuan tentang kondisi dimana sistem adalah *controllable* dan *observable*.

Pada beberapa sub-bab berikut akan dibicarakan tentang vektor bebas linier, keterkendalian sempurna dari sistem kontinu, bentuk lain syarat keterkendalian keadaan secara sempurna, syarat keterkendalian keadaan secara sempurna pada bidang-s, keterkendalian keluaran.

1.6.1 Vektor Bebas Linier

Vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ dikatakan bebas linier jika,

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \quad \dots (1.81)$$

dimana c_1, c_2, \dots, c_n adalah konstan, mempunyai arti bahwa $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Sebaliknya, vektor-vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ disebut *bergantung linier* jika dan hanya jika \mathbf{x}_i dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari \mathbf{x}_j ($j=1, 2, \dots, n; j \neq i$), atau

$$\mathbf{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j \mathbf{x}_j$$

untuk suatu himpunan konstanta c_j . Ini berarti bahwa \mathbf{x}_i dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain dalam himpunan tersebut, \mathbf{x}_i *bergantung linier* padanya atau bukan merupakan anggota himpunan yang bebas.

Contoh Soal 5.14 :

(1). Vektor-vektor berikut : $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

adalah *bergantung linier* karena : $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$

(2). Vektor-vektor berikut : $y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

adalah *bebas linier*, karena : $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = \mathbf{0}$

hanya dipenuhi jika $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Perhatikan jika suatu matrik $n \times n$ adalah *nonsingular* (yang berarti bahwa matrik tersebut mempunyai *rank-n* atau determinannya tidak nol), maka n vektor kolom (baris)-nya *bebas linier*. Jika matrik $n \times n$ tersebut *singular* (yang berarti bahwa rank-nya kurang dari n atau determinan nol), maka n vektor kolom (baris)-nya *bebas linier*. Untuk menunjukkannya, perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{Singular}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{Nonsingular}$$

1.6.2 Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna dari Sistem Kontinu

Tinjau sistem kontinu dalam bentuk persamaan keadaan non-homogen sebagai berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \dots(1.82)$$

dimana :

\mathbf{x} = vektor keadaan (n -dimensi).

\mathbf{u} = sinyal pengendalian.

\mathbf{A} = matrik $n \times n$.

\mathbf{B} = matrik $n \times 1$.

Sistem yang dinyatakan oleh persamaan (1.82) disebut terkendali pada saat $t=t_0$ jika kita dapat menentukan sinyal pengendalian tanpa kendala yang akan memindahkan suatu keadaan awal ke keadaan akhir sembarang dalam selang waktu terhingga $t_0 \leq t \leq t_1$. Jika setiap keadaan sistem terkendali, maka sistem dikatakan terkendali sempurna.

Sekarang kita akan menurunkan syarat keterkendalian keadaan secara sempurna. Tanpa mengurangi sifat umumnya, dapat kita anggap bahwa keadaan akhirnya adalah titik asal ruang keadaan sedangkan waktu awalnya adalah nol, atau $t_0=0$. Jawab persamaan (1.82) adalah,

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad \dots (1.83)$$

dengan menggunakan definisi keterkendalian sempurna yang baru saja diberikan, kita peroleh,

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{At_1} \mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

atau

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad \dots(1.84)$$

perhatikan bahwa $e^{-A\tau}$ dapat dituliskan,

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) \mathbf{A}^k \quad \dots(1.85)$$

dengan mensubstitusi persamaan (1.85) ke dalam persamaan (1.84) diperoleh,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \beta_k \\ &= -[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots(1.86)$$

Jika keadaan sistem terkendali sempurna, maka persamaan (1.86) harus dipenuhi untuk setiap keadaan awal $\mathbf{x}(0)$. Ini memerlukan syarat awal bahwa rank dari matrik $n \times n$,

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$$

Harus sama dengan n .

Dari analisis ini kita dapat menyatakan syarat keterkendalian keadaan secara sempurna sebagai berikut :

Keadaan sistem yang dinyatakan oleh persamaan (1.82) terkendali sempurna *jika dan hanya jika* vektor $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}$ bebas linier, atau matrik $n \times n$,

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$$

Mempunyai *rank-n*.

Hasil yang baru saja diperoleh dapat diperluas untuk kasus vektor pengendalian \mathbf{u} r -dimensi, maka dapat dibuktikan bahwa syarat keterkendalian keadaan secara sempurna adalah bahwa matrik berikut $n \times nr$ berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

Dimana \mathbf{u} adalah vektor r -dimensi, maka dapat dibuktikan bahwa syarat keterkendalian keadaan secara sempurna adalah matrik $n \times nr$ berikut,

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$$

harus mempunyai *rank-n*, atau mengandung n -vektor kolom *bebas linier*.

Contoh Soal 1.15 :

Tinjau sistem yang dinyatakan dengan persamaan keadaan sebagai berikut,

$$(1). \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\text{karena } [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \textit{singular}$$

maka sistem tidak terkendali secara sempurna.

$$(2). \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$\text{karena } [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \textit{nonsingular}$$

maka sistem terkendali secara sempurna.

1.6.3 Bentuk Lain Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna

Tinjau sistem kontinu dalam bentuk persamaan keadaan non-homogen sebagai berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \dots(1.87)$$

dimana :

\mathbf{x} = vektor keadaan (n -dimensi).

\mathbf{u} = sinyal pengendalian (r -dimensi).

\mathbf{A} = matrik $n \times n$.

\mathbf{B} = matrik $n \times r$.

Jika *eigenvektor* dari matrik \mathbf{A} tidak ada yang rangkap, maka kita dapat mencari suatu matrik transformasi \mathbf{P} sedemikian rupa sehingga,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \dots (1.88)$$

Perhatikan bahwa jika *eigenvalue* dari \mathbf{A} tidak ada yang rangkap, maka *eigenvektor* dari \mathbf{A} tidak ada yang rangkap, akan tetapi hal ini tidak berlaku sebaliknya. Sebagai contoh, suatu matrik simetrik nyata $n \times n$ yang mempunyai *eigenvalue* rangkap, mempunyai n -*eigenvektor* yang

berbeda. Perhatikan juga bahwa setiap kolom matrik \mathbf{P} merupakan *eigenvektor* dari \mathbf{A} yang berkaitan dengan λ_i ($i=1,2,\dots,n$).

Marilah kita definisikan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{Pz} \quad \dots(1.89)$$

dengan substitusi persamaan (1.88) kedalam persamaan (5.43), diperoleh

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Pz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad \dots(1.90)$$

dengan mendefinisikan bentuk persamaan \mathbf{P} berikut ini

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{F} = (f_{ij}) \quad \dots (1.91)$$

kita dapat menuliskan kembali persamaan (1.89) sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \dots + f_{1r}u_r \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \dots + f_{2r}u_r \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n + f_{n1}u_1 + f_{n2}u_2 + \dots + f_{nr}u_r \end{aligned} \quad \dots (1.92)$$

Jika pada matrik \mathbf{F} $n \times r$ terdapat suatu baris yang semua elemennya berharga nol, maka vektor keadaannya tidak dapat dikendalikan dengan sinyal pengendalian u_i . Oleh karena itu, syarat keterkendalian keadaan secara sempurna adalah bahwa untuk *eigenvektor* dari matrik \mathbf{A} yang berbeda, keadaan sistem terkendali sempurna jika dan hanya jika tidak ada baris dari matrik $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ yang semua elemennya berharga nol. Penting untuk diperhatikan bahwa untuk menerapkan syarat keterkendalian keadaan secara sempurna ini kita harus mendapatkan matrik $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ pada persamaan (1.90) dalam bentuk diagonal.

Jika ada *eigenvektor* dari matrik \mathbf{A} yang sama, maka kita tidak mungkin mendapatkan bentuk matrik diagonal. Pada kasus ini dapat mentransformasikan matrik \mathbf{A} ke dalam bentuk kanonik Jordan. Sebagai contoh, jika \mathbf{A} mempunyai *eigenvalue* $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \dots, \lambda_n$ dan mempunyai $(n-3)$ *eigenvektor* yang berbeda, maka bentuk kanonik Jordan dari matrik \mathbf{A} adalah,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & \lambda_4 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_4 & & \\ \hline & & & & & \lambda_6 & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \ddots \\ 0 & 0 & & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \dots(1.93)$$

Submetrik 3x3 dan 2x2, pada diagonal utama disebut *blok Jordan*.

Misal kita dapat menentukan matrik transformasi \mathbf{S} sedemikian rupa sehingga,

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{J} \quad \dots (1.94)$$

Jika kita definisikan vektor keadaan baru \mathbf{z} dengan

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{z} \quad \dots(1.95)$$

Maka dengan mensubstitusikan persamaan (1.95) kita peroleh,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{z} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad \dots(1.96)$$

syarat keterkendalian keadaan secara sempurna dari sistem yang dinyatakan oleh persamaan (1.96) selanjutnya dapat dinyatakan sebagai berikut,

Keadaan sistem *terkendali sempurna* jika dan hanya jika :

- 1). Tidak ada dua blok Jordan pada matrik \mathbf{J} yang dinyatakan oleh persamaan (1.93), dengan *eigenvalue* yang sama.
- 2). Elemen-elemen dari suatu baris matrik $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$ yang berkaitan dengan baris terakhir blok Jordan tidak seluruhnya berharga nol.
- 3). Elemen-elemen setiap baris matrik $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$, yang berkaitan dengan *eigenvalue* yang berbeda tidak seluruhnya berharga nol.

Contoh Soal 1.16 :

1). Keadaan sistem berikut adalah **terkendali sempurna** :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} [u] \end{aligned}$$

Perhatikan di dalam matriks sistem di atas, nilai determinan menunjukkan **tidak bernilai 0**, dan masing-masing matrik mempunyai rank berturut-turut adalah 2; 3; dan 5.

2). Keadaan sistem berikut adalah **tidak terkendali sempurna**:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \end{aligned}$$

Periksalah persamaan keadaan sistem di atas ini, yang menunjukkan bahwa sistem tidak terkendali sempurna.

1.6.4 Syarat Keterkendalian Keadaan Secara Sempurna Pada Bidang-s

Syarat keterkendalian keadaan secara sempurna, dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi alih atau matrik alih. Syarat perlu dan syarat cukup keterkendalian keadaan secara sempurna adalah bahwa tidak terjadi penghapusan pada fungsi alih atau matrik alih. Jika terjadi penghapusan, maka sistem tidak dapat dikendalikan pada mode yang dihapuskan.

Contoh Soal 1.17:

Tinjau fungsi alih berikut,

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s + 2,5}{(s + 2,5)(s - 1)}$$

Periksalah sifat keterkendalian sistem dari bentuk fungsi transfer di atas.

Jawab:

Jika bahwa terjadi penghapusan faktor $(s+2,5)$ pada pembilang dan penyebut fungsi alih ini. (jadi kita kehilangan satu derajat kebebasan). Karena penghapusan ini, maka keadaan sistem tidak terkendali sempurna. Kesimpulan yang sama tentu saja dapat diperoleh dengan menulis fungsi alih ini dalam bentuk persamaan keadaan. Penyajian ruang keadaan sistem ini adalah,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2,5 & -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

Karena berdasarkan bentuk matrik berikut ini,

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nilai rank dari matrik $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]$ adalah satu. Dengan demikian kita peroleh kesimpulan yang sama, **keadaan sistem tidak terkendali sempurna.**

1.6.5 Keterkendalian Keluaran

Dalam sistem pengendalian yang praktis, mungkin kita lebih memilih mengontrol keluaran sistem daripada mengontrol keadaan sistem. Keterkendalian keadaan sistem secara sempurna adalah tidak perlu dan tidak cukup untuk mengontrol keluaran sistem. Oleh karena itu didefinisikan secara terpisah, keterkendalian keluaran sistem secara sempurna.

Tinjau sistem yang dinyatakan dengan persamaan berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \dots(1.97)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \dots(1.98)$$

dimana,

- \mathbf{x} = vektor keadaan (vektor n -dimensi).
- \mathbf{u} = vektor pengendalian (vektor r -dimensi).
- \mathbf{y} = vektor keluaran (vektor m -dimensi)
- \mathbf{A} = matrik $n \times n$.
- \mathbf{B} = matrik $n \times r$.
- \mathbf{C} = matrik $m \times n$.
- \mathbf{D} = matrik $m \times r$.

Keluaran sistem yang dinyatakan oleh persamaan (5.48) dan (5.49) disebut terkendali sempurna jika kita dapat menentukan vektor pengendalian tanpa kendala $\mathbf{u}(t)$ yang akan memindahkan setiap keluaran awal $\mathbf{y}(t_0)$ ke suatu keluaran akhir $\mathbf{y}(t_1)$ dalam selang waktu yang terhingga $t_0 \leq t \leq t_1$. Syarat keterkendalian keluaran secara sempurna adalah sebagai berikut,

Sistem yang dinyatakan oleh persamaan (5.48) dan (5.49), keluarannya terkendali sempurna jika dan hanya jika matrik $m \times (n+1)r$,

$$\left[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \mid \mathbf{D} \right]$$

mempunyai *rank*- m .

1.7 Keteramatan (*Observability*)

Pada sub-bab ini akan dibahas keteramatan sistem linier. Tinjau sistem tanpa penggerak yang dinyatakan oleh persamaan berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \dots(1.99)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \dots(1.100)$$

dimana,

- \mathbf{x} = vektor keadaan (vektor n -dimensi).
- \mathbf{y} = vektor keluaran (vektor m -dimensi)
- \mathbf{A} = matrik $n \times n$.
- \mathbf{C} = matrik $m \times n$.

Sistem dikatakan teramati sempurna jika setiap keadaan awal $\mathbf{x}(0)$ dapat ditentukan dari pengamatan $\mathbf{y}(t)$ selama selang waktu terhingga. Oleh karena itu, sistem teramati sempurna jika setiap transisi keadaan akhirnya mempengaruhi setiap elemen vektor keluaran. Konsep keteramatan berguna dalam penyelesaian persoalan rekonstruksi variabel keadaan yang tidak terukur, dari variabel yang terukur dalam selang waktu yang seminimum mungkin. Perhatikan bahwa dalam praktek, kesukaran yang dijumpai oleh sistem pengendalian optimal adalah adanya beberapa variabel keadaan yang tidak dapat diukur secara langsung. Selanjutnya kita perlu mengestimasi variabel keadaan yang tidak terukur untuk menentukan sinyal pengendalian optimal.

Alasan peninjauan sistem tanpa penggerak adalah sebagai berikut, jika sistem dinyatakan oleh persamaan,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad \dots (1.101)$$

maka,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \dots (1.102)$$

dan

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \dots (1.103)$$

Karena matrik \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} diketahui dan $\mathbf{u}(t)$ juga diketahui, maka suku integrasi pada ruas kanan persamaan yang terakhir merupakan besaran yang diketahui. Oleh karena itu, dapat dikurangkan pada harga $\mathbf{y}(t)$. Dengan demikian, untuk penyelidikan *syarat perlu* dan *syarat cukup* dari keteramatan sempurna, kita perlu meninjau sistem yang dinyatakan oleh persamaan (1.102) dan (1.103).

1.7.1 Keteramatan Sistem Kontinyu

Dari persamaan (1.102) dan (1.103) vektor keluaran sistem adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \quad \dots (1.104)$$

dengan mengingat bahwa,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k \quad \dots (1.105)$$

diperoleh,

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \quad \dots (1.106)$$

Jika sistem teramati sempurna, maka untuk keluaran $\mathbf{y}(t)$ pada selang waktu $t_0 \leq t \leq t_1$, $\mathbf{x}(0)$ ditentukan secara unik dari persamaan (5.52). Dapat ditunjukkan bahwa ini memerlukan

persyaratan rank dari matrik $n \times n$ $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$ harus sama dengan n .

Sistem yang dinyatakan dengan persamaan (1.101) dan (1.102) teramati sempurna jika dan hanya jika matrik $n \times n$,

$$\left[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* \mid \dots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1} \mathbf{C}^* \right]$$

mempunyai *rank-n*, atau mempunyai n -vektor kolom bebas linier.

Contoh Soal 1.18

Tinjau sistem yang dinyatakan dengan persamaan keadaan sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Apakah sistem yang dinyatakan dalam bentuk persamaan di atas ini terkendali dan teramati ?

Jawab:

Karena rank dari matrik,

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{A} \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

adalah dua, maka keadaan sistem **terkendali sempurna**.

Untuk keterkendalian keluaran, marilah kita tentukan rank dari matrik berikut,

$$[\mathbf{C} \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B}] = [0 \quad 1]$$

maka rank dari matrik ini adalah satu. Oleh karena itu keluaran sistem terkendali sempurna.

Untuk menguji syarat keteramatan, periksa rank dari matrik berikut,

$$[\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka *rank* dari matrik tersebut adalah dua, dengan demikian sistem *teramati sempurna*.

1.7.2 Syarat Keteramatan Sempurna pada Bidang-s

Syarat keteramatan sempurna juga dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi alih atau matrik alih. Syarat perlu dan syarat cukup dari keteramatan sempurna adalah bahwa tidak ada penghapusan pada fungsi alih atau matrik alih. Jika terjadi penghapusan, maka mode yang terhapus tidak dapat diamati pada keluarannya.

Contoh Soal 1.19:

Tunjukkan bahwa sistem berikut tidak teramati secara sempurna,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

dimana

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [4 \ 5 \ 1]$$

Perhatikan bahwa fungsi pengendalian u tidak mempengaruhi keteramatan sempurna dari sistem. Untuk menguji keteramatan sempurna, kita dapat mengambil $u=0$. Untuk sistem ini, kita peroleh,

$$[\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid (\mathbf{A}')^2\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

perhatikan bahwa,

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

Oleh karena itu *rank* dari matrik $[\mathbf{C}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid (\mathbf{A}')^2\mathbf{C}']$ adalah kurang dari tiga. Dengan demikian, sistem di atas tidak teramati secara sempurna.

Sebenarnya pada sistem di atas terjadi penghapusan pada fungsi alih, sebagai berikut,

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

dan fungsi antara $Y(s)$ dan $X_1(s)$ adalah,

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = (s+1)(s+4)$$

Dengan demikian fungsi alih antara keluaran $Y(s)$ dan masukan $U(s)$ adalah

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Jelas bahwa kedua faktor $(s+1)$ di atas saling menghapuskan. Ini berarti bahwa ada keadaan awal tidak nol $\mathbf{x}(0)$ yang tidak dapat ditentukan dari pengukuran $y(t)$.

Fungsi alih tidak mengalami penghapusan jika dan hanya jika sistem terkendali sempurna dan teramati sempurna. Ini berarti bahwa fungsi alih yang mengalami penghapusan tidak mengandung semua informasi yang mencirikan sistem dinamik.

1.7.3 Bentuk Lain Syarat Keteramatan Sempurna

Tinjau sistem yang dinyatakan oleh persamaan (1.89) dan (1.90). Misal matrik transformasi \mathbf{P} menstransformasikan \mathbf{A} menjadi matrik diagonal, atau

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \quad \dots (1.107)$$

dimana \mathbf{D} adalah matrik diagonal.

Didefinisikan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \quad \dots (1.108)$$

selanjutnya persamaan (1.107) dan (1.108) dapat dituliskan,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z} \quad \dots (1.109)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} \quad \dots (1.110)$$

dengan demikian persamaan (1.110) menjadi

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0) \quad \dots (1.111)$$

atau,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{CP} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{z}(0) = \mathbf{CP} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} z_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_n(0) \end{bmatrix}$$

sistem teramati sempurna jika tidak ada kolom dari matrik $m \times n$ \mathbf{CP} yang semua elemennya berharga nol. Hal ini dikarenakan jika kolom ke- i dari matrik \mathbf{CP} semua elemennya berharga nol, maka variabel keadaan $\mathbf{z}_i(0)$ tidak terlihat pada persamaan keluaran sehingga tidak dapat ditentukan dari pengamatan $\mathbf{y}(t)$. Dengan demikian $\mathbf{x}(0)$ yang direlasikan dengan $\mathbf{z}(0)$ oleh matrik nonsingular \mathbf{P} , tidak dapat ditentukan. (Ingat bahwa pengujian ini hanya dapat diterapkan jika matrik $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ berbentuk diagonal).

Jika matrik \mathbf{A} tidak dapat ditransformasikan menjadi matrik diagonal, maka dengan menggunakan matrik transformasi yang sesuai \mathbf{S} , kita dapat mentrans-formasikan \mathbf{A} menjadi bentuk Kanonik Jordan, atau

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}=\mathbf{J}$$

Dimana \mathbf{J} adalah bentuk *Kanonik Jordan*.

Sistem disebut teramati sempurna jika :

- (1). Tidak ada dua blok Jordan dalam \mathbf{J} dengan *eigenvalue* yang sama.
- (2). Tidak adal kolom dari \mathbf{CS} yang berkaitan dengan baris pertama tiap blok Jordan, terdiri dari elemen-elemen nol.
- (3). Tidak ada kolom dari \mathbf{CS} yang berkaitan dengan *eigenvalue* yang berbeda, terdiri dari elemen-elemen nol.

(1). Sistem berikut adalah teramati sempurna,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & -3 & 1 \\ & & & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(2). Sistem berikut adalah *tidak teramati sempurna*,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & -3 & 1 \\ & & & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

1.8 Prinsip Kerangkapan (*duality*)

Selanjutnya kita akan membahas hubungan antara keterkendalian dan keteramatan. Kita akan mengenalkan prinsip kerangkapan, yang dikembangkan oleh **Kalman**, untuk memperjelas analogi yang terlihat antara keterkendalian dan keteramatan.

Tinjau sistem \mathbf{S}_1 yang dinyatakan oleh persamaan berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \dots (1.112)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad \dots (1.113)$$

dimana,

\mathbf{x} = vektor keadaan (vektor n -dimensi).

\mathbf{u} = vektor pengendalian (vektor r -dimensi).

\mathbf{y} = vektor keluaran (vektor m -dimensi)

\mathbf{A} = matrik $n \times n$.

\mathbf{B} = matrik $n \times r$.

\mathbf{C} = matrik $m \times n$.

Dan sistem rangkapnya \mathbf{S}_2 yang didefinisikan dengan persamaan berikut,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^* \mathbf{z} + \mathbf{C}^* \mathbf{v} \quad \dots (1.114)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}^* \mathbf{x} \quad \dots (1.115)$$

dimana,

\mathbf{z} = vektor keadaan (vektor n -dimensi).

\mathbf{v} = vektor pengendalian (vektor m -dimensi).

\mathbf{n} = vektor keluaran (vektor r -dimensi)

\mathbf{A}^* = transpose konjugasi matrik \mathbf{A} .

\mathbf{B}^* = transpose konjugasi matrik \mathbf{B} .

\mathbf{C}^* = transpose konjugasi matrik \mathbf{C} .

Prinsip kerangkapan menyatakan bahwa sistem \mathbf{S}_1 terkendali keadaannya (teramati) secara sempurna jika dan hanya jika sistem \mathbf{S}_2 teramati (terkendali keadaannya) secara sempurna.

Untuk memeriksa prinsip ini, marilah kita tulis syarat perlu dan syarat cukup keterkendalian keadaan secara sempurna dan keteramatan sempurna dari sistem \mathbf{S}_1 dan \mathbf{S}_2 .

Untuk sistem \mathbf{S}_1 :

- 1). Syarat perlu dan syarat cukup keterkendalian keadaan secara sempurna adalah bahwa *rank* dari matrik $n \times r$ $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$ adalah n .
- 2). Syarat perlu dan syarat cukup keteramatan sempurna adalah bahwa *rank* dari matrik $n \times m$ $[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* \mid \dots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1} \mathbf{C}^*]$ adalah n .

Untuk sistem \mathbf{S}_2 :

- 1). Syarat perlu dan syarat cukup keterkendalian keadaan secara sempurna adalah bahwa *rank* dari matrik $n \times m$ $[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* \mid \dots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1} \mathbf{C}^*]$ adalah n .
- 2). Syarat perlu dan syarat cukup keteramatan sempurna adalah bahwa *rank* dari matrik $n \times r$ $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$ adalah n .

Dengan membandingkan syarat-syarat diatas, terlihat bahwa prinsip *duality* adalah benar. Prinsip ini juga dapat diterapkan pada sistem diskrit. Dengan menggunakan prinsip ini, keteramatan suatu sistem dapat diperiksa dengan menguji keterkendalian keadaan sistem *dual*-nya.

1.9 Analisa Kestabilan Lyapunov

Suatu sistem yang dikendalikan, baik dengan strategi pengendalian konvensional (P, I, D, PI, PD, PID) maupun dengan strategi pengendalian yang lain, memerlukan kondisi kestabilan. Kondisi kestabilan dapat dilihat dari hasil respon waktu (performansi dalam ranah waktu), maupun respon dalam ranah frekuensi. Untuk sistem linier dengan parameter konstan dapat digunakan analisa kestabilan menggunakan kriteria Nyquist, maupun Routh, dsb.

Sebuah sistem non linier dan atau sistem parameter berubah dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan keadaan (*state space*). Analisa kestabilannya dapat dilakukan dengan metode kedua Lyapunov (Metode langsung Lyapunov) berdasarkan bentuk persamaan keadaannya.

Sistem

Beberapa definisi kestabilan yang berkaitan dengan teorema Lyapunov, bisa ditinjau berdasarkan suatu **sistem** yang didefinisikan sebagai :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad \dots (1.116)$$

Dengan \mathbf{x} : vektor keadaan (n-vektor), $f(\mathbf{x}, t)$ adalah n – vektor dengan komponen adalah fungsi : x_1, x_2, \dots, x_n dan t . Persamaan (1.116) mempunyai penyelesaian yang unik, dengan tergantung pada kondisi awal. Penyelesaian persamaan (1.116) dinyatakan sebagai :

$$\phi(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \dots (1.117)$$

Kedaaan Kesetimbangan

Jika sistem yang dinyatakan pada persamaan (1.117), berada pada kondisi kesteimbangan bila persamaan (1.117) berada pada keadaan \mathbf{x}_e dengan :

$$f(\mathbf{x}_e, t) = 0 \text{ untuk semua } t \quad \dots (1.118)$$

Dikatakan bahwa suatu sistem dalam keadaan kestimbangan, jika sistem ini linier dan tidak berubah terhadap waktu. Jika $f(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Ax}$, maka terdapat hanya satu keadaan setimbang pada saat \mathbf{A} adalah nonsingular. Jika \mathbf{A} singular maka akan didapat kondisi kesetimbangan yang tak berhingga.

Kestabilan dalam arti Lyapunov

Untuk mempermudah dalam memahami tentang kestabilan berdasarkan kriteria Lyapunov, dapat diandaikan jika sebuah bola dengan jari – jari k terhadap kondisi kesteimbanga x_e ,

$$\|x - x_e\| \leq k \quad \dots (1.119)$$

dengan $\|x - x_e\|$ adalah norma Euclidian,

$$\|x - x_e\| = \left[(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2 \right]^{1/2} \quad \dots (1.120)$$

Misalkan $S(\epsilon)$ terdiri atas semua titik, sedemikian hingga:

$$\|x - x_e\| \leq \delta \quad \dots (1.121)$$

Dan bila juga $S(\epsilon)$ teridi dari titik sedemikian hingga :

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon \text{ untuk semua } t \geq t_0. \quad \dots (1.122)$$

Keadaan kesetimbangan x_e dari sistem yang dinyatakan pada persamaan (1.116) disebut stabil Lyapunov jika untuk setiap $S(\epsilon)$, ada $S(\delta)$ sedemikian rupa sehingga trayektori dengan titik awal didalam $S(\delta)$ tidak meninggalkan $S(\epsilon)$ dengan membesarnya waktu t menuju tak terhingga. Bilangan real δ tergantung pada ϵ dan pada umumnya juga bergantung pada t_0 , maka keadaan kesetimbangan tersebut disebut stabil uniform.

Kestabilan Asimtotik

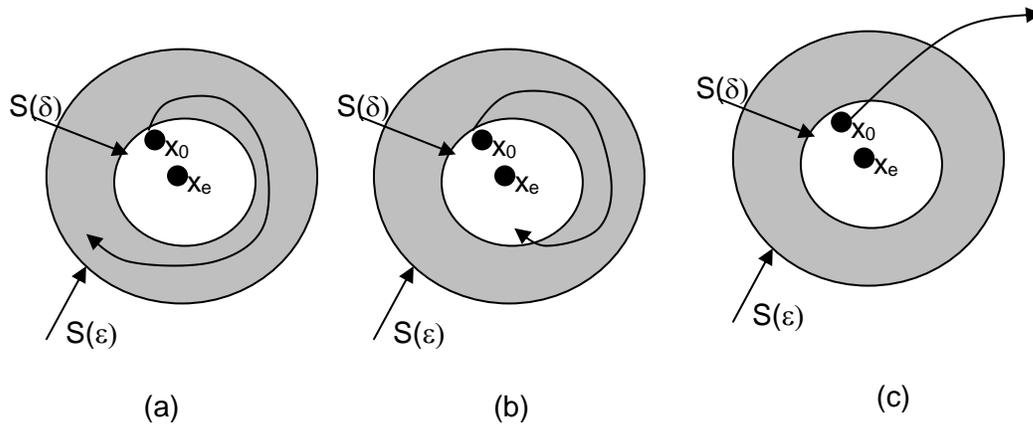
Keadaan kesetimbangan x_e dari sistem yang dinyatakan oleh $f(x_e, t) = 0$ untuk sembarang t disebut stabil asimptotik jika keadaan tersebut stabil Lyapunov dan setiap kondisi dengan titik awal didalam $S(\delta)$ tanpa meninggalkan $S(\epsilon)$, konvergen ke x_e dengan membesarnya t menuju tak berhingga.

Kestabilan Asimptotik Global

Jika keadaan asimptotik berlaku untuk semua keadaan (semua titik dalam ruang keadaan) titik awal trayektori, maka keadaan kesetimbangan tersebut stabil asimptotik global. Jadi keadaan kesetimbangan x_e dari sistem yang dinyatakan pada persamaan (1.116) disebut stabil asimptotik

global jika keadaan setimbang tersebut stabil, dan jika setiap jawab konvergen ke x_e dengan membesarnya waktu t menuju tak hingga. Jadi syarat yang perlu untuk kestabilan asimptotik global adalah bahwa hanya ada satu keadaan kesetimbangan dalam seluruh keadaan.

Penyajian diagram kestabilan, kestabilan garis lurus dan ketidakstabilan.



Gambar 1.12 (a) Kondisi yang menggambarkan pergerakan peluru setimbang stabil (b) Keadaan setimbang secara garis lurus (c) Kondisi tidak stabil.

Terlihat pada gambar 1.12 di atas, menunjukkan lintasan peluru dari kondisi awal x_0 dengan batas keadaan awal $S(\delta)$, pada gambar (a) lintasan peluru menuju ke daerah kesetimbangan dengan batas $S(\epsilon)$ pergerakan inilah yang dikatakan sebagai kondisi setimbang stabil sesuai hukum Lyapunov. Pada gambar (b) pergerakan peluru dari titik awal x_0 pada daerah batas keadaan awal $S(\delta)$ menuju ke daerah ini kembali, pergerakan ini dikatakan sebagai kondisi setimbang secara garis lurus. Sedangkan pada gambar 1.12 (c), pergerakan peluru dari kondisi awal x_0 menuju keluar dari batas kesetimbangan $S(\epsilon)$ menunjukkan bahwa kondisi setimbang tidak stabil.

Ketidakstabilan

Keadaan kesetimbangan x_e disebut tidak stabil jika untuk suatu bilangan nyata $\epsilon > 0$, betapapun kecilnya selalu ada keadaan x_0 dalam $S(\delta)$ sedemikian rupa sehingga trayektori yang bertitik awal pada keadaan ini akan meninggalkan $S(\epsilon)$.

Kedifinitan Matrik

Definisi 1:

- A dikatakan definit positif, jika $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- A dikatakan definit negatif, jika $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$, untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- A dikatakan semi definit positif, jika $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, untuk $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (*)

- A dikatakan semi definit negatif, jika $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$, untuk $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (*)
- (*) dapat terjadi bila $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Definisi 2: (Kriteria Sylvester)

- A definit positif bila $A_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- A definit negatif $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, A_4 > 0, \dots$ dst atau $A_i = (-1)^i$

Definisi 3:

- A definit positif jika semua nilai karakteristiknya positif
- A definit negatif jika semua nilai karakteristiknya negatif
- A semi definit positif jika semua nilai karakteristiknya positif dan ada yang bernilai nol
- A semi definit negatif jika semua nilai karakteristiknya negatif dan ada yang bernilai nol

Definit Positif akan memberikan kepastian minimum

Definit Negatif akan memberikan kepastian maksimum

Fungsi Lyapunov $V(\mathbf{x})$ merupakan fungsi skalar yang *definit positif* (selalu bernilai positif) di daerah Ω (yang meliputi titik awal dari ruang keadaan) bila $V(\mathbf{x})$ untuk semua kondisi yang tidak nol \mathbf{x} di daerah Ω dan juga harus memenuhi $V(0) = 0$. Sedangkan untuk fungsi Lyapunov yang bergantung pada waktu $V(\mathbf{x}, t)$ adalah *definit positif* di daerah Ω , jika fungsi itu dibatasi dari bawah oleh fungsi definit positif yang tidak berubah terhadap waktu, atau dinyatakan dalam bentuk hubungan berikut

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, t) &> V(\mathbf{x}) && \text{untuk semua } t \geq t_0. \\ V(0, t) &= 0 && \text{untuk semua } t \geq t_0 \end{aligned}$$

Beberapa definisi dari suatu fungsi skalar Lyapunov, dinyatakan dalam bentuk :

(a) Negatif, bila :

$$\|V(x)\| > 0$$

(b) Semi definit positif, bila :

$$V(x) \geq 0$$

(c) Definit negatif

$$-V(x) > 0$$

Bentuk kuadrat Lyapunov

Beberapa contoh dari fungsi skalar Lyapunov yang menunjukkan sifat – sifat seperti disebutkan diatas,

- (1) Definit positif : $V(x) = x_1^2 + 4x_2^2$
- (2) Semi definit positif : $V(x) = (x_1 + x_2)^2$
- (3) Definit negatif : $V(x) = -x_1^2 - (2x_1 + 3x_2)^2$
- (4) Indefinitif : $V(x) = x_1x_2 + x_2^2$
- (5) Definit positif : $V(x) = x_1^2 + \frac{4x_2^2}{1 + x_2^2}$

Untuk memahami bahwa fungsi skalar dari Lyapunov, menunjukkan suatu kondisi kestabilan, maka dinyatakan dalam bentuk kuadrat, dalam persamaan berikut,

$$V(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dots (1.123)$$

\mathbf{x} merupakan vektor bernilai real, dan \mathbf{P} adalah matriks simetri bernilai real.

Bentuk Hermitian Lyapunov

Jika \mathbf{x} adalah n – vektor bernilai kompleks dan \mathbf{P} adalah sebuah matriks **Hermitian**, maka bentuk kuadrat kompleks dikatakan sebagai bentuk Hermitian.

$$V(x) = \mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dots (1.124)$$

Contoh Soal 5.14:

Jika bentuk kuadrat yang dinyatakan sebagai berikut :

$$V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

Bentuk persamaan tersebut diatas, dapat dituliskan kembali menjadi :

$$V(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dari matriks \mathbf{P} ,

$$A_1 = |10| > 0, A_2 = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0, A_3 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Karena semua minor utama dari matriks \mathbf{P} adalah positif, maka $V(x)$ dikatakan *definit positif*.

Metode kedua Lyapunov

Teorema 1: Jika diketahui, suatu sistem dinyatakan dalam bentuk :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(x, t)$$

Dimana : $f(0, t) = 0$ untuk sembarang t . Jika ada suatu parameter $V(x, t)$ yang mempunyai turunan parsial pertama kontinu dan memenuhi syarat sebagai berikut:

$V(x, t)$ definit positif

$\dot{V}(x, t)$ definit negatif

Maka keadaan kesetimbangan di titik asal adalah *stabil asimptotik secara uniform*. Jika ternyata $V(x, t) \rightarrow \infty$ untuk $\|x\| \rightarrow \infty$, maka keadaan kesetimbangan di titik asal adalah *stabil asimptotik global secara uniform*.

Teorema 2 : Misalkan jika suatu sistem yang dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = f(x, t)$$

dimana $f(0, t) = 0$ untuk sembarang t .

Jika suatu fungsi skalar $V(x, t)$ yang mempunyai turunan parsial kontinu dan memenuhi persyaratan sebagai berikut :

- i. $V(x, t)$ definit positif
- ii. $\dot{V}(x, t)$ definit negatif
- iii. $\dot{V}(\phi(t); x_0, t_0, t)$ tidak terjadi nol pada $t \geq t_0$, untuk t_0 dan x_0 dimana $\Phi(t, x_0, t_0)$ menyatakan trayektori atau jawab dengan titik awal di x_0 pada t_0 , maka keadaan kesetimbangan di titik asal dari sistem adalah *stabil asimptotik global secara uniform*.

Teorema 3: Jika suatu sistem dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \text{ dimana } f(0, t) = 0 \text{ untuk sembarang } t.$$

Jika ada fungsi skalar $W(\mathbf{x}, t)$ yang mempunyai turunan parsial pertama kontinu dan memenuhi persyaratan berikut:

- i. $W(\mathbf{x}, t)$ definit positif pada suatu daerah didekat titik asal.
- ii. $\dot{W}(\mathbf{x}, t)$ definit positif pada daerah yang sama.

Maka keadaan kesetimbangan di titik asal adalah stabil.

Analisa Kestabilan Sistem Linier

Analisa kestabilan sistem linier parameter konstan dengan metode Lyapunov, bila sistem tersebut dinyatakan dalam bentuk :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Dimana \mathbf{x} = vektor keadaan (vektor – n dimensi)

\mathbf{A} = matriks persegi dengan koefisien konstan $n \times n$ (\mathbf{A} non singular)

Dipilih suatu kemungkinan fungsi Lyapunov sebagai berikut :

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$$

Dimana \mathbf{P} adalah matriks Hermitian definit positif.

Turunan dari fungsi Lyapunov dinyatakan:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} \end{aligned}$$

Dimana : $\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})$ adalah definit positif

Teorema 4:

Bila sebuah sistem dinyatakan dengan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Dimana \mathbf{x} = vektor keadaan (vektor – n dimensi)

\mathbf{A} = matriks persegi dengan koefisien konstan $n \times n$ (\mathbf{A} non singular)

Syarat perlu dan dan syarat cukup agar keadaan kesetimbangan $\mathbf{x} = 0$ stabil asimptotik global adalah jika diberikan setiap matrik Hermitian definit positif (simetri nyata) \mathbf{Q} , maka terdapat suatu matrik Hermitian definit positif (simetri nyata) \mathbf{P} sedemikian rupa sehingga:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) = -\mathbf{Q}$$

Fungsi skalar $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ adalah suatu fungsi Lyapunov dari sistem tersebut.

Pada teorema 4, terdapat hal yang penting, yaitu :

1. Jika $\dot{V}(x) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ tidak menjadi nol sepanjang setiap trayektori maka \mathbf{Q} dapat dipilih berupa matrik semi definit positif.
2. Jika dipilih suatu matrik definit positif sembarang, yaitu \mathbf{Q} (atau suatu matrik semi definit positif sembarang \mathbf{Q} jika $\dot{V}(x)$ tidak menjadi nol sepanjang setiap trayektori) dan penyelesaian persamaan matrik : $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) = -\mathbf{Q}$
3. Untuk menentukan \mathbf{P} , maka syarat perlu dan syarat cukup agar keadaan kesetimbangan $\mathbf{x} = 0$ stabil asimptotik adalah bahwa \mathbf{P} harus definit positif .
4. Hasil akhir tidak bergantung pada matrik tertentu \mathbf{Q} yang dipilih, dengan syarat bahwa \mathbf{Q} definit positif (semi definit negatif, tergantung kasusnya).
5. Untuk menentukan elemen dari matrik \mathbf{P} , maka disamakan matrik $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})$ dan $-\mathbf{Q}$ elemen demi elemen. Ini menghasilkan $n(n+1)/2$ persamaan linier untuk penentuan elemen – elemen $p_{ij} = \bar{p}_{ji}$ dari \mathbf{P} . Jika eigenvalue dari \mathbf{A} dinyatakan dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ masing masing diulang sebanyak kerangkapannya sebagai akar persamaan karekteristik, dan jika untuk setiap jumlah dua akar : $\lambda_j + \lambda_k \neq 0$, maka elemen – elemen \mathbf{P} dapat ditentukan secara unik. Perhatikan bahwa jika matrik \mathbf{A} menyatakan suatu sistem stabil, maka jumlah $\lambda_j + \lambda_k$ selalu tidak nol.
6. Dalam menentukan ada atau tidak adanya suatu matrik Hermitian definit positif atau matrik simetri nyata \mathbf{P} , akan lebih mudah kalau dipilih $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, dimana \mathbf{I} adalah matrik identitas. Selanjutnya elemen – elemen \mathbf{P} dari $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) = -\mathbf{I}$ dan matrik \mathbf{P} tersebut kemudian diperiksa apakah definit positif atau tidak.

Contoh Soal 1.15:

Suatu sistem dinyatakan dalam bentuk model berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}x(t) + \mathbf{E}d(t) \text{ dan}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Dimana: $d(t)$ adalah disturbance

Jika diberikan:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cari matrik \mathbf{F} agar sistem dengan $u(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t)$ menjadi tidak lagi sensitif terhadap *disturbance*.

Jawab:

Dari model tersebut di atas :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}x(t) + \mathbf{E}d(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}d(t) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}d(t) \end{aligned}$$

Atau

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}d(t) \quad \dots (1.105)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad \dots (1.106)$$

Penyelesaian dari persamaan terakhir :

$$x(t) = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})t} x(0) + \int_0^t e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})(t-\tau)} \mathbf{E}d(\tau) d\tau \quad \dots (1.107)$$

Atau

$$y(t) = \mathbf{C}e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})t} x(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})(t-\tau)} \mathbf{E}d(\tau) d\tau \quad \dots (1.108)$$

Agar sistem tidak sensitif terhadap *disturbance* maka :

$$\mathbf{C} \int_0^t e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})(t-\tau)} \mathbf{E}d(\tau) d\tau = [\mathbf{0}] \quad \dots (1.109)$$

Untuk sistem dinamik yang dinyatakan dalam persamaan (1.105), state $\hat{\mathbf{x}}$ adalah *controllable* jika dan hanya jika $\hat{\mathbf{x}} \in \text{col} - \text{sp}[\mathbf{Q}]$,

dimana

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}[\mathbf{E} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{BF})\mathbf{E} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{BF})^2\mathbf{E} \quad \dots \quad (\mathbf{A}+\mathbf{BF})^{n-1}\mathbf{E}]$$

$$\hat{x} = \mathbf{C} \int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{BF})(t-\tau)} \mathbf{E} d(\tau) d\tau$$

$y(t)$ adalah bebas terhadap efek $d(t)$ hanya bila dipenuhi:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}[\mathbf{E} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{BF})\mathbf{E} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{BF})^2\mathbf{E}] = [0 \quad 0 \quad 0]$$

yang ekivalen dengan persamaan (5.109) dan pasangan $(\mathbf{A}+\mathbf{BF}, \mathbf{E})$ adalah *unobservable*.

Bila ditentukan bahwa $\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]$

$$\mathbf{C}\mathbf{E} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BF})\mathbf{E} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ f_1 & f_2 & -3 + f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$= -1 + f_1 + 4 - 2f_2 - 3 + f_3 = 0$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BF})^2\mathbf{E} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ f_1 & f_2 & -3 + f_3 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$= 1 - f_1 - 3f_1 + f_1f_3 - 8 + 4f_2 - 2f_2f_3 + 9 - 6f_3 + f_3^2 = 0$$

Atau:

$$f_1 - 2f_2 + f_3 = 0$$

$$-4f_1 + 10f_2 - 6f_3 + f_1f_3 - 2f_2f_3 + f_3^2 = -2$$

Dengan substitusi

$$f_1 = 2f_2 - f_3$$

pada persamaan terakhir diperoleh :

$$2f_2 - 2f_3 = -2$$

$$f_2 - f_3 = -1$$

Disini jika diambil $f_3 = 0$, diperoleh $f_3 = -1$ dan $f_1 = -2$.

Atau : $\mathbf{F} = [-2 \quad -1 \quad 0]$.

Rangkuman:

Penggunaan metode ruang keadaan untuk analisis suatu sistem, sangat sesuai jika menggunakan komputer digital, karena pendekatannya adalah wawasan waktu. Sehingga terhindar dari kebosanan dan kesulitan pada saat terjadi perhitungan berulang dan lebih mudah untuk menyelesaikan sistem-sistem yang berorde tinggi. Ini adalah salah satu keunggulan penggunaan metode ruang keadaan. Metode sangat baik digunakan untuk memodelkan sistem, menganalisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Dengan metode ruang keadaan ini juga dapat dianalisis tingkat keterkendalian sistem, apakah terkendali secara sempurna ataukah terkendali sebagian.

Telah dijelaskan pula prinsip kerangkapan (*duality*), yang dikembangkan oleh **Kalman**, untuk memperjelas analogi yang terlihat antara keterkendalian dan keteramatan. Prinsip kerangkapan menyatakan bahwa sistem S_1 terkendali keadaannya (teramati) secara sempurna jika dan hanya jika sistem S_2 teramati (terkendali keadaannya) secara sempurna.

Sebuah sistem non-linier dan atau sistem parameter berubah dapat yang dimodelkan dalam persamaan ruang keadaan (*state space*), dapat dianalisis kestabilannya dengan menggunakan metode kedua Lyapunov (Metode langsung Lyapunov). Metode Lyapunov tidak memerlukan untuk menyelesaikan persamaan ruang keadaan untuk mengetahui kestabilan sistem pengendalian. Metode ini dapat memeriksa apakah sistem dalam keadaan terkendali secara sempurna atau terkendali sebagian.

Pustaka utama :

1. Kuo,B.C.,"*Automatic Control Sistem*",6th ed., Printice-Hall, Englewood Cliffs,NJ.,1998, halaman 273 s/d 285.
2. Ogata,K.,"*Modern Control Engineering*", 4th ed., Printice-Hall, Englewood Cliff,NJ.,1997, halaman 677 s/d 845.
3. Ogata,K.,"*State Space*", Printice-Hall, Englewood Cliff,NJ.,1990.

Pustaka penunjang :

1. Bahram Shahian, Michael Hassul,"*Control Sitemns Using MATLAB*", International Editions, Printice-Hall, 1997.
2. The MathWorks, Inc.,"*Control Sistem Toolbox*", Printice-Hall, 1997.
3. Syamsul Arifin, "*Kontrol Automatik II*", Jurusan Teknik Fisika-FTI-ITS, 1997.

4. Lewis, F. L., "Applied Optimal Control & Estimation", Prentice Hall, 1992.
5. Raven, F. H., "Automatic Control Engineering", Fifth Ed., Mc Graw, 1995.

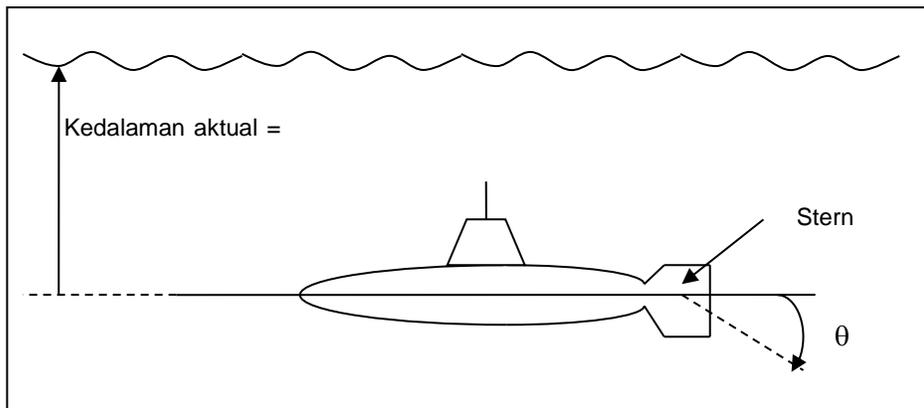
Soal-Soal Asesmen :

1. Suatu sistem dinyatakan dalam bentuk berikut :

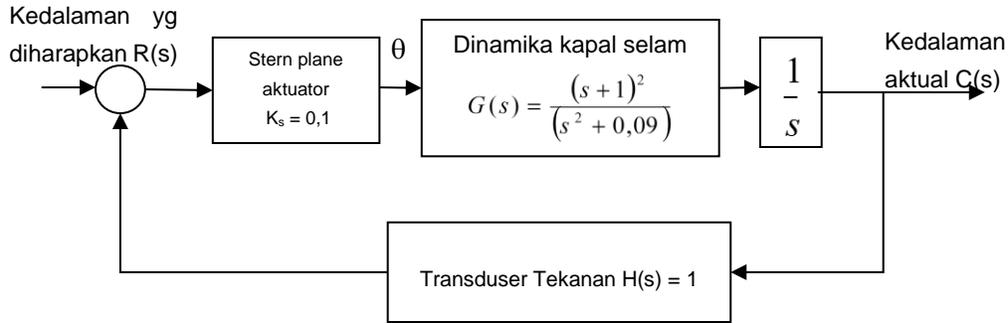
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

Nyatakan dalam bentuk persamaan keadaan.

2. Sebuah pengendalian pada kapal selam dengan tujuan untuk mencapai kedalaman R dan kondisi kedalaman riilnya adalah C. Beda kedalaman ini digunakan untuk kerja pengendali untuk menggerakkan aktuator *stern*. Blok diagram sistem pengendalian ini ditunjukkan pada Gambar di bawah. Gunakan kriteria Routh untuk menentukan sistem ini stabil atau tidak.



Gambar 1.13 Kapal selam dibawah laut



Gambar 1.14 Blok diagram kapal selam dibawah laut

3. Pada latihan soal Bab 2 no 4, tentukan bentuk persamaan keadaan sistem.

Jawab :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} & \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{-R_1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{-1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} [e(t)]$$

4. Cari matriks transisi / alih dari sistem berikut ini :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

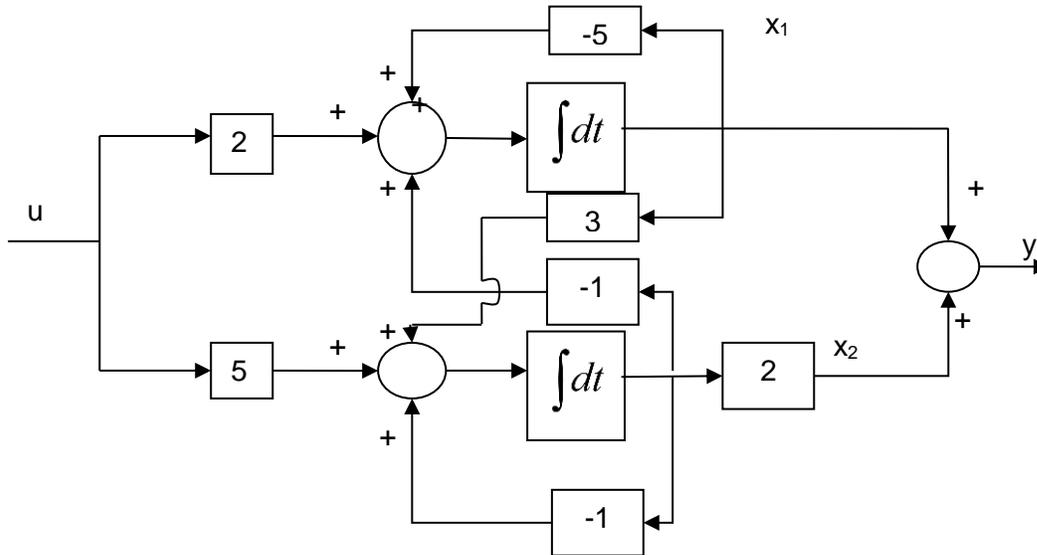
5. Tentukan matriks transisi dari sistem yang dinyatakan dalam bentuk berikut :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Kunci Jawab soal :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3 + 3e^{-t} + e^{-2t} & \frac{5}{2} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -3 + 6e^{-t} - 3e^{-2t} & -\frac{5}{2} + 8e^{-t} - \frac{9}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} \\ 3 - 12e^{-t} + 9e^{-2t} & \frac{5}{2} - 16e^{-t} + \frac{27}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2} - 4e^{-t} + \frac{9}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

6. Perhatikan sistem pengendalian berikut ini :



Gambar 1.15 Blok diagram sistem pengendalian

Tentukan persamaan keadaan dari sistem pengendalian yang digambarkan dengan blok diagram seperti diatas.

Kunci jawab Soal :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

7. Tentukan matriks fungsi alih loop tertutup untuk sistem yang dinyatakan dalam bentuk dibawah ini :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \quad \text{dan } H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kunci Jawab Soal :

$$\mathbf{M}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+3} & 0 \\ \frac{s+1}{s+1} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s(s+4)} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

8. Untuk sistem berubah waktu yang dinyatakan dalam bentuk berikut ini, tentukanlah matriks transisi sistem :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Kunci jawab Soal :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{10} + \dots \\ 0 & 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{12} + \dots \end{bmatrix}$$

9. Sistem yang dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial berikut ini :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = 0$$

Dimana α dan β adalah konstanta dan $u(t) = \delta(t)$ fungsi satuan impulse. Kondisi awal dari sistem dinyatakan oleh : $x(0_-) = \frac{dx(0_-)}{dt} = 0$. Tentukan response dari sistem dengan

menggunakan metode :

- Transformasi Laplace
- Metode ruang keadaan

Kunci Jawab soal :

$$x(t) = \frac{1}{\alpha - \beta} (-e^{-\alpha t} + e^{-\beta t})$$

10. Apa yang dimaksud dengan “Controllable” dan “Observable”?
 11. Sistem yang dinyatakan dalam bentuk persamaan keadaan berikut ini :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

Dimana :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hasilkan persamaan differensial dari sistem.

Kunci Jawab Soal :

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 14y = \dot{u} + 4u$$

12. Satu fungsi alih dinyatakan dalam bentuk berikut ini :

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Tentukan persamaan keadaan dari sistem tersebut.

Kunci Jawab Soal :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

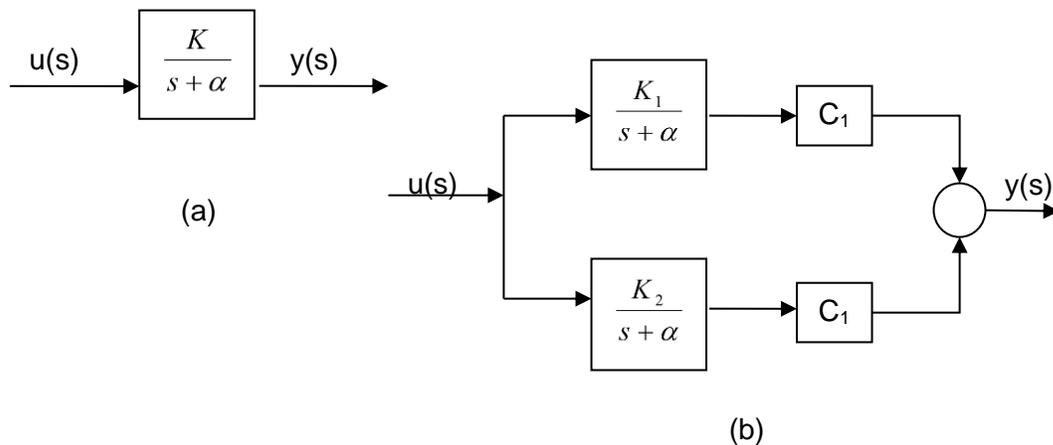
13. Sistem yang dinyatakan dalam bentuk dibawah ini, selidikilah tentang “Controllable” dan “Observable” :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Kunci Jawab soal :

- Sistem tidak “Completely Controllable”
- Sistem tidak “Completely Observable”

14. Selidikilah tentang *Controlability* dan *Observability* dua sistem berikut ini :



Gambar 1.16 Blok diagram sistem

Kunci Jawab Soal :

Sistem (a) “Controllable dan “Observable”

Sistem (b) “Completely Controllable” dan “Completely Observable” bila $\alpha \neq \beta$

15. Berikut ini adalah persamaan keadaan suatu sistem dinamik :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 1]x$$

a) Periksa *controllability* dan *observability*

b) Bagaimana bentuk fungsi alih $G(s)$ nya dan beri komentar bentuk $G(s)$ dengan hasil pada soal b.

16. Turunkan kondisi stabil asimtotik dari sistem berikut. Gunakan metode Lyapunov dengan memilih bentuk yang sesuai dengan $\dot{V}(x)$

a. $\dot{x} = ax$

b. $\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \beta)\frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = 0$

c. $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = -ax_1 - bx_2 - cx_3$

Kunci Jawab Soal :

a. Untuk $a < 0$, Stabil asimtotik

- b. Untuk $a > 0$ dan $b > 0$ maka sistem stabil asimptotik
- c. Untuk $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ dan $bc - a > 0$ sistem stabil asimptotik.

17. Cari Fungsi Lyapunov untuk sistem berikut ini :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Kunci Jawab soal :

$$V = \frac{1}{2} (3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

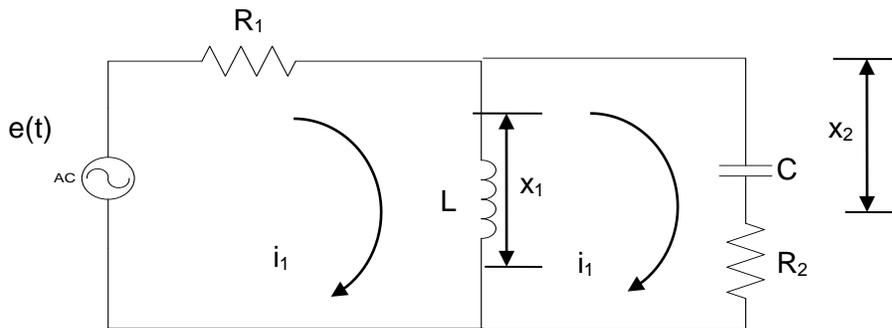
18. Tentukan kestabilan sistem pada titik *origin* dari sistem berikut ini :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3$$

Kunci Jawab soal : Sistem adalah “*stabil asimptotik*”

19. Turunkan persamaan keadaan dari sistem elektrik yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini. Misalkan arus yang melalui induktor L adalah x_1 yaitu : $x_1 = i_1 - i_2$ dan tegangan pada kapasitor adalah x_2 . Anggap bahwa $e(t)$ adalah masukan sistem.

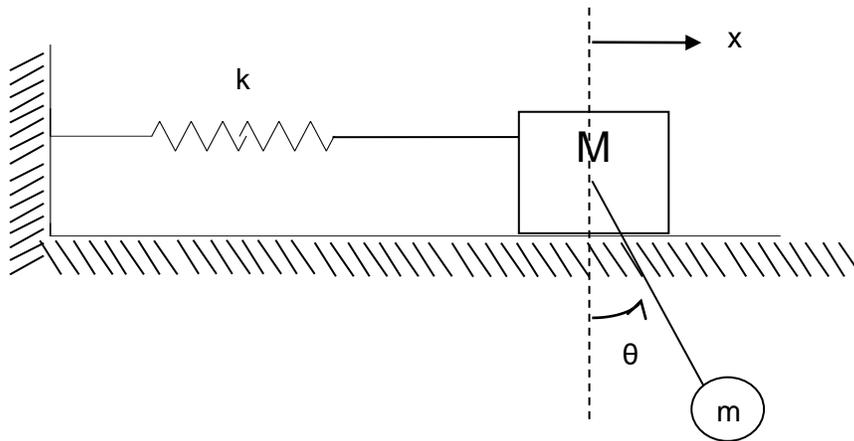


Gambar 5.26 Rangkaian listrik RLC

Kunci Jawab soal :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1R_2}{L(R_1 + R_2)} & \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{-R_1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{-1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} [e(t)]$$

20. Sebuah pendulum sederhana sepanjang L, dan beratnya mg diikatkan pada benda massa M yang bergerak tanpa gesekan pada bidang datar seperti terlihat pada gambar di bawah. Tentukan persamaan dinamika sistem tersebut dalam bentuk persamaan keadaan



Gambar 5.27 Dinamika sistem pegas dan pendulum

Petunjuk :_Gunakan persamaan Lagrange

Kunci Jawab Soal :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{mL} & 0 & -\frac{M+m}{ML}g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \\ 1 \\ \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

2 Perancangan Pengendalian dengan Penempatan Pole

Sebuah pengendali modern, diperoleh dengan menentukan gain pengendali, K , yang mana, sinyal kendali u dapat diperoleh dari gain feedback, persamaan berikut:

$$u = -\mathbf{K} \mathbf{x}$$

Pendekatan pertama dalam menentukan K , adalah dengan cara pole placement / penempatan pole.

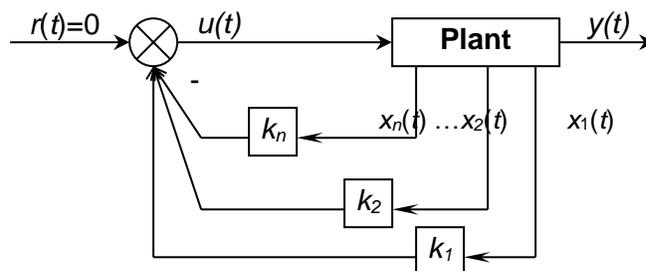
Suatu pendekatan dalam perancangan sistem pengendalian modern adalah dengan menggunakan umpan balik keadaan yang dikenal sebagai perancangan penempatan pole (*pole-placement design*). Perancangan penempatan pole memungkinkan semua akar-akar persamaan karakteristik sistem untuk ditempatkan ditempat yang dikehendaki. Hasilnya adalah suatu vektor penguat regulator konstan K .

Konsep umpan balik variabel keadaan memerlukan semua keadaan yang dapat diakses dalam suatu sistem fisis, tetapi kebanyakan sistem hanya mampu mengakses beberapa keadaan sistem. Untuk sistem yang mana semua keadaan tidak dapat di umpan balikkan, dikarenakan keadaan tidak dapat diakses, maka suatu estimator keadaan (*observer*) dapat dirancang untuk implementasi perancangan dengan penempatan pole.

Perhatikan persamaan keadaan dan persamaan keluaran sistem sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad \dots(2.1)$$

blok diagram sistem dari sebuah sistem pengendali dengan penempatan pole ditunjukkan pada Gambar 2.1 di bawah ini.



Gambar 2.1 Perancangan sistem pengendalian melalui penempatan pole.

Perhatikan Gambar 2.1 di atas, pengendalian umpan balik keadaan dinyatakan,

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad \dots(2.2)$$

dimana \mathbf{K} adalah matrik vektor penguat umpan balik konstan berdimensi $1 \times n$. Masukan sistem pengendalian $r(t)$ dianggap nol. **Harapan sistem adalah mengembalikan semua variabel keadaan ke harga nol**, bila keadaan telah *perturbasi*.

Substitusi persamaan (1.117) ke dalam persamaan (1.116), maka representasi variabel keadaan sistem loop tertutup adalah,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}(t) \quad \dots(2.3)$$

persamaan karakteristik sistem loop tertutup ditunjukkan pada persamaan (2.4) di bawah ini

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = 0 \quad \dots(2.4)$$

Anggap sistem dapat dinyatakan dalam bentuk kanonik sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \dots(2.5)$$

Dengan mensubstitusi matrik \mathbf{A} dan \mathbf{B} ke dalam persamaan (2.4), persamaan karakteristik loop tertutup sistem pengendalian adalah,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) = 0 \quad \dots(2.6)$$

Untuk lokasi pole loop tertutup yang sesuai $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$, persamaan karakteristik sistem dinyatakan sebagai berikut,

$$\alpha_c(s) = (s + \lambda_1)\dots(s + \lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0 \quad \dots(2.7)$$

Objek perancangan adalah untuk memperoleh matrik penguat \mathbf{K} , sehingga persamaan karakteristik sistem pengendalian adalah identik dengan persamaan karakteristik yang

diharapkan. Vektor penguat \mathbf{K} diperoleh dengan menyamakan koefisien persamaan (2.6) dan persamaan (2.7) sebagai berikut,

$$k_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1} \quad \dots(2.8)$$

matrik penguat \mathbf{K} ,

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \dots \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \quad \dots(2.9)$$

dan,

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} \quad \dots(2.10)$$

dimana,
$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad \dots(2.11)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots(2.12)$$

Rumus Ackermann

Untuk memperoleh vektor penguat \mathbf{K} dapat menggunakan rumus Ackermann sebagai berikut,

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{M}^{-1} \alpha_c(\mathbf{A}) \quad \dots(2.13)$$

dimana matrik \mathbf{S} dinyatakan sebagai berikut,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad \dots (2.14)$$

dan $\alpha_c(\mathbf{A})$ diperoleh dengan menggunakan persamaan,

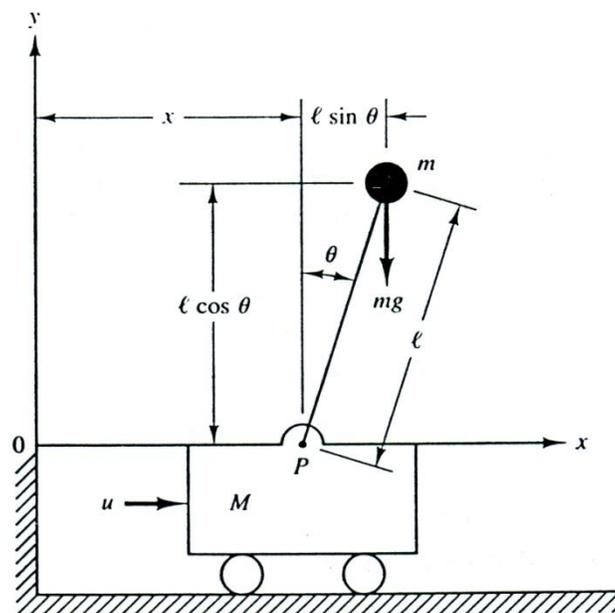
$$\alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I} \quad \dots(2.15)$$

Dengan menggunakan program MATLAB, telah dikembangkan fungsi $[\mathbf{K}, \mathbf{Af}] = \text{placepol}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{p})$ yang dapat digunakan untuk perancangan penempatan pole. Matrik \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} adalah matrik sistem dan \mathbf{p} adalah vektor baris yang berisi pole loop tertutup yang diinginkan. Fungsi yang lain adalah

fungsi $\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{p})$ untuk sistem masukan tunggal, sedangkan fungsi $\mathbf{K} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{p})$ untuk sistem masukan banyak.

Contoh Soal 2.1:

Tinjau sistem bandul terbalik seperti pada gambar 1.13, dengan bandul terbalik yang dikaitkan pada gerobak yang dapat digerakkan oleh motor. Kita hanya akan memperhatikan gerakan bandul dua dimensi. Bandul terbalik ini tidak stabil, sehingga bisa turun setiap saat, kecuali jika kita kenakan gaya pengendali yang sesuai. Anggap bahwa massa bandul berpusat pada ujung batang, dan massa batang diabaikan. Gaya pengendali u dikenakan pada gerobak.



Gambar 2.2 Sistem pengendalian bandul terbalik[2].

Rancanglah sebuah sistem pengendalian sedemikian rupa, sehingga tiap-tiap kondisi awal bandul (yang diakibatkan oleh gangguan) dapat dikembalikan keposisi vertikal dan juga gerobak tersebut dapat dikembalikan ke posisi acuan ($x=0$) dengan cepat (sebagai contoh dengan waktu turun sekitar 2 detik) yang memungkinkan peredaman (contoh, setara $\zeta=0,5$ dalam sistem orde yang baku). Diketahui :

$$M = 2 \text{ Kg.} \quad m = 0,1 \text{ Kg} \quad l = 0,5 \text{ m}$$

Jawab:

Dengan sudut simpangan bandul θ sangat kecil, persamaan gerak sistem dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad \dots(2.16)$$

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = mg\theta \quad \dots(2.17)$$

dengan mengurangkan persamaan (2.17) dari persamaan (2.16), dihasilkan,

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \quad \dots(2.18)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.18) kedalam persamaan (2.17) diperoleh,

$$Ml\ddot{\theta} - (M + m)g\theta = -u \quad \dots(2.19)$$

dengan menggunakan transformasi Laplace, persamaan (2.19) di atas, diperoleh fungsi alih sistem,

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{Mls^2 - (M + m)g} \quad \dots(2.20)$$

dengan memasukkan harga yang diketahui, dan mengambil harga gravitasi $g=9,81$ meter/det², diperoleh,

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{s^2 - 20,601} = \frac{1}{s^2 - (4,539)^2}$$

Sistem bandul terbalik mempunyai satu kutup pada sumbu real negatif ($s=4,539$), sehingga sistem tersebut adalah *sistem loop terbuka tak-stabil*.

Selanjutnya kita akan menstabilkan sistem tersebut, dengan merancang sistem pengendalian dengan teknik penempatan kutup, dan selanjutnya mendapatkan karakteristik dinamik yang diinginkan. Dibangun persamaan keadaan sistem dengan terlebih dahulu memilih variabel keadaan sebagai berikut,

$$x_1 = \theta \quad , \quad x_2 = \dot{\theta} \quad , \quad x_3 = x \quad , \quad x_4 = \dot{x} \quad \dots (2.21)$$

maka, berdasarkan persamaan (2.21) dan persamaan (2.18), diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{M+m}{Ml} g x_1 - \frac{1}{Ml} u \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u
 \end{aligned}
 \quad \dots (2.22)$$

dalam bentuk persamaan ruang keadaan,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u
 \quad \dots(2.23)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
 \quad \dots(2.24)$$

Dengan harga-harga yang diketahui diperoleh matrik,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Marilah kita periksa, apakah sistem mempunyai keadaan yang dapat dikendalikan secara lengkap (syarat harus *full-rank*).

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20,601 \\ -1 & 0 & -20,601 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,4905 \\ 0,5 & 0 & 0,4905 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} [\mathbf{M}] = 4$ (*full-rank*), maka sistem dapat dikendalikan secara sempurna.

Persamaan karakteristik sistem adalah,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -20,601 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0,4905 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^4 - 20,601s^2 = s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4$$

oleh karena itu diperoleh nilai parameter,

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = -20,601 \quad , \quad a_3 = 0 \quad , \quad a_4 = 0 \quad \dots(2.25)$$

Selanjutnya, dipilih lokasi loop tertutup yang diinginkan. Karena disyaratkan sistem dengan waktu turun kecil (settling time), yaitu sekitar 2 detik dan rasio redaman yang wajar sekitar $\zeta=0,5$. Disini kita pilih kutub-kutub loop tertutup yang diinginkan pada,

$$\lambda_1 = -2 + j3,464 \quad , \quad \lambda_2 = -2 - j3,464 \quad , \quad \lambda_3 = -10 \quad , \quad \lambda_4 = -10 \quad \dots(2.26)$$

Maka persamaan karakteristik yang diinginkan adalah, yang memenuhi persamaan berikut ini,

$$\begin{aligned} (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4) &= (s + 2 - j3,464)(s + 2 + j3,464)(s + 10)(s + 10) \\ &= s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600 \\ &= s^4 + \alpha_1s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_3s + \alpha_4 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh parameter,

$$\alpha_1 = 24 \quad , \quad \alpha_2 = 196 \quad , \quad \alpha_3 = 720 \quad , \quad \alpha_4 = 1600 \quad \dots(2.27)$$

Sedangkan matrik \mathbf{W} pada persamaan (1.126),

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -20,601 & 0 & 1 \\ -20,601 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (2.28)$$

dan matrik \mathbf{T} , persamaan (1.124), adalah

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -9,81 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{0,5}{9,81} & 0 & -\frac{1}{9,81} & 0 \\ 0 & -\frac{0,5}{9,81} & 0 & -\frac{1}{8,81} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (2.29)$$

Berdasarkan persamaan (2.29) dan persamaan (2.28) vektor penguat \mathbf{K} , dalam persamaan (2.13) adalah,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\alpha_4 - a_4 \mid a_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1} \\ &= [-298,15 \quad -60,697 \quad -163,099 \quad -73,394] \end{aligned} \quad \dots (2.30)$$

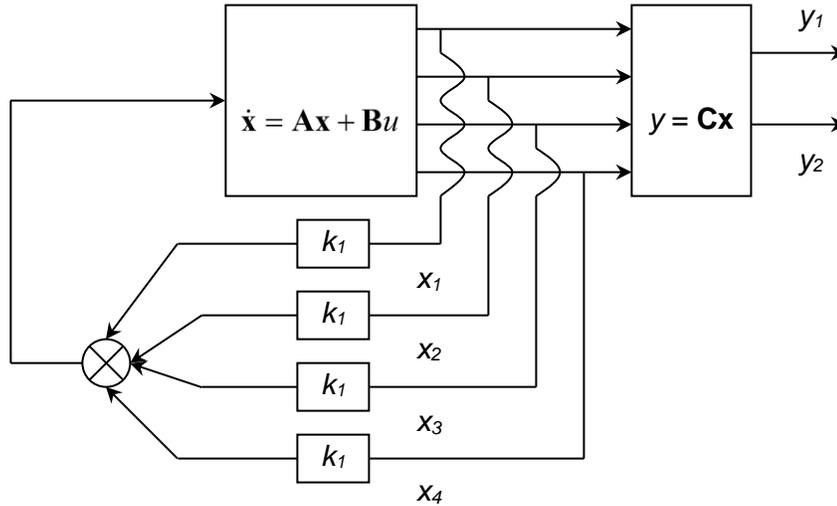
Jadi sinyal pengendalian u diperoleh sebagai berikut,

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = 298,15x_1 + 60,697x_2 + 163,099x_3 + 73,394x_4 \quad \dots (2.31)$$

Jika sinyal pengendalian ini disubstitusikan kedalam persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ maka diperoleh persamaan ruang keadaan sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -277,549 & -60,697 & -163,099 & -73,394 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 148,585 & 30,349 & 81,550 & 36,697 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

blok diagram sistem dari persamaan (2.31) di atas ditunjukkan pada Gambar 1.14 di bawah ini.



Gambar 2.3 Blok diagram sistem pengendalian pendulum terbalik.

Contoh Soal 2.2

Suatu plant dinyatakan dengan persamaan keadaan sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Rancang pengendali umpan balik keadaan dengan menempatkan pole loop tertutup pada $-3 \pm j4$ dan -8 . Cari tanggapan kondisi mula-mula, jika $x_1(0)=1$, $x_2(0)=1$, dan $x_3(0)=-1$.

Jawab :

Mari kita menggunakan program MATLAB yang telah disusun sebagai berikut,

```
A=[-1 0 0; -1 -2 0; 1 0 0];
```

```
B=[1; 0; 0];
```

```
C=[1 1 0 ]; D=0;
```

```
j=sqrt(-1);
```

```
P=[-3+j*4 -3-j*4 -8]; % desired closed-loop poles
```

```
[K,Af]=placepol(A,B,C,P); %returns gain K and closed-loop sistem matrix
```

```
% initial condition response
```

```

t=0:.02:2;
r=zeros(1,length(t));           % generates a row of zero input
x0=[1 1 -1];                     % initial state
[y,x]=lsim(Af, B, C, D, r, t, x0); % initial state response
subplot(221), plot(t, x(:,1)),title('x(1)'), grid
subplot(222), plot(t, x(:,2)),title('x(2)'), grid
subplot(223), plot(t, x(:,3)),title('x(3)'), grid
subplot(224), plot(t, y),title('y(t)'), grid
subplot(111)

```

Hasilnya dari program Matlab di atas adalah, besarnya gain feedback, K yaitu sebagai berikut:

Feedback gain vektor K

```
11  51  100
```

Open-loop Plant alih function:

```
Numerator    0    1    1    0
```

```
Denominator  1    3    2    0
```

Controlled sistem closed-loop alih function:

```
Numerator    0    1    1    0
```

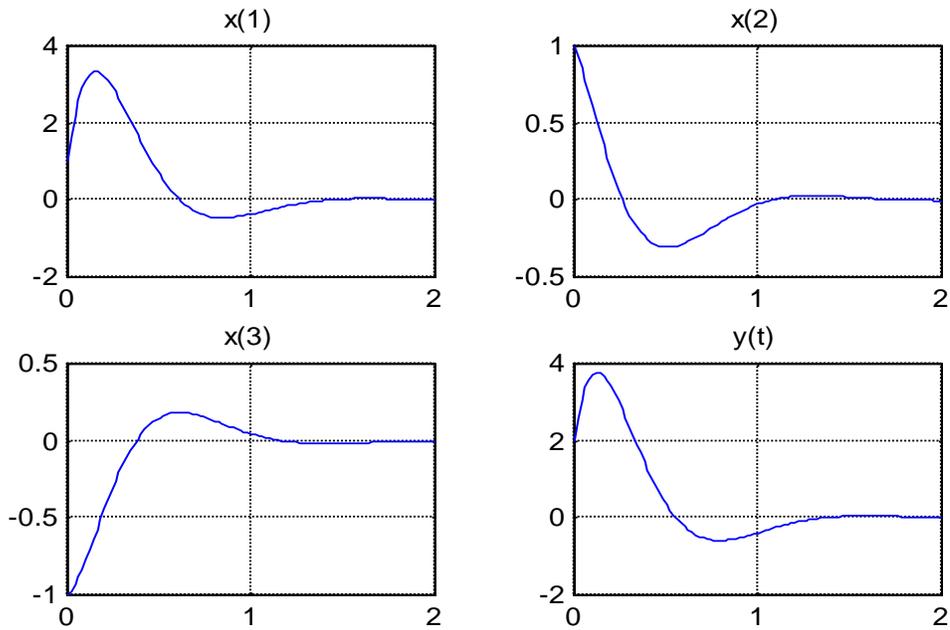
```
Denominator  1   14   73  200
```

Closed-loop sistem matrix $A - B \cdot K$

```
-12  -51  -100
```

```
-1   -2    0
```

```
1    0    0
```



Gambar 2.4 Grafik tanggapan kondisi mula-mula

Soal latihan 2.3:

Suatu sistem regulator (pengatur) terdiri atas plant dengan fungsi alih sebagai berikut,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

definisikan variabel keadaan sebagai berikut,

$$x_1 = y \quad , \quad x_2 = \dot{x}_1 \quad , \quad x_3 = \dot{x}_2$$

Dengan menggunakan pengendalian umpan balik keadaan $u = -Kx$, diinginkan agar kutub loop tertutup terletak di lokasi,

$$\lambda_1 = -2 + j3,464 \quad , \quad \lambda_2 = -2 - j3,464 \quad , \quad \lambda_3 = -10$$

Tentukan vektor penguat K sistem.

Soal latihan 2.5

Suatu plant SISO dengan fungsi alih sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)}$$

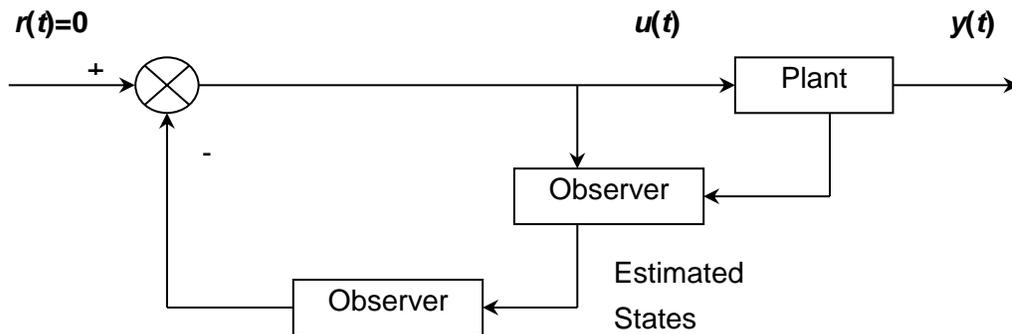
Cari model keadaan sistem dan rancang umpan balik keadaan dengan menempatkan pole pada $-2 \pm j2$ dan -5 . Juga cari fungsi alih loop tertutup untuk sistem terkendali.

Jawab soal ini, dengan menggunakan program MATLAB.

3 Perancangan Gabungan "Controller-Observer"

Observer

Perancangan dengan pendekatan penempatan pole di dalam perancangan sistem pengendalian, diambil asumsi bahwa semua variabel keadaan dapat diumpanbalikkan. Dalam kenyataannya, tidak praktis untuk memasang semua transduser untuk mengukur semua variabel keadaan tersebut. Hal ini bisa disebabkan karena konfigurasi sistem atau karena pertimbangan biaya. Dalam keadaan demikian, bisa dipasang *observer* atau *estimator* yang sesuai. *Observer* menghasilkan estimasi keadaan $\hat{\mathbf{x}}(t)$ dari pengukuran keluaran $y(t)$. Keadaan terestimasi, dan juga keadaan yang terukur secara aktual selanjutnya akan dikirim ke pengendali. Perhatikan blok diagram dibawah,



Gambar 3.1 Perancangan umpan balik keadaan dengan sebuah observer.

Perhatikan persamaan keadaan dan keluaran berikut,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad \dots(3.1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad \dots(3.2)$$

Anggap keadaan $\mathbf{x}(t)$ didekati oleh keadaan $\hat{\mathbf{x}}(t)$ model dinamik berikut,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_e (y(t) - \hat{y}(t)) \quad \dots(3.3)$$

$$\hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad \dots(3.4)$$

dimana \mathbf{K}_e adalah matrik pembobot. Persamaan (3.3) dikurangkan dengan persamaan (3.1) dan persamaan (3.4) kurangkan dengan persamaan (3.2), diperoleh,

$$(\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{K}_e(y(t) - \hat{y}(t)) \quad \dots(3.5)$$

$$(y(t) - \hat{y}(t)) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \quad \dots(3.6)$$

dimana :

$\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$: Error antara variabel keadaan aktual dengan variabel keadaan hasil estimasi.

$y(t) - \hat{y}(t)$: Error antara keluaran aktual dan keluaran hasil estimasi.

Substitusi antara kedua persamaan tersebut, diperoleh persamaan error antara vektor keadaan terestimasi dan vektor keadaan aktual, berikut

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e}(t) = \mathbf{A}_e \mathbf{e}(t) \quad \dots(3.7)$$

dimana,

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad \dots(3.8)$$

Jika \mathbf{K}_e dipilih hingga, sehingga *eigenvalue* matrik $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})$ semua bagian realnya negatif, maka harga keadaan tunak error vektor keadaan tunak $\mathbf{e}(t)$ untuk kondisi mula-mula akan menuju ke nol. Sehingga $\hat{\mathbf{x}}(t)$ akan konvergen ke $\mathbf{x}(t)$. Perancangan *observer* hampir sama dengan perancangan pengendali. Namun demikian *eigenvalue* $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})$ harus dipilih ke sebelah kiri *eigenvalue* matrik \mathbf{A} . Hal ini akan memberikan jaminan dinamika *observer* lebih cepat dari pada dinamika pengendali untuk perbaikan berulang terhadap estimasi vektor keadaan.

Persamaan karakteristik estimator,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e \mathbf{C}| = 0 \quad \dots(3.9)$$

Untuk kecepatan respon tertentu, diharapkan persamaan karakteristik untuk estimator adalah,

$$\alpha_e(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0 \quad \dots(3.10)$$

Penguat estimator \mathbf{K}_e diperoleh dengan koefisien persamaan (3.9) dan (3.10). Ini adalah identik dengan teknik penempatan pole, dan \mathbf{K}_e diperoleh dengan dengan menggunakan **rumus Ackermann**, berikut

$$\mathbf{G} = \alpha_e(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots(3.11)$$

dan $\alpha_e(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I} = 0 \quad \dots(3.12)$

Fungsi $[\mathbf{K}_e, \mathbf{A}_e] = \text{observer}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, p_e)$ dalam program MATLAB dikembangkan untuk estimator. p_e adalah *eigenvalue* estimator.

Kondisi yang diperlukan untuk merancang sebuah *observer* adalah bahwa semua keadaan dapat diamati dari pengukuran keluaran. Sifat ini dikenal dengan istilah *teramati* (*observability*).

Contoh Soal 3.1:

Tinjau sistem yang dituliskan dalam persamaan keadaan dan keluaran berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

Rancang *observer* dengan *full-state* sehingga *observer* teredam kritis dengan *eigenvalue*, $\mu_1 = -1,8 + j2,4$ dan $\mu_2 = -1,8 - j2,4$.

Jawab :

Karena dalam merancang sebuah *observer*, diperlukan bahwa semua keadaan harus teramati, maka langkah pertama dalam menjawab soal di atas adalah memeriksa keteramatan sistem dengan mengetahui harga *rank*-nya.

$$\text{rank}(\mathbf{N}) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = \text{full-rank}$$

Karena sistem adalah *full-rank*, maka semua keadaan yang terukur dari keluaran dapat diamati, dan perancangan *observer* dapat dilanjutkan.

Untuk menjawab soal diatas akan dikemukakan 3 metode sebagai berikut,

Metode-1:

Persamaan karakteristik sistem,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -20,6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20,6 = s^2 + a_1s + a_2 = 0$$

diperoleh $a_1=0$ dan $a_2=-20,6$

Persamaan karakteristik yang diinginkan adalah,

$$(s + 1,8 - j2,4)(s + 1,8 + j2,4) = s^2 + 3,6s + 9 = s^2 + \alpha_1s + \alpha_2 = 0$$

diperoleh $\alpha_1=3,6$ dan $\alpha_2=9$

dengan menggunakan persamaan (5.87), maka matrik penguat *observer* adalah,

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^* \right)^{-1} \begin{bmatrix} 9 + 20,6 \\ 3,6 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29,6 \\ 3,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,6 \\ 3,6 \end{bmatrix}$$

Metode-2 :

Dengan menggunakan persamaan (5.84), persamaan karakteristik sistem dapat dituliskan sebagai berikut,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} s & -20,6 + g_1 \\ -1 & s + g_2 \end{vmatrix} = 0$$

maka, $s^2 + g_2s - 20,6 + g_1 = 0$

persamaan karakteristik yang diinginkan, $s^2 + 3,6s + 9 = 0$

selanjutnya diperoleh, $g_1=29,6$ dan $g_2=3,6$

Akhir matrik *penguat observer* adalah,

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,6 \\ 3,6 \end{bmatrix}$$

Metode-3:

Menggunakan rumus **Ackermann**, seperti pada persamaan(5.86),

$$\mathbf{K}_e = \alpha_e(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dimana $\alpha_e(s) = s(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 3,6s + 9$

maka $\alpha_e(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3,6\mathbf{A} + 9\mathbf{I}$

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{A}^2 + 3,6\mathbf{A} + 9\mathbf{I}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,6 & 74,16 \\ 3,6 & 29,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,6 \\ 3,6 \end{bmatrix}$$

Program MATLAB

Program M-file dengan nama **ch8ex03.m** sebagai berikut,

```
A=[0 20.6; 1 0];
B=[0; 1];
C=[0 1]
Pe=[-1.8+j*2.4 -1.8-j*2.4];%desired observer eigenvalues
[K,Ae]=observer(A,B,C,Pe);%returns gain K and closed-loop sistem matrix
```

Hasil keluaran program,

```
Estimator gain vektor Ke
    29.6
     3.6
Open-loop Plant alih function:
Numerator    0    1    0
Denominator   1    0  -20.6
Error matrix A - Ke*C
           0  -9.0000
          1.0000 -3.6000
```

Soal latihan 3.1:

Tinjau sistem yang dituliskan dalam persamaan keadaan dan keluaran berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0]$$

Rancang *observer* dengan *full-state* sehingga *observer* teredam kritis dengan *eigenvalue*, $\mu_1 = -8$ dan $\mu_2 = -8$. Dengan langkah-langkah dan 3 metode di atas. Dan juga gunakan program MATLAB untuk menyelesaikannya.

Perancangan "Controller-Observer".

Perhatikan kembali sistem yang dinyatakan dengan persamaan (3.9) dan (3.10) dengan pengendalian umpan balik keadaan didasarkan pada keadaan teramati $\hat{\mathbf{x}}(t)$ yang dinyatakan dengan persamaan,

$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad \dots(3.11)$$

substitusi ke persamaan (3.10) diperoleh,

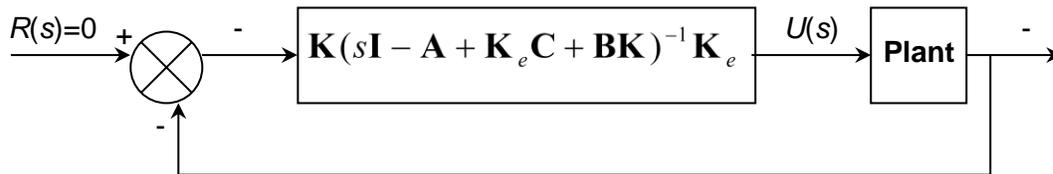
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}_e\mathbf{e}(t) \quad \dots(3.12)$$

Gabungkan persamaan ini dengan persamaan error (3.8), didapatkan bentuk matrik sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad \dots(3.13)$$

dimana

- A** = matrik sistem.
- B** = vektor kolom masukan (*input*).
- C** = vektor baris keluaran (*output*).
- p** = vektor baris yang berisi pole loop tertutup
- p_e = eigenvalue *observer* yang diinginkan.
- K** = Matrik penguatan umpan balik keadaan.
- K_e** = Matrik penguatan pengamat (*observer*).



Gambar 3.2 Sistem gabungan controller-observer.

Dalam program MATLAB telah dibangun fungsi $[K, K_e, A_c] = \text{ploceobs}(A, B, C, p, p_e)$ untuk merancang kombinasi *controller-observer*.

Contoh Soal 3.2:

Tinjau sistem yang dituliskan dalam persamaan keadaan dan keluaran berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Rancang suatu sistem kombinasi *controller-observer*, yang diharapkan pole-pole loop tertutup sistem pada $\mu_1 = -1,8 + j2,4$ dan $\mu_2 = -1,8 - j2,4$. Pilih *eigenvalue* matrik penguat observer $p_{e1} = p_{e2} = -8$.

Jawab :

Matrik vektor penguatan umpan balik keadaan \mathbf{K} dapat diperoleh dengan menggunakan **rumus Ackermann** sebagai berikut,

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})| = |s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 3,6s + 9 = \alpha_e(s)$$

sehingga diperoleh,

$$\alpha_e(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3,6\mathbf{A} + 9\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \\ 74,16 & 29,6 \end{bmatrix}$$

jadi,

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1][\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}]^{-1} \alpha_e(\mathbf{A}) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 29,6 & 3,6 \\ 74,16 & 29,6 \end{bmatrix} = [29,6 \quad 3,6]$$

Selanjutnya didapatkan sinyal pengendalian,

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[29,6 \quad 3,6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Anggaplah kita menggunakan pengendalian umpan balik keadaan teramati, bukan pengendalian umpan balik aktual, maka

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = -[29,6 \quad 3,6] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

telah dipilih *eigenvalue* matrik penguat observer $p_{e1} = p_{e2} = -8$. Sekarang akan kita cari matrik penguatan pengamat \mathbf{K}_e sebagai berikut,
 Persamaan karakteristik,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20,6 = s^2 + a_1s + a_2$$

diperoleh $a_1 = 0$ dan $a_2 = -20,6$

sedangkan, polynomial karakteristik yang dikehendaki adalah,

$$(s - p_{e1})(s - p_{e2}) = (s + 8)(s + 8) = s^2 + 16s + 64 = s^2 + \alpha_1s + \alpha_2$$

diperoleh $\alpha_1 = 16$ dan $\alpha_2 = 64$

dan matrik keteramatan,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \quad \mathbf{A}^* \mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (5.87), maka matrik penguatan pengamat adalah,

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* \right)^{-1} \begin{bmatrix} 64 + 20,6 \\ 16 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84,6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix}$$

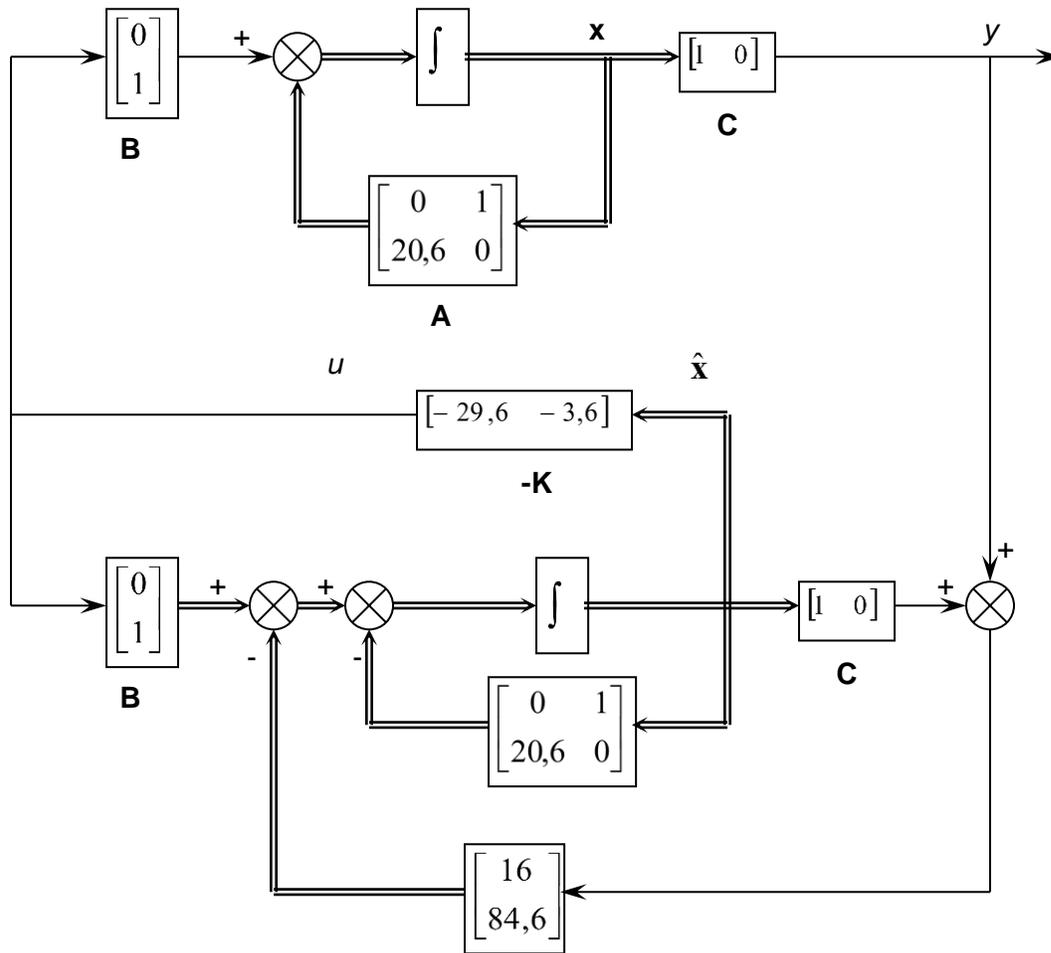
Dan persamaan keadaan pengamat adalah sebagai berikut,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e y$$

atau,

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93,6 & -3,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} y$$

Blok diagram sistem ini adalah sebagai berikut,

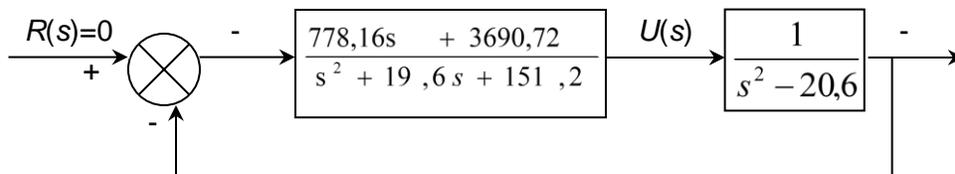


Gambar 3.3 Sistem umpan balik keadaan dengan observer.

Dengan mengacu pada gambar 3.3, fungsi alih *controller-observer* adalah sebagai berikut,

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e = \frac{778,16s + 3690,72}{s^2 + 19,6s + 151,2}$$

Sehingga blok digram sistem keseluruhan adalah,



Gambar 3.4 Blok diagram sistem *controller-observer*.

Dari gambar di atas terlihat bahwa sistem secara keseluruhan berorde-4, dengan demikian persamaan karakteristik untuk sistem,

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}||s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| &= (s^2 + 3,6s + 9)(s^2 + 16s + 64) = 0 \\ &= s^4 + 19,6s^3 + 130,6s^2 + 374,4s + 576 = 0 \end{aligned}$$

dan fungsi alih sistem loop tertutup keseluruhan adalah,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{778,16s + 3690,72}{s^4 + 19,6s^3 + 130,6s^2 + 374,4s + 576}$$

Program MATLAB

Dengan menggunakan fungsi $[\mathbf{K}, \mathbf{K}_e, \mathbf{A}_c] = \text{ploceobs}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_e)$ perancangan sistem kombinasi *controller-observer*, sebagai berikut,

```
A=[ 0  1; 20.6  0];
B=[0; 1];
C=[1 0]; D=0;
j=sqrt(-1);
P=[-1.8+j*2.4  -1.8-j*2.4]; % desired regulator roots
Pe=[-8  -8]; % desired observer roots
[K,Ke,Af]= placeobs(A,B,C,P,Pe); % returns gain K,Ke & closed-loop
system matrix
```

Hasil keluaran program,

```
Feedback gain vektor K :
                29.6   3.6

Estimator gain vektor Ke:
                16
                84.6

Open-loop Plant alih function:
Numerator      0   0   1
Denominator    1   0  -20.6

Controller-estimator alih function:
Numerator      0  778.16  3690.72
```

```

Denominator    1    19.6    151.2
Controlled system closed-loop alih function:
Numerator      0    0    0    778.16  3690.72
Denominator    1    19.6    130.6    374.4    576
Combined controller observer sistem matrix
      0    1.0000    0    0
    -9.0000  -3.6000  29.6000  3.6000
      0    0  -16.0000  1.0000
      0    0  -64.0000    0

```

Dasi hasil diatas fungsi alih *controller-observer* adalah,

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{778,16s + 3690,72}{s^2 + 19,6s + 151,2}$$

Fungsi alih loop tertutup untuk plant terkendali,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{778,16s + 3690,72}{s^4 + 19,6s^3 + 130,6s^2 + 374,4s + 576}$$

Soal latihan 5.7 :

Tinjau sistem yang dituliskan dalam persamaan keadaan dan keluaran berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Rancang suatu sistem kombinasi *controller-observer*, yang diharapkan pole-pole loop tertutup sistem pada $-1 \pm j2$. Pilih *eigenvalue* matrik penguat observer $p_{e1} = p_{e2} = -8$. Dengan cara analitis dan dengan menggunakan program MATLAB seperti contoh soal 5.24.

4 Perancangan Regulator Optimal

Obyek dari perancangan regulator optimal adalah menentukan sinyal pengendalian (*control law*) $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ yang akan membawa sistem dari keadaan mula-mula ke keadaan (dengan masukan nol) akhir yang indeks kinerjanya minimum. Indeks kinerja dipilih yang terbaik diantara kinerja pengendali dan biaya pengendali. Indeks kinerja digunakan secara luas dalam perancangan pengendalian optimal yang dikenal dengan sebutan indeks kinerja kwadratik (*quadratic performance index*) dan didasarkan pada kriteria error minimum dan energi minimum. Perhatikan plant yang digambarkan dengan persamaan berikut,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \dots(4.1)$$

Persoalannya adalah bagaimana menentukan harga $\mathbf{K}(t)$ dari hukum pengendalian berikut,

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad \dots(4.2)$$

Diminimumkan dengan indeks kinerja kwadratik / fungsi kriteria \mathbf{J} sebagai berikut,

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})dt \quad \dots(4.3)$$

$$\text{Min } \mathbf{J} = \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})dt \quad \dots (4.4)$$

Yang memenuhi bentuk persamaan kendala:

$$\dot{x} = f(x, u); \mathbf{x} \in R^n, u \in R^m \quad \dots (4.5)$$

dimana

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \text{matrik semidefinit positif.} \\ \mathbf{R} &= \text{metrik simetris real.} \end{aligned}$$

Persamaan (4.4) di atas merupakan permasalahan optimasi dimana akan dicari sebuah trajektoriyang memungkinkan $(x(t), u(t))$ yang meminimumkan sebuah fungsi kriteria (4.3). Pada keadaan minimum, diperoleh fungsi kriteria:

$$J(x, u) = \int_0^T L(x, u)dr + V(x(T)) \quad \dots (4.6)$$

Dalam persamaan (4.3) di atas, \mathbf{Q} simidefinit positif jika semua minor adalah tidak negatif merupakan matrik pembobot pada error state, dan \mathbf{R} merupakan matrik pembobot pada input

yang mempunyai sifat definit positif. Pemilihan elemen-elemen \mathbf{Q} dan \mathbf{R} mengikuti pembobotan relatif masing-masing variabel keadaan dan masing-masing masukan pengendali.

Untuk memperoleh jawab dari dari persoalan di atas, digunakan metode *Lagrange multipliers*. Untuk menyederhanakan persoalan fungsi dinyatakan dengan tanpa kendala sebagai berikut,

$$L(\mathbf{x}, \lambda, u, t) = [\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u}] + \lambda'[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}] \quad \dots(4.7)$$

Variabel λ merupakan fungsi dari waktu dan sering dikatakan sebagai *variabel costate*.

Harga optimal diberi tanda (*), diperoleh dengan menggunakan turunan parsial sama dengan nol sebagai berikut,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^* - \dot{\mathbf{x}}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^* \quad \dots(4.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2\mathbf{R}\mathbf{u}^* + \lambda'\mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^* = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\lambda'\mathbf{B} \quad \dots(4.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\mathbf{x}'^*\mathbf{Q} + \dot{\lambda}' + \lambda'\mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = -2\mathbf{Q}\mathbf{x}^* - \mathbf{A}'\lambda \quad \dots(4.10)$$

Anggap bahwa $\mathbf{p}(t)$ matrik definit positif dan simetrik, maka bentuk persamaan (4.10)

$$\dot{\lambda} = 2\mathbf{p}(t)\mathbf{x}^* \quad \dots(4.11)$$

Substitusi persamaan (4.11) kedalam persamaan (4.10), diperoleh sinyal pengendalian loop tertutup optimal sebagai berikut,

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{p}(t)\mathbf{x}^* \quad \dots(4.12)$$

Turunan dari persamaan (4.11), diperoleh

$$\dot{\lambda} = 2(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{x}^* + \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}}^*) \quad \dots(4.13)$$

Substitusikan persamaan (4.9) dengan persamaan (4.10), diperoleh persamaan berikut ini

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{p}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}'\mathbf{p}(t) - \mathbf{Q} + \mathbf{p}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{p}(t) \quad \dots(4.14)$$

Persamaan (4.14) dikenal sebagai **Persamaan Riccati**. Kondisi batas persamaan Riccati adalah $\mathbf{p}(t_f)=\mathbf{0}$.

Untuk sistem linier tidak bervariasi terhadap waktu, maka $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, bila proses adalah dalam waktu yang takterbatas ($t_f = \infty$), persamaan(5.101) menjadi lebih sederhana sebagai berikut,

$$\mathbf{pA} - \mathbf{A}'\mathbf{p} + \mathbf{Q} - \mathbf{pBR}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \dots(4.12)$$

Dalam *MATLAB Control Sistem Toolbox* fungsi $[\mathbf{k},\mathbf{p}]=\text{lqr2}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Q},\mathbf{R})$ dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan aljabar Riccati.

Fungsi $[\tau,\mathbf{p},\mathbf{K},\mathbf{t},\mathbf{x}]=\text{riccati}$ dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan Riccati dalam domain waktu. Kembali ke penyelesaian matrik persamaan Riccati $\mathbf{p}(\tau)$, faktor penguat umpan balik optimal, dan tanggapan keadaan mula-mula $\mathbf{x}(t)$. Untuk menggunakan persamaan tersebut, kita harus mendeklarasikan fungsi $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_r,\mathbf{x}_0]=\text{system}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_r,\mathbf{x}_0)$ mengandung matrik sistem dan matrik indeks kinerja, dan disimpan dengan nama **system.m**.

Contoh Soal 3.2

Plant yang dinyatakan dengan persamaan keadaan dan keluaran berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}$$

Cari sinyal pengendalian optimal dengan meminimumkan idek kinerja, menggunakan fungsi kriteria sebagai berikut,

$$\mathbf{J} = \int_0^{10} \left(4x_1^2(t) + 3x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{1}{2}u^2 \right) dt$$

Harga keadaan dan harga pengendalian tanpabatas. Keadaan mula-mula $x_1(0)=2$, $x_2(0)=0$ dan $x_3(0)=-2$.

Jawab :

Dari sistem tersebut di atas diperoleh matrik,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dipilih matrik simetri,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$$

selanjutnya elemen matrik \mathbf{p} dicari dengan menggunakan persamaan matrik Riccati sebagai berikut,

$$\mathbf{pA} + \mathbf{A}^T \mathbf{p} + \mathbf{Q} - \mathbf{pBR}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

dengan memasukan matrik \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} dan \mathbf{R} , diperoleh matrik \mathbf{p} berikut,

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,5755 & 8,4801 & 1,4142 \\ 8,4801 & 11,0060 & 1,7390 \\ 1,4142 & 1,7390 & 0,4982 \end{bmatrix}$$

Sedangkan penguat umpan balik optimal adalah,

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10,5755 & 8,4801 & 1,4142 \\ 8,4801 & 11,0060 & 1,7390 \\ 1,4142 & 1,7390 & 0,4982 \end{bmatrix} = [2,8284 \quad 3,4780 \quad 0,9963]$$

sinyal pengendalinya (*control law*) adalah,

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} = -[2,8284 \quad 3,4780 \quad 0,9963] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

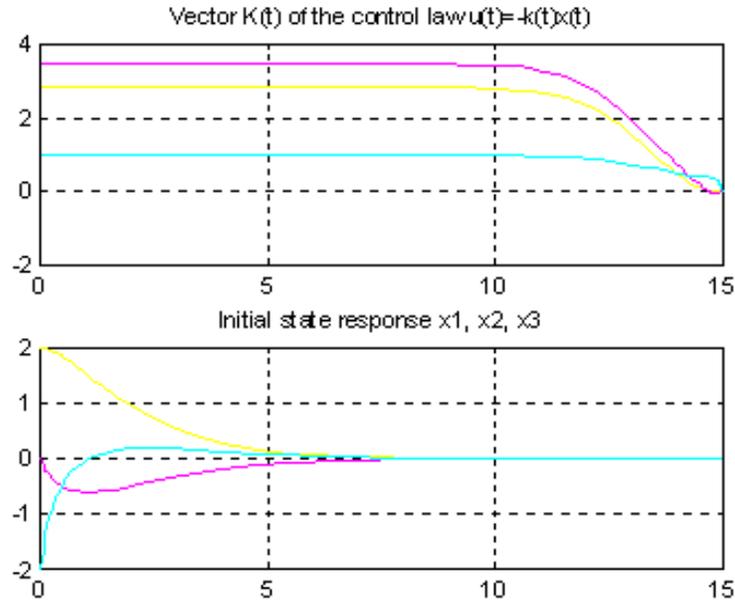
Program MATLAB

Harga K dan p ditentukan dengan fungsi **lqr2** yang disediakan oleh *MATLAB Control Sistem Toolbox*. Program selengkapnya adalah sebagai berikut,

```
function [A,B,Q,R,t0,tf,x0]=sistem(A,B,Q,R,t0,tf,x0)
A=[0 1 0; 0 0 1;0 -4 -5]; B=[0;0; 1];
Q=[4 0 0; 0 3 0;0 0 2];R=.5;
t0=0;tf=15;
x0=[2 0 -2];
[K,p]=lqr2(A,B,Q,R);
[tt,p,k,t,x]=riccati
subplot(211), plot(tt,k), title('Vektor K(t) of the control law u(t)=-
k(t)x(t)'),grid, pause
subplot(212), plot(t,x),title('Initial state response x1, x2,x3'), grid
subplot(111)
```

Hasil keluaran program,

```
K =
    2.8284    3.4780    0.9963
P =
   10.5755    8.4801    1.4142
    8.4801   11.0060    1.7390
    1.4142    1.7390    0.4982
```



Gambar 4.1 Vektor penguatan umpan balik optimal $K(t)$ dan tanggapan kondisi awal $x(t)$.

Soal latihan 4.1

Cari sinyal pengendalian optimal u untuk sistem yang didefinisikan,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sedemikian rupa sehingga indeks kinerja dapat diminimumkan dengan fungsi,

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{x} + u^2) dt$$

4.1 Linear Quadratic Regulation (LQR)

Bab ini akan membahas tentang kontrol optimal LQR – Linearquadratic regulator, yang merupakan salah satu jenis kontrol optimal, dimana tujuan dari perancangan adalah menentukan sebuah aturan kontrol $u = \alpha(x)$ yang menstabilkan sebuah kondisi kesetimbangan. Tahapan

untuk mendapatkan kondisi tersebut, adalah dengan cara menyelesaikan variabel keadaan $x(t)$ dan menentukan $u(t)$.

4.1.1 Perancangan LQR untuk Sistem Kontinyu

Permasalahan dalam LQR adalah:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad x \in R^n, u \in R^m, \text{ dimana nilai awal } x_0 \text{ diberikan}$$

Fungsi kuadratik diberikan:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})dt + \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t_f)P \mathbf{x}(t_f)$$

Dimana Q, R dan P adalah simetrik dan semidefinit positif. X adalah variabel keadaan, u adalah vektor kontrol. Untuk memeproleh kontrol yang optimal, maka dapat diaplikasikan prinsip maksimum, dengan menghitung Hamiltonian H:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q_x \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T Q_u \mathbf{u} + \lambda^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}).$$

Dengan menggunakan prinsip bahwa harus memenuhi kondisi berikut ini:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ -\dot{\lambda} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = Q_x \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \lambda & \lambda(T) &= P_1 \mathbf{x}(T) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = Q_u \mathbf{u} + \lambda^T \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Kondisi yang diperoleh adalah:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda$$

Dan juga dapat dituliskan sebagai berikut, besarnya vektor kontrol yang menghasilkan optimal trajektory dari $x(t_0)$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$$

Dengan memasukkan bentuk dinamika bahwa: $\lambda(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t)$, maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})\mathbf{x}, \\ \implies & -\dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{x} = Q_x \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Persamaan di atas akan terpenuhi jika:

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + Q_x, \quad \mathbf{P}(T) = P_1.$$

Dengan laju terhadap variabel P yang menghasilkan kondisi optimal, maka persamaan di atas memenuhi persamaan berikut ini:

$$0 = \mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{PBR}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan diferensial matriks dari P(t). Penyelesaian persamaan tersebut secara konsep tidak ada perbedaan dengan penyelesaian untuk kondisi awal persamaan diferensial biasa, dengan cara backward terhadap waktu. Persamaan di atas dinamakan persamaan Riccati.

Sebuah sifat yang penting dari permasalahan kontrol saat dituliskan bahwa P(t) dapat diselesaikan dengan tanpa mengetahui baik x(t) maupun u(t). Hal ini mengikuti dua kondisi batas yang dipisahkan untuk menyelesaikan kondisi final dan baru kemudian digunakan untuk menyelesaikan kondisi awal. P(t) akan terpenuhi, bila diaplikasikan input optimal u(t0) sebagai berikut:

$$u(t) = -Q_u^{-1} B^T P(t)x.$$

Dan kemudian untuk menyelesaikan persamaan dinamika awal dalam forward dari kondisi awal x(0) = x0. Sebuah feedback kontrol menggambarkan bagaimana pergerakan variabel keadaan menuju ke titik awalnya.

Variasi yang penting untuk permasalahan ini bila dipilih T = ∞ dan dilakukan eliminasi nilai fungsi biaya dengan men set P1 = 0, maka akan memberikan fungsi biaya:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_x x + u^T Q_u u) dt.$$

Karena tidak mempunyai suatu fungsi biaya, tidak ada kendala pada nilai final P(t), maka dapat dilakukan dengan menentukan P sebuah konstanta dengan menyelesaikan persamaan Riccati di atas, sehingga:

$$PA + A^T P - PBQ_u^{-1} B^T P + Q_x = 0.$$

Persamaan Riccati tersebut, memberikan penyelesaian untuk input adalah sebagai berikut:

$$u = -Q_u^{-1} B^T P x.$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{K}$$

Persamaan di atas merepresentasikan bahwa konstanta gain $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ dimana \mathbf{P} merupakan penyelesaian persamaan Riccati.

Implikasi dari hasil tersebut sangat penting, pertama jika $Q > 0$ dan hukum kontrol sesuai dengan nilai fungsi biaya minimum, maka harus dipunyai bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$, sedangkan fungsi biaya yang lain akan unbounded. Ini berarti bahwa kontrol optimal akan menggerakkan sembarang keadaan \mathbf{x} ke titik asalnya yang dapat dicapai dengan mengaplikasikan sebuah feedback $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ untuk \mathbf{K} yang dipilih sesuai dengan sistem close loop di atas.

Dalam menurunkan sebuah regulator optimal kuadratik, maka harus dipilih $R > 0$ karena akan munculnya nilai inversenya. Dan juga $Q > 0$ sehingga integral dari fungsi biaya hanya akan bernilai 0 pada saat $\mathbf{x} = 0$, tetapi terkadang akan ditemui kasus yang akan menunjukkan bahwa $Q\mathbf{x} \geq 0$. Untuk kasus ini maka akan diambil sebuah hubungan: $Q\mathbf{x} = \mathbf{H}'\mathbf{H}$, sehingga fungsi biaya menjadi:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u} dt = \int_0^{\infty} \|\mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u} dt.$$

Penyelesaian optimal akan diperoleh pada saat pasangan (A, H) menjadi terdeteksi (atau dikatakan observable). Ini akan membuat sebuah intuisi bahwa $y = \mathbf{H}\mathbf{x}$ sebagai suatu output. Jika y bersifat tidak observable maka kemungkinan kondisi awalnya tidak nol dan diperlukan $Q\mathbf{x} \geq 0$ akan memenuhi sembarang kondisi yang menyebabkan observable.

Teorema

Perhatikan bahwa sebuah sistem kontrol linier, dengan fungsi biaya kuadratik:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u} dt.$$

Diasumsikan bahwa (A, B) reachable, dengan $Q\mathbf{x} = Q\mathbf{x}' \geq 0$ dan $R = R'$. selanjutnya diasumsikan bahwa $R = \mathbf{H}'\mathbf{H}$ dan sistem linier dengan matriks dinamika A dan output H adalah observable.

Kontrol optimal akan memenuhi:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{Q}_u^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}_x,$$

Dan fungsi biaya minimum akan dipenuhi dari kondisi awal $\mathbf{x}(0)$ yang diberikan oleh $J^* = \mathbf{x}'(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$.

4.1.2 Pemilihan pembobot LQR

Sebuah pertanyaan didalam perancangan LQR adalah bagaimana menentukan matriks pembobot Q dan R. Pemilihan untuk kedua matrik pembobot tersebut, dapat dilakukan dengan menggunakan sebuah matrik pembobot diagonal:

$$Q_x = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{bmatrix}, \quad Q_u = \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_n \end{bmatrix}$$

4.1.3 Perancangan LQR untuk Sistem Diskrit

Bentuk persamaan dinamika sistem dalam domain diskrit dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut ini:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k;$$

di mana x_k dan u_k masing-masing adalah vektor bilangan real dengan dimensi n dan m , variabel keadaan dan kontrol u_k tidak dibatasi ($x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ untuk semua k), dan gangguan w_k adalah vektor acak independen (independen dari x_k dan u_k), dengan distribusi probabilitas yang diketahui. Biasanya nilai rata-rata dari disturbance adalah nol. A dan B merupakan matrik dinamika sistem dan B adalah matrik input.

Dalam kasus LQR domain diskrit, akan dilakukan minimumisasi terhadap fungsi berikut ini:

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k) + x_N^T Q_N x_N \right\}$$

Dimana E merupakan operator ekspektasi.

dimana ekspektasi terhadap gangguan w_0, \dots, w_{N-1} . Dalam hal ini diasumsikan bahwa matriks Q_k , $k = 0, \dots, N$ (merupakan fungsi biaya pada setiap tahap dan matriks biaya pada tahap akhir) mempunyai sifat adalah semidefinit positif (dilambangkan $Q_k \succeq 0$). Matriks fungsi biaya ini adalah dibawa pada keadaan mendekati R_k , $k = 0, \dots, N-1$ (atau dinamakan sebagai matriks biaya input) yang nilai nya adalah positif pasti. Asal $x = 0$ (masalah regulasi) menggunakan istilah $x_k^T Q_k x_k$. Didalam sistem linier, dikatakan bahwa dengan tidak adanya gangguan kita selalu dapat membawa n variabel keadaan ke 0 pada paling banyak n langkah (ingat bahwa n adalah dimensi ruang keadaan), tetapi kemungkinan memerlukan input kontrol yang besar. Ketentuan tambahan $u_k^T R_k u_k$ menghukum input besar dan dengan demikian berusaha untuk memperoleh desain yang lebih realistis karena sistem selalu harus memenuhi pada persamaan kendala input. Pada saat

tanpa adanya gangguan w_k , dikatakan sebagai masalah Linear-Quadratic Regulator (LQR), dimana telah dibahas untuk domain kontinyu pada sub bab di atas.

Pemilihan matriks pembobotan Q_k dan R_k dalam fungsi biaya bukan masalah yang sederhana. Formulasi dari LQ mengatasi terjadinya kesulitan di dalam masalah kontrol klasik, di mana spesifikasi diberikan dalam hal batas waktu penyelesaian, laju perubahan (*slew rate*), stabilitas dan fase margin, serta spesifikasi lain pada sinyal input dan output, ke dalam pemilihan besarnya koefisien dari matriks fungsi kriteria / biaya. Dalam praktiknya, prosedur berulang untuk menentukan matriks pembobot dilakukan bersamaan dengan menganalisis sifat-sifat sinyal kontrol, koefisien matriks pada fungsi biaya disesuaikan dengan performansi variabel state dan kemudian diiterasi sebagai bentuk desain baru kemudian desain baru ini diuji ulang, dan seterusnya. Pengujian diperlukan dalam setiap kasus untuk memverifikasi bahwa perbedaan antara variabel state dalam dimensi real dengan model matematika nya ditentukan oleh matriks A_k , B_k yang berdampak pada tidak terjadi penurunan kinerja yang berlebihan.

Minimumisasi terhadap fungsi kuadrat di atas, adalah sebagai berikut:

$$\min_u x^T A x + u^T C u + 2x^T B u = \min_u \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

Solusinya adalah $u = -C^{-1}B^T x$ dan nilai minimum sama dengan $x^T S x$, di mana $S = A - BC^{-1}B^T$ disebut komplement Schur dari C dalam matriks berikut ini (Regulator & Boyd, 2009),

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

Di dalam bagian ini akan diuraikan tentang fungsi kriteria optimal dalam permasalahan LQR,

$$J_N^*(x_N) = x_N^T Q_N x_N$$

$$J_k^*(x_k) = \min_{u_k} E_{w_k} \{ x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k + J_{k+1}^*(A_k x_k + B_k u_k + w_k) \}$$

Penyelesaian secara rekursi

$$J^*(x_k) = \min_{u_k} \{ x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k + E_{w_k} [(A_k x_k + B_k u_k + w_k)^T P_{k+1} (A_k x_k + B_k u_k + w_k)] \} + q_{k+1}$$

Saat dilakukan evaluasi terhadap ekspektasi, semua suku di dalam persamaan dinamika LQR adalah linier, dan w_k adalah dengan rata-rata nol, sehingga diperoleh;

$$J^*(x_k) = \min_{u_k} \{ x_k^T (A_k^T P_{k+1} A_k + Q_k) x_k + u_k^T (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k) u_k + 2x_k^T (A_k^T P_{k+1} B_k) u_k \} + E_{w_k} [w_k^T P_{k+1} w_k].$$

Pada suku terakhir persamaan di atas, dapat dituliskan

$$E_{w_k} [w_k^T P_{k+1} w_k] = E_w [\text{Tr}(P_{k+1} w_k w_k^T)] = \text{Tr}(P_{k+1} W_k)$$

minimalisasi atas u_k yaitu dengan minimalisasi sebagian fungsi kuadrat, dengan matriks berikut ini:

$$X = \begin{bmatrix} A_k^T P_{k+1} A_k + Q_k & A_k^T P_{k+1} B_k \\ B_k^T P_{k+1} A_k & B_k^T P_{k+1} B_k + R_k \end{bmatrix}$$

Asumsi bahwa $R_k > 0$, dan matriks $B_k^T P_{k+1} B_k + R_k$ adalah definit positif.

$$u_k = K_k x_k,$$

Dengan

$$K_k = -(B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k$$

Dan dengan menggunakan komplemen dari Schur,

$J_k^*(x_k) = x_k^T P_k x_k + q_k$, dengan

$$P_k = A_k^T P_{k+1} A_k + Q_k - A_k^T P_{k+1} B_k (B_k^T P_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k$$

Dan

$$q_k = q_{k+1} + \text{Tr}(P_{k+1} W_k)$$

dengan catatan bahwa untuk semua $k > 0$, kita mempunyai $P_k \geq 0$, dimana dapat dilihat bahwa besarnya fungsi biaya $J_k^*(x_k)$ pada kondisi awal adalah bounded, sehingga:

$$\begin{aligned}
 J_0^*(x_0) &= x_0^T P_0 x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \text{Tr}(P_{k+1} W_k) \\
 &= \text{Tr}(P_0 X_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{Tr}(P_{k+1} W_k)
 \end{aligned}$$

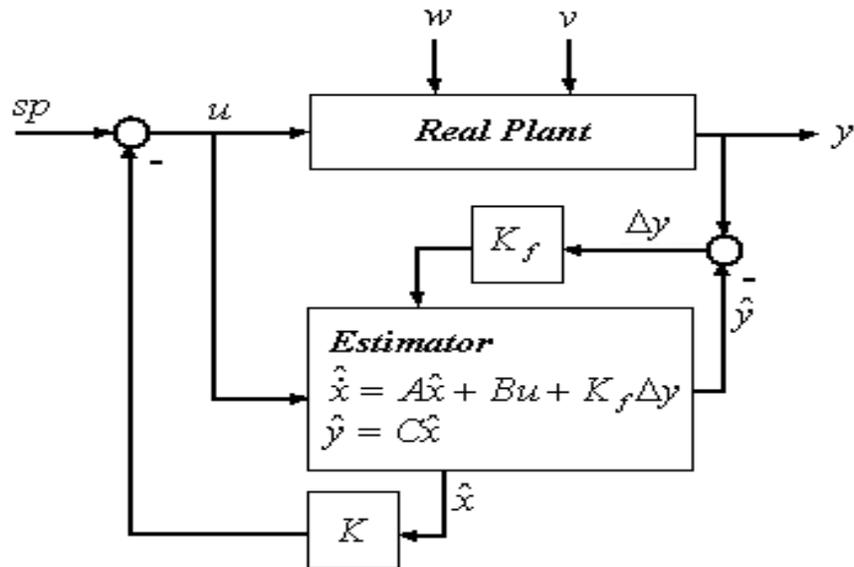
Dengan $X_0 = x_0 x_0^T$

4.2 LQG - Linear Quadratic Gaussian

Dalam mendesain sebuah kontrol pada plant, selama ini plant dimodelkan dalam bentuk persamaan matematis maupun dalam bentuk *transfer function* untuk mendapatkan kondisi yang sama serta nilai-nilai yang tepat. Pada kenyataannya dalam lapangan, hal tersebut tidak benar karena persamaan matematis maupun pemodelan dalam bentuk fungsi transfer merupakan sebuah pendekatan pada plant sebenarnya. Perkembangan teori kontrol dimulai dari kontrol konvensional, modern hingga kepakaran memiliki dampak yang signifikan dalam perkembangan dunia industri maupun sistem kendali. Masing-masing memiliki kelebihan dan kekurangan, sehingga dibutuhkan sebuah kontrol yang optimal untuk mendapatkan performa kontrol yang baik. Sistem kontrol bertujuan untuk mengontrol suatu keadaan tertentu supaya proses dapat berjalan mengikuti *setpoint* yang diinginkan. Hal yang harus diperhatikan dalam mendesain sebuah kontrol salah satunya harus memiliki kemampuan *robustness*, dimana sistem kontrol mampu menjamin kondisi stabil terhadap gangguan sesuai dengan parameter yang diinginkan berdasarkan kriteria seperti *maximum overshoot*, *settling time*, *error steady state*, dsb. (Lewis, 1991)

Kendali optimal *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) adalah teknik kendali modern yang diimplementasikan dalam bentuk ruang dan waktu (*state space*) yang digunakan untuk mendesain dinamik optimal regulator. Pada perjalanan perkembangan konsep, LQR mengalami pengembangan yaitu dengan mengikutsertakan estimator optimal (filter Kalman) yang berfungsi mengestimasi variabel keadaan dan menyaring *noise*.

Linear Quadratic Gaussian (LQG) bekerja pada model dinamika kapal yang dibentuk pada ruang persamaan keadaan dalam kondisi frekuensi tinggi dan frekuensi rendah, dan memasukkan kriteria gangguan arus, serta gangguan angin. Gangguan tersebut merupakan suatu bentuk variabel acak yang berdistribusi gaussian. (Siti Aisjah, 2005). Berikut ini merupakan desain kendali LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) secara umum yang ditunjukkan pada gambar 2.3 sistem kendali umum *linear quadratic gaussian* :



Gambar 4.2 Blok diagram sistem kendali LQG

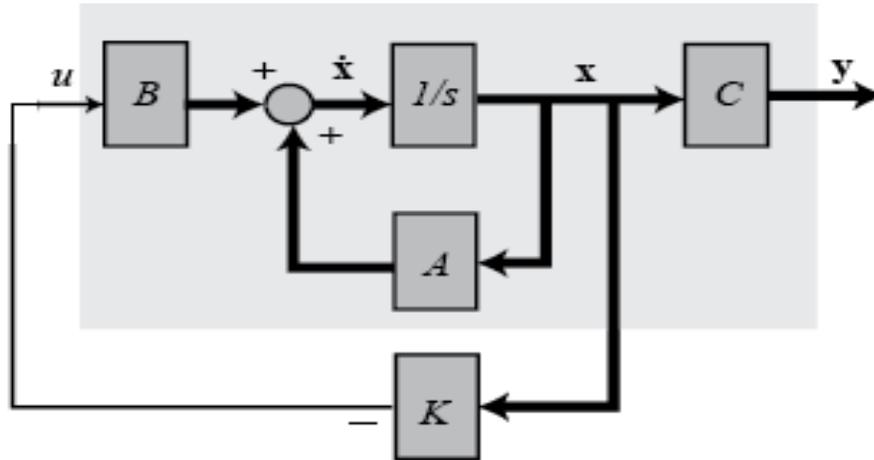
Dimana masing-masing nilainya dimodelkan dalam bentuk *state space*. Model *state space* :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw \quad (2.26)$$

$$y = cx + v \quad (2.27)$$

Dengan:

- u : *Input* proses.
- y : *Output* proses.
- w : gangguan proses.
- v : gangguan pengukuran (*white noise*)
- A : Matrik *plant*.
- B : Matrik kendali *input*.
- C : Matrik pengukuran.
- K : Penguatan umpan balik (Kalman).
- K_f : Penguatan filter Kalman.



Gambar 2.4 Sistem Kontrol *Close-loop regulator* (Lewis, 1992)

Pada gambar 2.4 diatas menjelaskan sinyal u diperlukan sebagai penguat pengendali K (*Regulator*) dan penguat estimator K_f (Filter Kalman) yang optimal. Agar perancangan sistem kontrol stabil, diperlukan *controller* dan *estimator* yang stabil. Untuk mendapatkan kondisi tersebut, pencarian harga K dilakukan secara seolah-olah sistem bersifat deterministik yaitu dengan metode LQR, sedangkan pencarian harga K_f optimal dilakukan dengan sistem bersifat *stokastik*, yaitu *performance index* kesalahan minimum.

Besarnya harga :

$$K = -R_c^{-1} B^T S \quad (2.28)$$

Untuk mencari besarnya S dapat menggunakan persamaan *Aljabar Riccati Equation* (ARE):

$$A^T S + SA - SBR_c^{-1} B^T S + Q_c = 0 \quad (2.29)$$

dengan *performance index* :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt \quad (2.30)$$

dengan asumsi : $Q_c \geq 0, R_c > 0$

dimana Q_c menentukan matriks keadaan dan R_c menentukan matriks kendali keduanya merupakan matrik pembobotan. Penentuan besarnya matrik Q_c dan R_c tergantung kebutuhan (Lewis, F.L., 1992).

Filter Kalman merupakan *estimator* optimal yang berfungsi mengestimasi variabel keadaan dan menyaring *noise* (derau). Desain *estimator* bekerja dalam melakukan proses estimasi suatu variabel keadaan dan menentukan hasil estimasi tersebut apakah mampu mengestimasi variabel keadaan sesuai yang diharapkan. Proses optimasi dilakukan dengan cara menekan nilai *error* kovarian sekecil mungkin. Sehingga semakin kecil nilai error kovarian semakin kecil pula nilai *cost function*-nya, maka indeks performansinya atau nilai *cost function*-nya dapat ditulis :

$$J = E\{[\hat{x} - x]^T [\hat{x} - x]\} \quad (2.31)$$

Keterangan :

\hat{x} = harga estimasi dari variabel x dalam fungsi waktu.

J = harga indeks performansi sistem

Harga estimasi variabel keadaan optimal \hat{x} didapatkan dari persamaan sistem dinamik filter Kalman yakni sebagai berikut :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - \hat{y}) \quad (2.32)$$

Gain Filter Kalman :

$$K_f = PC^T R_f^{-1} \quad (2.33)$$

Matriks P diperoleh dari persamaan *Aljabar Riccati Equation* (ARE) :

$$0 = PA^T + AP - PC^T R_f^{-1} CP + Q \quad (2.34)$$

Dengan asumsi-asumsi matriks A dan B terkendali, dan C teramat $Q_f > 0, R_f > 0$, maka filter Kalman akan berada dalam kondisi stabil asimtotik. Matriks A dan B harus memiliki syarat keterkendalian dan matriks C harus memiliki syarat matrik keteramatan. Hal tersebut dapat diuji dengan bantuan *software Matlab* dengan memasukkan persamaan rumus 2.39 dan 2.40. Matriks Q_f dan R_f adalah *noise covariance*. Matriks pembobot pada indeks performansi dipilih untuk menggunakan performansi desain kendali. Untuk menentukan matriks pembobot Q_f dan R_f dapat dilakukan menggunakan metode *trial-error* atau *Brysons Rule*.

Apabila semua *state vector* x adalah *controllability*, maka jika satu mampu mencari sebuah input kendali untuk menggerakkan sistem tersebut dari nol sampai pada kondisi state yang diharapkan di suatu waktu final tertentu, sistem tersebut memiliki matriks *controllability*. Matriks tersebut didapatkan dengan menggunakan bentuk persamaan berikut ini,

$$U_k = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{k-1}B] \quad (2.35)$$

Matriks tersebut memenuhi persyaratan *controllability* apabila kondisi $\text{rank}(U_n) = n$. Sedangkan untuk memenuhi persyaratan *observability* apabila matriks mempunyai $\text{rank}(V_k) = n$ (Aisjah, 1994). Bentuk persamaan matriksnya adalah sebagai berikut ini,

$$V_k = [CA^{k-1} \ \dots \ CA \ C]^T \quad (2.36)$$

Controllability memiliki kemampuan untuk mengontrol kondisi variabel state sistem dengan cara memberikan inputan. Sedangkan *observability* memiliki kemampuan untuk menentukan kondisi *internal state* dengan cara melakukan pengukuran terhadap outputnya. (Lewis, 1993)

5 Perancangan Kontrol optimal

5.1 Perancangan Kontrol Optimal pada Manuver Kapal

Hasil nilai koefisien hidrodinamika diatas didapatkan untuk mendapatkan variabel-variabel persamaan model Nomoto yang merupakan dilakukan linierisasi variabel dari pemodelan Christensen dan Blanke sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} m - Y_{\dot{v}} & mx_G - Y_{\dot{r}} & 0 \\ mx_G - N_{\dot{v}} & I'_z - N_{\dot{r}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_v & mu_0 - Y_r & 0 \\ -N_v & mx_G u_0 - N_r & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\delta} \\ N_{\delta} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_R$$

$$\begin{bmatrix} 0,04366 & 0,00237 & 0 \\ 0,00242 & 0,00801 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,02239 & 0,01554 & 0 \\ 0,00220 & 0,00505 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00622 \\ -0,00311 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_R \quad (3.1)$$

Dengan konsep invers matriks, didapatkan model persamaan ruang keadaan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5062 & -0,3967 & 0 \\ -0,1217 & -0,7503 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1663 \\ -0,4385 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_R \quad (3.2)$$

Pemodelan selanjutnya dilakukan terhadap gelombang pada frekuensi rendah. Pemodelan yang dilakukan berdasarkan pada persamaan 2.19, dengan variabel keadaan \dot{x}_L adalah $\dot{x}_L = [x_L, y_L, \psi_L, u_L, v_L, r_L]^T$. Kemudian dilakukan perhitungan A_L , B_L , dan E_L yang merupakan matrik sistem pada gangguan frekuensi rendah seperti yang terdapat pada persamaan 2.20.

$$A_L = \begin{bmatrix} -0,5062 & -0,3967 & 0 \\ -0,1217 & -0,7503 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$B_L = \begin{bmatrix} 0,1663 \\ -0,4385 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$E_L = \begin{bmatrix} 23,2862 & -6,8899 & 0 \\ -7,0353 & -126,9255 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Gelombang laut pada frekuensi tinggi merupakan gelombang yang dibangkitkan oleh angin. Pemodelan pada gelombang dengan frekuensi tinggi dilakukan dengan mengacu pada persamaan 2.23 dalam bentuk *state space*. Pemodelan yang dilakukan menghasilkan persamaan matriks seperti pada persamaan 3.6 berikut ini :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{\psi}_H \\ \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \\ \dot{\xi}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\zeta\omega_0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\zeta\omega_0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\zeta\omega_0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 \\ & & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ \psi_H \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_\psi \end{bmatrix} + K_w \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_\psi \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Dengan $\omega_0 = 0.4 \sqrt{\frac{g}{H_s}}$, $\zeta = 0.1$, dan $K_w = 2\zeta\omega_0\tau_\omega$. Dimana nilai $g = 9.8$ m/s, $H = 0,65$ meter, $\tau_\omega = 3,16$. Sehingga model gelombang laut pada persamaan di atas menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{\psi}_H \\ \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \\ \dot{\xi}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,31064 & 0 & 0 & -2,4124 & 0 & 0 \\ 0 & -0,31064 & 0 & 0 & -2,4124 & 0 \\ 0 & 0 & -0,31064 & 0 & 0 & -2,4124 \\ & & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ \psi_H \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_\psi \end{bmatrix} + 0,9822 \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_\psi \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Pemodelan dinamika kapal dengan gangguan gelombang yang terdapat pada persamaan 2.23 . Pada persamaan tersebut dilakukan pemisahan terhadap pemodelan frekuensi rendah dan frekuensi tinggi sesuai dengan persamaan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} A_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_H \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -0,5062 & -0,3967 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 0 & -2,4124 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -0,1217 & -0,7503 & 0 & -0,31064 & 0 & 0 & 0 & -2,4124 & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,31064 & 0 & 0 & 0 & -2,4124 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 & -0,31064 & 0 & 0 & -2,4124 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0,1663 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 0 & -0,4385 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$E = \begin{bmatrix} E_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 23,2862 & -6,8899 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -7,0353 & -126,9255 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,9822 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9822 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9822 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Masing-masing matriks diatas merupakan matriks gabungan dengan kondisi gangguan kondisi frekuensi rendah dan frekuensi tinggi sehingga menghasilkan matriks masing-masing 12x12. Sedangkan model pengukuran ditunjukkan dalam matriks z.

Dengan variabel keadaan sebagai berikut :

$$x = [x_L, y_L, \psi_L, u_L, v_L, r_L, \xi_x, \xi_y, \xi_\psi, x_H, y_H, \psi_H]^T, u = \delta_R, w = [w_u, w_v, w_r, w_x, w_y, w_\psi]^T.$$

$$z_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ \psi_L \\ u_L \\ v_L \\ r_L \\ x_H \\ y_H \\ \psi_H \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_\psi \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Matriks diatas sebagai model pengukuran dalam frekuensi tinggi sesuai dengan persamaan 2.16. Dalam merancang sistem kendali pada *Linier Quadratic Gaussian* (LQG) faktor yang harus

dipenuhi adalah kondisi *controlability* dan *observability*. Syarat *controlability* adalah sebagai berikut:

$$U_k = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{k-1}B] \quad (3.12)$$

Sedangkan syarat *observability* :

$$V_k = [C' \ A'C' \ A'^2C' \ \dots \ A'^{k-1}C'] \quad (3.13)$$

Syarat-syarat diatas diperlukan untuk mengidentifikasi apakah kondisi sistem sudah dapat dikatakan stabil atau tidak. Sehingga untuk uji kestabilan menggunakan syarat-syarat tersebut. Uji kondisi dilakukan dengan menggunakan bantuan *software* matlab 2009a didapatkan nilai rank U_k dan V_k memiliki nilai rank = 12.

3.1 Pemodelan Gangguan Gelombang

Disturbance dalam merancang sistem kendali pada tugas akhir ini adalah berupa gangguan gelombang. Gangguan gelombang pada alur lintasan pelayaran Tanjung Perak dimodelkan dalam bentuk fungsi transfer orde-2 seperti yang terdapat pada persamaan 2.21. Pemodelan gelombang tersebut divariasikan dalam bentuk beberapa ketinggian gelombang.

Pemodelan sebagai berikut:

$$h(s) = \frac{K_w s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.14)$$

Ketika ketinggian gelombang mencapai 0,5 meter :

$$h(s) = \frac{1,250 s}{s^2 + 0,356 s + 3,168} \quad (3.15)$$

Ketika ketinggian gelombang mencapai 1 meter :

$$h(s) = \frac{0,796 s}{s^2 + 0,252 s + 1,588} \quad (3.16)$$

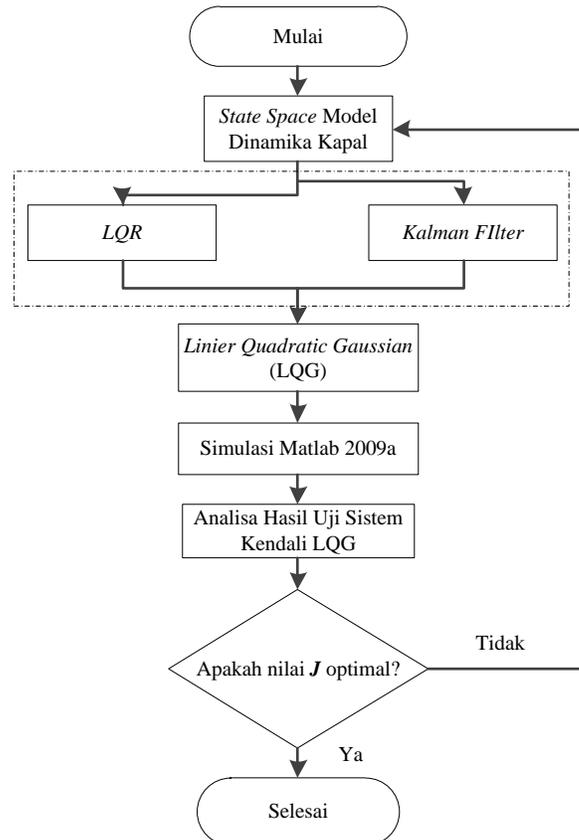
Ketika ketinggian gelombang mencapai 1,5 meter :

$$h(s) = \frac{0,650 s}{s^2 + 0,206 s + 1,061} \quad (3.16)$$

Persamaan diatas merupakan pemodelan pendekatan dinamika gangguan yang disebabkan oleh gelombang. Pemodelan tersebut didapatkan dari pendekatan gelombang yang dikembangkan oleh Pierson dan Moskowitz (1963).

3.2 Desain Sistem Kendali

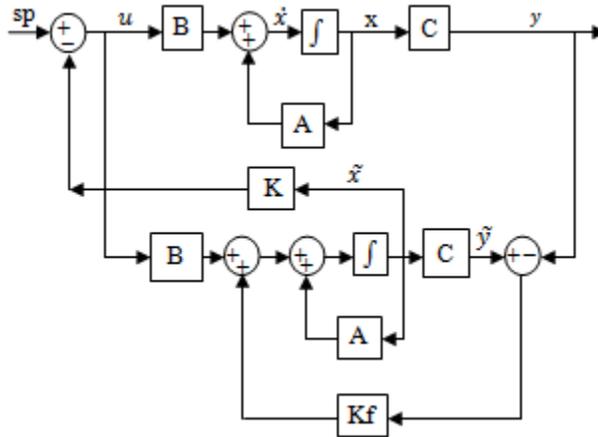
Pada tahapan ini akan dilakukan perancangan sistem pengendalian menggunakan metode *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) setelah dilakukan pemodelan sistem. Perancangan dimulai dengan pemodelan *state space* dinamika kapal. Respon sinyal keluaran yang dianalisa adalah *sway*, *yawrate*, sudut *heading*. Tahapan perancangan sistem kendali LQG dijelaskan sebagai berikut :



Gambar 3.4 Flowchart Perancangan Sistem Kontrol LQG

Dalam mendesain sistem kendali *Linier Quadratic Gaussian* (LQG) diperlukan model persamaan *state space* plant agar dapat dilakukan perancangan. Salah satu syarat agar sistem kontrol tersebut dapat stabil, maka kondisi matriks plant harus memiliki keadaan *controllability* dan *observability*. Setelah kondisi tersebut tercapai maka dapat dilakukan perancangan *regulator* dan *estimator*. Regulator disini sebagai fungsi kontrol dengan metode *linier quadratic regulator* (LQR) dimana nilai u merupakan sinyal kontrol input. harga $u = -Kx$. K sebagai *gain regulator* dimana nilainya berupa matriks. Perhitungan tersebut dilakukan dengan bantuan *software* matlab. Selain itu, nilai K juga mempengaruhi dalam menentukan nilai indeks performansi. Semakin kecil nilai indeks performansi, maka sistem akan semakin optimal. Apabila nilai indeks performansi besar

maka sistem tidak akan optimal. Untuk lebih jelas dalam memahami kontrol LQG dapat dilihat pada gambar diagram blok berikut :



Gambar 3.5 Block Diagram Perancangan Sistem Kontrol LQG

Diagram blok diatas merupakan penjelasan proses sistem kontrol LQG bekerja mulai dari sinyal kontrol input hingga output.

Nilai A, B, dan C merupakan komponen yang didapatkan dari pemodelan dinamika kapal yang berupa persamaan ruang keadaan. Dimana masing-masing berupa matrik. Sedangkan nilai K dan Kf masing-masing berupa *gain* regulator dan *gain* kalman. Dalam merancang gain tersebut terdapat algoritma perancangan untuk mendapatkan kondisi yang diinginkan. Dalam merancang kontrol LQG, berikut ini merupakan algoritma yang dipakai dalam melakukan perancangan *regulator* pada tabel 3.2 serta kalman pada tabel 3.3 :

Tabel 3.2 Algoritma perancangan *regulator* (Lewis, 1993)

Keterangan	Persamaan
Model sistem	$\dot{x} = Ax + Bu \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0$
Indeks Performansi	$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt$ Syarat : $S(T) \geq 0, \quad Q \geq 0, \quad R > 0$
<i>Riccati Equation</i>	$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q,$ $t \leq T, S(T)$
<i>Gain Kalman</i>	$K = R^{-1}B^T S$

Time varying feedback	$u = -K(t)x$
-----------------------	--------------

Perancangan *estimator* dilakukan dengan menghitung harga umpan balik (filter kalman) kemudian mengestimasi variabel keadaan optimal \hat{x} diperoleh dari sistem dinamik filter kalman sebagai berikut :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - \hat{y}) \tag{3.14}$$

Kemudian mencari nilai *gain*/penguatan Kalman filter :

$$K_f = PC^T R_f^{-1} \tag{3.15}$$

Sedangkan Matriks *P* diperoleh dari persamaan *Riccati* :

$$0 = PA^T + AP - PC^T R_f^{-1} CP + Q_f \tag{3.16}$$

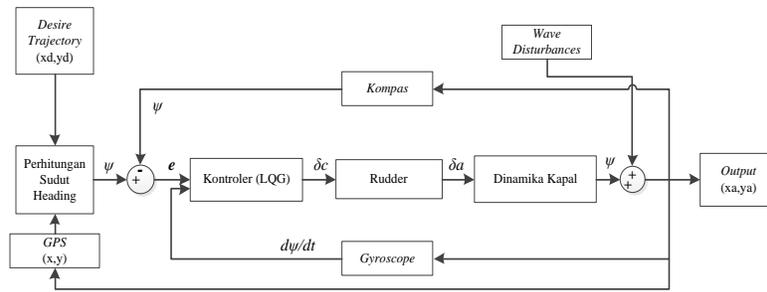
Dari persamaan-persamaan diatas digunakan untuk mendesain sebuah estimator. Nilai estimator bergantung pada kondisi penguat/*gain* kalmannya. Sehingga dapat diketahui apakah estimator mampu mengestimasi variabel keadaan atau tidak. Algoritma filter Kalman dapat dituliskan sebagai berikut:

Tabel 3.3 Algoritma perancangan *estimator* (Lewis, 1993)

1	$\bar{x}_0 = x_0$
2	$\bar{X}(0) = E[(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T] = X_0$
3	$K(t) = \bar{X}(t)H^T R^{-1}(t)$
4	$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)\hat{u}(t) + K(t)[z(t) - H(t)\hat{x}(t)]$
5	$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + X(t)A^T(t) + E(t)Q(t)E^T(t) + X(t)H^T(x)R^{-1}(t)H(t)X(t)$

3.3 Perancangan Kontrol *Trajectory*

Pada subbab ini akan dijelaskan perancangan model kontrol *trajectory* menggunakan metode *Linear Quadratic Gaussian* (LQG). Perancangan dilakukan terlebih dahulu dengan menentukan desire *trajectory* kemudian dilakukan perhitungan sudut *heading* sebagai inputan kontrol berdasarkan pada persamaan 2.25.



Gambar 3.6 Block Diagram Perancangan Kontrol Trajectory

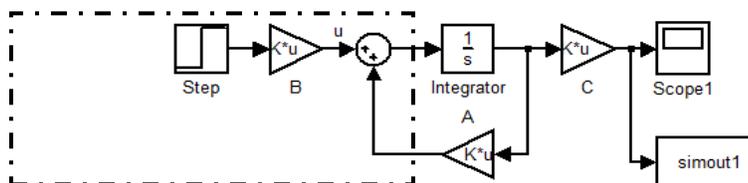
Gambar 3.6 merupakan diagram blok sistem kontrol *trajectory* dengan gangguan berupa gelombang. Inputan kontrol berupa *error yawrate*. Sedangkan outputan dari kontroler berupa sinyal *rudder*. Kemudian sinyal tersebut masuk ke aktuator dan dirubah kedalam bentuk sudut *rudder*. Model dinamika kapal akan merubahnya dalam bentuk sudut *heading*. Sudut *heading* outputan inilah yang akan menentukan kondisi keluaran *actual trajectory*. Keluaran sudut *heading* ini akan berubah tergantung besarnya kondisi gangguan yang berasal dari gelombang. Variasi gangguan gelombang yakni 0,5 meter, 1 meter, dan 1,5 meter. Ketika berada dalam gangguan tersebut, sistem dapat mengatasi gangguan atau tidak bergantung pada desain kontrolnya. Semakin baik maka lintasan *trajectory* yang dilalui akan memiliki selisih *error* yang kecil terhadap lintasan *desire*.

3.4 Pengujian Simulasi

Pengujian dengan simulasi dilakukan untuk melihat respon sistem secara *open loop* maupun *close loop*. Uji *open loop* dilakukan tanpa menggunakan kontroler, tujuannya untuk mengetahui respon transien dinamika kapal. Kemudian uji simulasi secara *close loop* digunakan untuk menguji kondisi plant dengan menggunakan kontroler LQG. Selain itu, uji *close loop* dilakukan dengan menggunakan variasi gangguan gelombang.

3.9.1 Open Loop Sistem

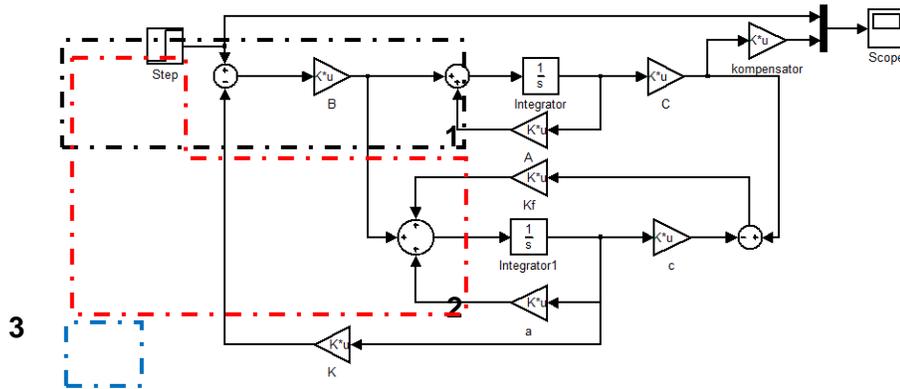
Model simulasi *open loop* digunakan untuk melihat kondisi respon kapal ketika tanpa kontroler LQG. Uji *open loop* dilakukan juga untuk melihat respon transien dari plant yang akan diuji.



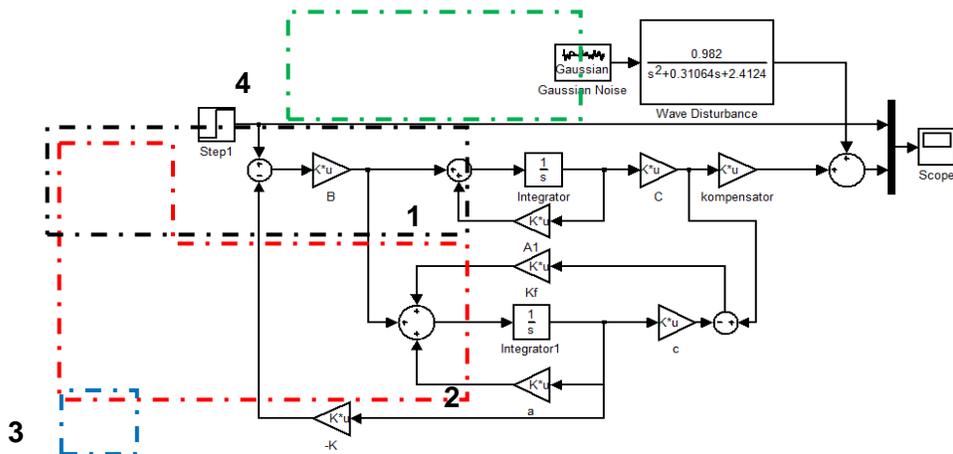
Gambar 3.7 Model simulasi Open Loop

3.9.2 Closed Loop Sistem

Model simulasi *closed loop* digunakan melihat respon keluaran sinyal kontrol berupa *sway*, *yawrate*, dan sudut *heading*. Sistem menggunakan kendali LQR dan Kalman filter sebagai estimatornya. Uji ini dilakukan dengan menggunakan *disturbance* maupun tanpa menggunakan *disturbance* kemudian dianalisa perbedaan dari masing-masing kondisi. Berikut ini merupakan model simulasi pada program simulink matlab.



Gambar 3.8 Model simulasi *Closed Loop*



Gambar 3.9 Model simulasi *Closed Loop* dengan Gangguan

Keterangan:

Nomor 1 : Pemodelan diagram blok *state space* dinamika kapal

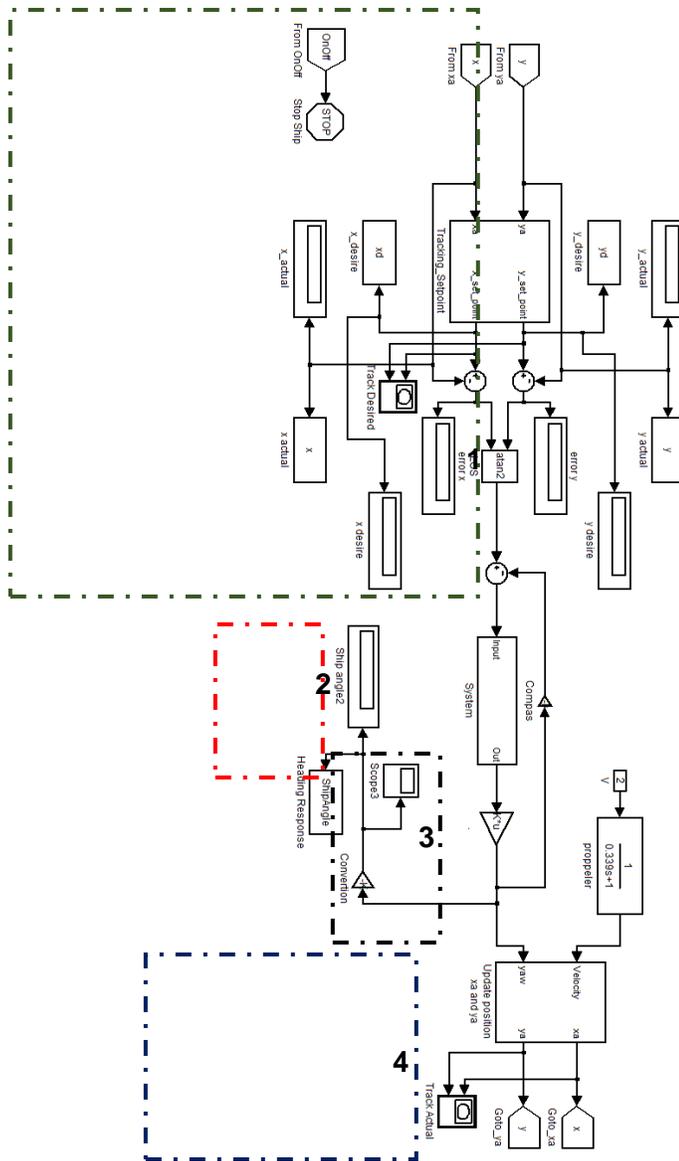
Nomor 2 : Estimator (kalman filter)

Nomor 3 : *Gain regulator* (LQR)

Nomor 4 : Gangguan gelombang yang berdistribusi *gaussian*

3.9.3 Kontrol *Trajectory* tanpa Gangguan

Pada simulasi kontrol *trajectory* tanpa gangguan digunakan untuk mengetahui simulasi hasil lintasan yang diinginkan. Lintasan tersebut sebelumnya ditentukan berdasarkan koordinat yang terdapat pada software *google earth*. Tiap titiknya mewakili kondisi x_d dan y_d . Kondisi tersebut digunakan untuk menentukan *track desire*. *Track desire* tersebut ditentukan sebagai lintasan pelayaran kapal tanker. Pemodelan kontrol *trajectory* tanpa gangguan dimodelkan dalam bentuk simulink seperti gambar 3.10. Pada keterangan nomor 1 terdapat *database trajectory*, dimana didalam *subsystem* tersebut terdapat database lintasan yang ditentukan. Fungsi dari blok tersebut untuk mengupdate posisi lintasan kapal yang telah ditentukan. Blok tersebut juga berfungsi menyimpan perubahan lintasan aktual kapal yang diakibatkan oleh perubahan sudut *heading* kapal. Keterangan nomor 2 berupa kontroler LQG dalam bentuk *subsystem*. Nomor 3 merupakan kecepatan kapal dalam satuan m/s dimana kecepatan kapal dikondisikan dalam keadaan konstan sedangkan kecepatan servis kapal sebesar 13 knot. Keterangan nomor 4 merupakan blok *update position*. Blok tersebut berfungsi untuk mengupdate posisi aktual lintasan yang diakibatkan oleh perubahan sudut *yaw* kapal dan kecepatan kapal yang konstan. Kemudian keluaran dari blok tersebut diumpankan ke *database trajectory* (keterangan nomor 1) untuk mendapatkan nilai *error* lintasan antara kondisi aktual dengan kondisi yang diinginkan. Nilai *error* ditampilkan pada display dengan berdasarkan koordinat x dan y .



Gambar 3.10 Model simulasi kontrol *trajectory* tanpa gangguan

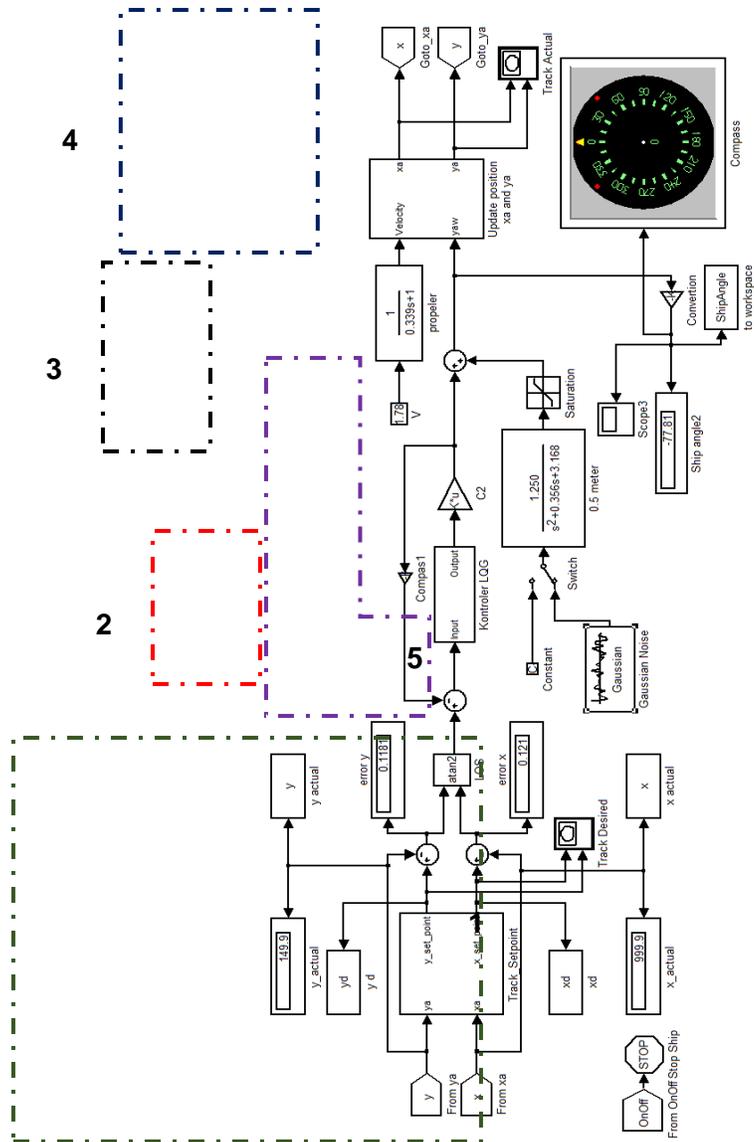
Keterangan:

- Nomor 1 : *Database trajectory*
- Nomor 2 : Kendali LQG
- Nomor 3 : Kecepatan *propeller*
- Nomor 4 : *Actual trajectory*

3.9.4 Kontrol *Trajectory* dengan Gangguan

Pada simulasi kontrol *trajectory* dengan gangguan digunakan untuk mengetahui simulasi hasil lintasan yang diinginkan. Gangguan gelombang dengan variasi 0.5 meter, 1 meter, dan 1.5

meter. Gangguan gelombang bersifat non deterministik dengan distribusi gaussian. Berdasarkan kondisi tersebut akan dianalisa pengaruh tiap variasi gangguan terhadap *trajectory* kapal yang ditentukan. Kemudian apabila simulasi berjalan dengan baik maka kondisi *desire* dan *actual* dicari nilai *error* lintasannya. Masing-masing kondisi akan berpengaruh terhadap kemampuan kapal dalam melintasi *trajectory* yang diinginkan. Secara umum model simulasi menggunakan simulink tampak pada gambar 3.11. Cara kerja sistem tersebut sama dengan gambar 3.10. Namun terdapat penambahan variasi gangguan lingkungan yakni berupa gelombang yang ditunjukkan pada keterangan nomor 5. Gangguan gelombang dimodelkan dalam bentuk fungsi transfer orde-2 yang didapatkan dari persamaan 2.21 kemudian dibangkitkan dengan *gaussian power* yang terdapat pada *toolbox* simulink matlab2009a. Posisi perubahan sudut *heading* kapal diperlihatkan dengan pergerakan arah kompas yang terdapat pada model simulink tersebut. Sudut *heading* kapal pada model simulink tersebut diprogram terhadap arah timur. Sehingga arah timur ditertapkan sebagai titik acuan terhadap sudut *heading* kapal. Program tersebut juga terdapat pada model simulink gambar 3.10. Nilai *error* lintasan didapatkan dari selisih antara kondisi aktual dengan kondisi yang diinginkan berdasarkan tiap-tiap koordinat x dan y.



Gambar 3.11 Model simulasi kontrol *trajectory* dengan gangguan

Keterangan:

Nomor 1 : *Database trajectory*

Nomor 2 : Kendali LQG

Nomor 3 : Kecepatan *propeller*

Nomor 4 : *Actual trajectory*

Nomor 5 : Gangguan gelombang yang berdistribusi gaussian

Implementasi Sistem Kontrol LQG

Sebelum melakukan uji *closed loop* terlebih dahulu melakukan perancangan sistem kendali LQG. Implementasi sistem kendali LQG terlebih dahulu dilakukan perancangan kalman filter dan *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

1. Desain *Kalman Filter/Estimator*

Perancangan *kalman filter* pada LQG digunakan sebagai estimator. Fungsi dari kalman filter sebagai memperkecil adanya gangguan kapal ketika melakukan *maneuvering* dan *trajectory*. Salah satu syarat untuk memilih nilai indeks performansi dari gain kalman yaitu dengan memilih nilai yang paling minimum dengan berbagai variasi nilai matrik pembobotan. Nilai tersebut dapat ditunjukkan pada tabel berikut ini :

Tabel 4.1. *Index Performance* matriks pembobot Q_n dan R_n pada *gain* filter kalman

NO	Q_n	R_n	J
1	0.0001	1	0.000322
2	0.001	1	0.0007330
3	0.01	1	0.0481211
4	0.1	1	0.459323
5	1	1	4.670122
6	1	10	45.663000
7	1	100	4.846242
8	1	1000	7.3291900
9	1	10000	32.194800

Berdasarkan hasil tabel diatas diperoleh kondisi matrik pembobotan Q_n dan R_n . Didapatkan nilai hasil uji indeks performansi sistem dengan nilai kondisi bobot matrik masing-masing bernilai 0.0001 dan 1. Matrik tersebut berupa matrik diagonal. Matrik diagonal dituliskan sebagai berikut :

$$Q_n = \begin{bmatrix} Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n \end{bmatrix}$$

$$R_n = \begin{bmatrix} R_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n \end{bmatrix}$$

$$R_n =$$

Nilai Q_n dan R_n masing-masing diuji dengan variasi yang berbeda sedangkan kondisi yang lain dibuat konstan dengan nilai 1. Dalam mendesain sebuah estimator, nilai gain kalman dapat dihitung menggunakan fungsi perintah pada program software matlab yakni dengan mengetik pada editor matlab `[KEST, L, P]=KALMAN(SYS, QN, RN, NN)`. Dimana L merupakan gain dari kalman, P merupakan perintah untuk mendapatkan nilai dari persamaan *riccati*. Sedangkan SYS berupa matrik *plant model*, perintah QN, RN, dan NN merupakan matrik *noise covariance data*. Nilai K_f dan P yang didapatkan berdasarkan fungsi pada matlab secara otomatis. Berikut ini nilai matrik gain kalman dan nilai P yang merupakan matrik *error covariance* :

$$K_f = \begin{bmatrix} 121.89 & 29.48 & 87.231 & 0 & 0 & 0 \\ 33.15 & 191.41 & 68.791 & 0 & 0 & 0 \\ 57.47 & 35.37 & 129.76 & 0 & 0 & 0 \\ 2206 & -646.54 & -692.2 & 0 & 0 & 0 \\ -2155 & 1220 & -2169 & 0 & 0 & 0 \\ 63.45 & 212.46 & 161.72 & 0 & 0 & 0 \\ -13.25 & -9.59 & -43.02 & 0 & 0 & 0 \\ -13.25 & -9.59 & -43.02 & 0 & 0 & 0 \\ -13.25 & -9.59 & -43.02 & 0 & 0 & 0 \\ -17.51 & -9.43 & -30.55 & 0 & 0 & 0 \\ -17.51 & -9.43 & -30.55 & 0 & 0 & 0 \\ -17.51 & -9.43 & -30.55 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{12 \times 6}$$

$$P = \begin{bmatrix} 70 & 69.99 & 70 & 116 & 68.7 & 105 & -69.69 & -69. & -69.69 & -6.82 & -6.82 & -6.82 \\ 69 & 71 & 70 & 88 & 212 & 107 & -69.65 & -69.65 & -69.65 & -6.74 & -6.74 & -6.74 \\ 70 & 70 & 71 & 87 & 68.5 & 106 & -69.98 & -69.98 & -69.98 & -6.95 & -6.95 & -6.95 \\ 116 & 88 & 87 & 196 & -853 & 212 & -94.62 & -94.62 & -94.22 & -18.9 & -18.9 & -18.9 \\ 68.7 & 212.5 & 68.5 & -83 & 214 & 326 & -90 & -90 & -90 & -24.7 & -24.7 & -24.7 \\ 105 & 107.4 & 106.9 & 212 & 326.5 & 252 & 105 & 105 & 105 & 16.93 & 16.93 & 16.93 \\ -69.6 & -69 & -69.9 & -94 & -90 & -105 & 69.55 & 69.5 & 69.5 & 6.64 & 6.64 & 6.64 \\ -69.6 & -69 & -69.9 & -94 & -90 & -105 & 69.55 & 69.5 & 69.55 & 6.64 & 6.64 & 6.64 \\ -69.6 & -69 & -69.9 & -94 & -90 & -105 & 69.55 & 69.5 & 69.55 & 6.64 & 6.64 & 6.64 \\ -6.8 & -6.7 & -6.95 & 18.9 & 24 & 16.93 & 6.64 & 6.64 & 6.64 & 21.19 & 21.19 & 21.19 \\ -6.8 & -6.7 & -6.95 & 18.9 & 24 & 16.93 & 6.64 & 6.64 & 6.64 & 21.19 & 21.19 & 21.19 \\ -6.8 & -6.7 & -6.95 & 18.9 & 24 & 16.93 & 6.64 & 6.64 & 6.64 & 21.19 & 21.19 & 21.19 \end{bmatrix}$$

2. Desain Regulator

Berdasarkan hasil pemodelan dinamika kapal pada persamaan 2.25 didapatkan fungsi *state space* dengan kondisi $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$. Selain itu, syarat umum untuk mendesain sebuah kontrol optimal nilai matriks harus memenuhi kondisi *controllability* dan *observability* untuk memenuhi kestabilan dari sistem tersebut. Matrik Q dan R berupa matrik diagonal dengan orde 12x12. Kemudian untuk mendapatkan nilai gain regulator menggunakan fungsi pada matlab yaitu

$[K, S, E] = \text{LQR}(\text{SYS}, Q, R, N)$. Secara otomatis pada matlab akan menampilkan nilai K dan S. Untuk nilai K merupakan *gain* regulator dan S sebagai solusi persamaan riccati. Matrik pembobotan Q dan R dilakukan metode trial dan error yang terdapat pada tabel 4.2 berikut ini :

Tabel 4.2. *Index Performance* matriks pembobot Q dan R pada *gain* regulator

NO	Q	R	J
1	20	10	0.0622
2	15	10	0.0530
3	10	10	0.0481
4	5	10	0.000309
5	5	5	4.670122
6	1	0.1	34.663000
7	1	0.01	40.846242
8	1	0.001	43.3291900
9	1	0.0001	46.194800

Berdasarkan hasil tabel diatas diperoleh kondisi matrik pembobotan Q dan R. Didapatkan nilai hasil uji indeks performansi sistem dengan nilai kondisi bobot matrik masing-masing bernilai 5 dan 10. Matrik tersebut berupa matrik diagonal. Matrik diagonal dituliskan sebagai berikut :

$$Q = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

Kondisi paling optimal didapatkan pada variasi nilai matrik pembobotan dengan nilai $Q=5$ dan nilai $R=10$. Hal ini dikarenakan sistem akan optimal dengan nilai indeks performansi yang paling minimum yakni bernilai 0.000309. Nilai matrik pembobotan yang optimal tersebut digunakan untuk merancang *gain* regulator pada sistem kontrol *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Apabila nilai Q dan R telah didapatkan, kemudian dimasukkan kedalam fungsi LQR pada fungsi editor matlab2009a yang menghasilkan matrik K dan S sebagai berikut :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.009 & 0.006 & 0.7 & -0.02 & 0.01 & -0.002 & 0.0003 & -0.002 & 0.002 & 0.002 & 0.002 & -0.0008 \\ -0.01 & 0.5 & 0.49 & -0.01 & 0.7 & 0.7 & -0.001 & 0.004 & 0.003 & -0.002 & -0.002 & -0.002 & 0.0003 \\ 0.002 & -0.49 & 0.5 & 0.02 & 0.006 & 0.06 & 0.001 & 0.006 & -0.003 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.01 \\ 0 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & -0.001 & 0.006 & 0.001 & -0.006 & 0.0001 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 5.3 & 0.01 & 0.01 & 0.30 & 0.02 & 0.02 & 0.35 & 0.76 & -0.08 & 0.06 & 0.04 & -0.04 \\ 0.01 & 8.56 & -1.43 & 0.02 & 0.04 & -4.95 & -0.35 & 0.18 & -0.14 & 0.56 & -2.25 & -0.09 \\ 0.01 & -1.43 & 8.56 & 0.01 & 0.04 & 5.04 & 0.74 & -0.12 & 0.11 & -0.28 & -0.14 & 0.13 \\ 0.3 & 0.01 & 0.01 & 0.31 & 0.02 & 0.02 & -0.14 & 0.14 & 0.13 & -0.03 & 0.07 & -0.03 \\ 0.01 & 0.04 & 0.03 & 0.01 & 0.06 & 0.06 & -0.16 & 0.15 & 0.04 & 0.03 & -0.02 & -0.02 \\ 0.02 & -4.95 & 5.04 & 0.02 & 0.06 & 10.1 & 0.16 & -0.12 & 0.06 & -0.34 & 0.13 & 0.15 \\ -0.03 & -0.35 & 0.74 & -0.01 & -0.16 & 0.15 & 8.90 & -2.48 & -2.48 & 1.01 & -0.02 & -0.02 \\ 0.07 & 0.18 & -0.12 & 0.01 & 0.05 & -1.12 & -2.48 & 8.90 & -2.48 & -0.02 & 1.02 & -0.02 \\ -0.09 & -0.13 & 0.17 & 0.01 & 0.04 & 0.06 & -2.48 & -2.48 & 8.90 & -0.02 & -0.02 & 1.02 \\ 0.63 & 0.56 & -0.25 & -0.03 & 0.03 & -0.34 & 1.01 & -0.02 & -0.02 & 22.2 & -5.61 & -5.61 \\ 0.36 & -0.22 & -0.14 & 0.06 & -0.02 & 0.13 & -0.02 & 1.01 & -0.02 & -5.61 & 22.2 & -5.61 \\ -0.04 & -0.09 & 0.13 & -0.34 & -0.01 & 0.15 & -0.02 & -0.02 & 1.01 & -5.61 & -5.61 & 22.2 \end{bmatrix}$$

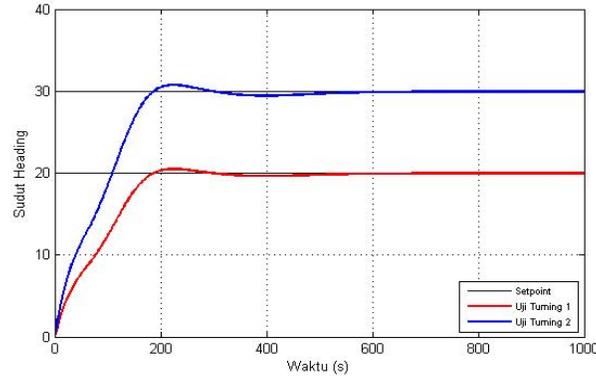
4.4 Analisa Hasil Uji Kapal Tanker Secara *Closed Loop*

Pada sub bab ini terdapat hasil simulasi secara *closed loop* dengan kecepatan arah *sway* dan *yawrate* terhadap sudut *heading/yaw*. Pengujian dilakukan dengan inputan sudut belok 20° dan 30°. Pengujian didasarkan pada standar *International Maritime Organization* (IMO).

4.4.1 Analisa Hasil Uji Secara *Closed Loop* Tanpa Gangguan

Uji *closed loop* dilakukan untuk mengetahui kemampuan kapal untuk *turning* dan performansi sistem kendali pada kapal. Selain itu uji ini dilakukan untuk mengetahui kondisi sebuah sistem kendali yang telah dirancang sudah mengikuti *setpoint* yang telah diinginkan. Pengujian dilakukan dengan menggunakan variasi standar sudut belok 20° dan 30°. Standar pengujian ini berdasarkan

pada standar yang terdapat pada *International Maritime Organization* (IMO). Berikut ini pada gambar 4.2 merupakan hasil respon uji *turning* pada kapal tangki Pertamina/Kurau59 :



Gambar 4.2. Respon Kapal Tanker Saat Uji *Turning*

Berdasarkan hasil uji simulasi *turning* yang terdapat pada gambar 4.2, tampak kontroler bekerja sesuai dengan *setpoint* yang diinginkan. Respon sistem ketika dilakukan uji sudut belok 20° , waktu mencapai *setpoint* 430 detik dengan nilai *maximum overshoot* 21.20. Sedangkan untuk simulasi uji sudut belok 30° waktu mencapai *setpoint* 455 detik dengan *maximum overshoot* 32.35.

Tabel 4.3. Hasil Simulasi Uji *Turning*

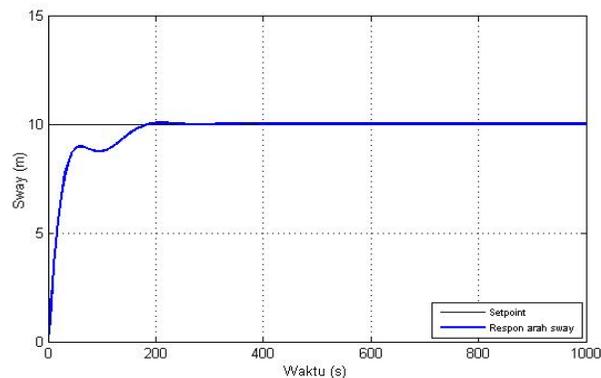
NO	SUDUT <i>TURNING</i> (DERAJAT)	MAXIMUM OVERSHOOT	ERROR <i>STEADY STATE</i> (%)	WAKTU MENCAPAI <i>SETPOINT</i> (DETIK)
1	20	21.20	0.0153	430
2	30	32.35	0.0332	455

Hasil simulasi yang diperoleh dari uji *turning*, nilai *maximum overshoot* pada sudut 20° dan 30° yang dihasilkan tidak terlalu tinggi, dan masih tergolong mampu terkontrol dan telah sesuai standar IMO 22.43° pada saat *turning* 20° dan 32.45° saat *turning* 30° . Kondisi standar IMO saat uji *turning* 20° nilai maksimum yang diperbolehkan maksimal 25° sedangkan uji *turning* 30° nilai *overshoot* yang diperbolehkan adalah 37.50° . Respon pada sudut masukan 20° dan 30° juga dapat mencapai kondisi *steady*, dan sesuai dengan *setpoint* yang diharapkan.

Error steady state dari hasil respon di atas juga cukup kecil yaitu 0.0153% saat *turning* 20° dan 0.0332% saat *turning* 30° . Nilai *error* tersebut masih dalam rentang kestabilan sistem yaitu $\pm 5\%$. Kemudian waktu untuk mencapai kondisi *steady* pada saat uji *turning* sedikit lama masing-

masing 430 detik untuk uji turning 20° dan 455 detik untuk uji *turning* 30° . Sehingga kondisi *rudder* mampu mengeksekusi dengan baik perintah yang diberikan oleh kontroler untuk melakukan *turning* pada sudut tersebut. Di samping itu semua, kontroler LQG yang dirancang dapat dikatakan baik, karena telah mampu mengontrol *heading* kapal sesuai dengan kondisi yang diinginkan.

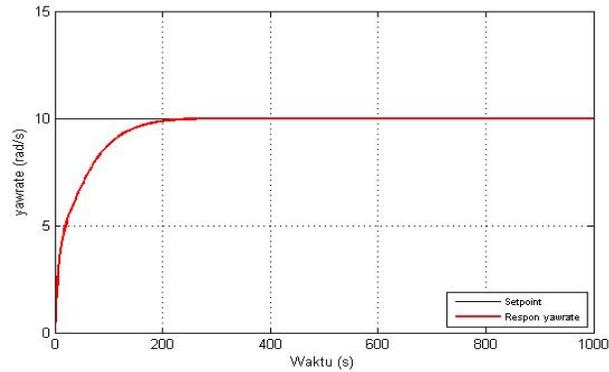
4.4.2 Analisa Uji Respon Sway dan Yaw secara *close loop* tanpa gangguan



Gambar 4.3. Grafik respon arah sway tanpa gangguan

Pada uji ini dilakukan pengujian terhadap respon sinyal kontrol pada *sway* dan *yawrate*. *Sway* merupakan gerak translasi kapal kearah kesamping. Sedangkan *yawrate* merupakan gerak rotasi kapal pada sumbu atas bawah. Uji respon dilakukan untuk mengetahui respon derajat kebebasan kapal *sway* dan *yaw* ketika dalam kondisi tanpa gangguan. Pada saat kapal melakukan *maneuver turning* pada arah kecepatan *sway* dengan *setpoint* yang diberikan adalah 10 meter.

Pada Gambar 4.3 terlihat bahwa respon arah *sway* dapat mengikuti *setpoint* yang telah ditentukan. Bentuk respon menyerupai orde dua dan respon mengalami sedikit osilasi pada saat 20,11 detik pertama dengan amplitudo 8.975 meter ketika respon saat akan mencapai kondisi *steady*. Nilai *maximum overshoot* 10.05 dan waktu untuk mencapai *setpoint* 105 detik. Waktu yang dibutuhkan untuk mencapai kondisi *steady* sedikit lama dikarenakan kapal tanker memiliki koefisien blok yang besar dan beroperasi dengan kecepatan konstan. Analisa yang didapatkan bahwa kapal mampu mengikuti *setpoint* saat melakukan gerakan *sway* atau gerakan menyamping.



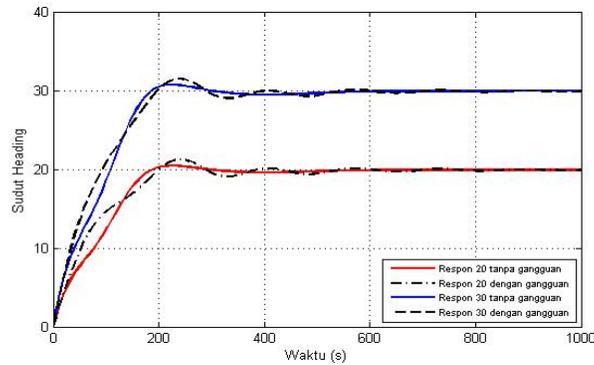
Gambar 4.4. Grafik respon sudut yaw tanpa gangguan

Pada gambar 4.4 terlihat respon *yawrate* ketika dilakukan uji turning uji *turning*. Respon sistem tersebut mampu mengikuti *setpoint* terhadap sudut belokan sebesar 10° . Pada simulasi tersebut, terlihat menyerupai sistem orde 1 tanpa *maximum overshoot*. Sedangkan waktu yang dibutuhkan untuk mencapai *setpoint* 280 sekon dan tidak memiliki *maximum overshoot*. Osilasi terjadi pada 7.5 detik pertama sebelum respon mampu mengikuti *setpoint* yang ditentukan. Respon sistem mampu menjaga kondisi *tracking* menuju *setpoint*. Kemudian respon naik secara perlahan hingga mencapai titik *setpoint*. *Setpoint* yang diinginkan yakni 10 derajat.

Hasil dari respon tersebut dapat disimpulkan bahwa sistem kendali mampu memerintahkan *rudder* kapal agar sesuai dengan *setpoint* sudut *heading* yang telah ditentukan. Berdasarkan respon tersebut, kontrol mampu memberikan pada *rudder* dengan baik sehingga kapal mampu mengikuti sudut *yaw* yang telah ditentukan sebelumnya. Selain itu kemampuan kapal dalam melakukan gerakan *yaw* juga dapat mempengaruhi respon sinyal kontrol dalam melakukan pemenuhan *setpoint*.

4.4.3 Analisa Hasil Uji Respon Sway dan yaw secara *close loop* dengan gangguan gelombang

Uji respon dalam kondisi gangguan gelombang dilakukan untuk mengetahui kemampuan kapal untuk mengikuti *trajectory* yang diinginkan. Gangguan gelombang berupa fungsi transfer orde 2 berdasarkan persamaan 2.21. Berikut ini pada gambar 4.5 merupakan respon sinyal kontrol ketika dilakukan uji turning 20° dan 30° dalam kondisi penambahan gangguan gelombang yang dibangkitkan oleh *gaussian power* yang terdapat pada *toolbox* simulink matlab dimana gangguan ini bersifat non deterministik.

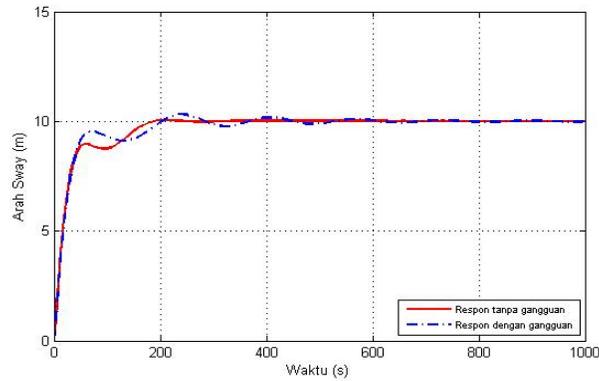


Gambar 4.5. Grafik respon sistem saat uji *turning* dengan gangguan gelombang

Tabel 4.4. Hasil Simulasi Uji *Turning* dengan Gangguan

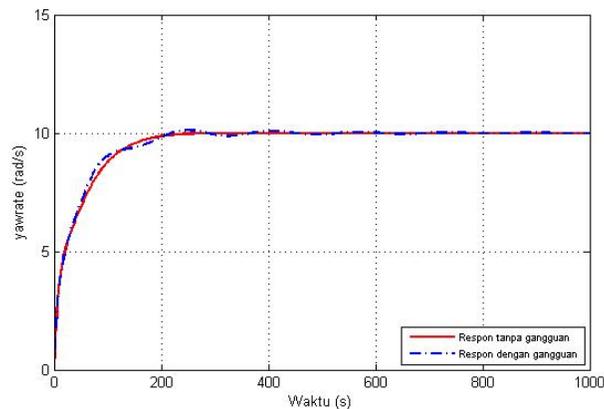
NO	SUDUT <i>TURNING</i> (DERAJAT)	MAXIMUM OVERSHOOT	ERROR <i>STEADY STATE</i> (%)	WAKTU MENCAPAI <i>SETPOINT</i> (DETIK)
1	20	23.37	0.0223	480
2	30	33.41	0.0367	495

Hasil simulasi yang diperoleh dari uji *turning* pada gambar 4.5 merupakan respon sistem dengan kondisi penambahan gangguan gelombang yang dibangkitkan oleh *gaussian power*. Pada kondisi tersebut didapatkan nilai *maximum overshoot* pada sudut 20° dan 30° yang dihasilkan yakni 23.37° dan 33.41°. Selisih *maximum overshoot* dengan kondisi tanpa gangguan masing-masing 2.17° dan 1.06°. Respon pada sudut masukan 20° dan 30° dengan gangguan gelombang juga masih dapat mencapai kondisi *steady*, dan sesuai dengan *setpoint* yang diharapkan. Error *steady state* dari hasil respon di atas yaitu 0.0223% saat *turning* 20° dan 0.0367% saat *turning* 30°. Sedangkan waktu untuk mencapai kondisi *steady* pada saat uji *turning* masing-masing 480 detik untuk uji *turning* 20° dan 495 detik untuk uji *turning* 30°. Sehingga dengan adanya gangguan gelombang, kontroler masih mampu dikategorikan stabil.



Gambar 4.6. Grafik respon sistem arah *sway* saat uji *maneuver* dengan gangguan

Gambar 4.6 diatas menjelaskan respon *maneuver* terhadap respon arah *sway* dengan menggunakan gangguan gelombang. Pada gambar grafik berwarna biru tersebut sedikit terjadinya osilasi pada respon arah *sway* ketika diberikan gangguan, namun respon mampu kembali stabil pada jarak yang ditentukan yaitu 10 meter. Bentuk respon hampir sama ketika sebelum diberi gangguan yakni menyerupai orde 2 namun respon mengalami osilasi pada saat 10 detik pertama sampai detik 120 sekon. Ketika kondisi saat belum mencapai keadaan stabil, respon pada awalnya mengalami sedikit osilasi dengan amplitudo 9.21 meter. Nilai *maximum overshoot* yang tidak terlalu besar yakni 10.3 meter dan waktu mencapai *setpoint* sebesar 600.33 sekon. Analisa yang didapatkan bahwa kapal masih mampu mengikuti *setpoint* saat melakukan gerakan *sway* atau gerakan menyamping walaupun berada dalam gangguan gelombang. Gangguan gelombang yang digunakan bersifat non deterministik yang berdistribusi gaussian.

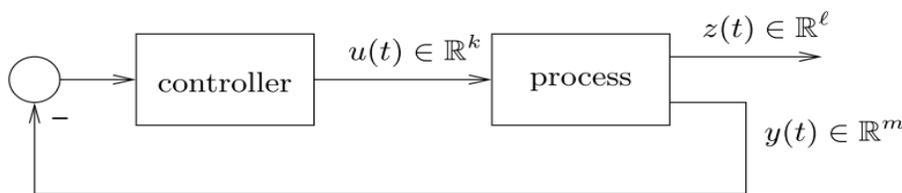


Gambar 4.7. Grafik respon sudut *yaw* saat uji *maneuver* dengan gangguan

Hasil simulasi pada gambar 4.7 diatas menjelaskan respon *maneuver* kapal arah *yaw* dengan *setpoint* 10 derajat. Pada gambar tersebut terlihat respon *yawrate* ketika dilakukan uji *turning* dengan penambahan gangguan berupa gelombang. Respon sistem tersebut masih mampu mengikuti *setpoint*.

Respon gangguan arah yaw menyerupai sistem orde 2 dengan *overshoot* yang sangat kecil. Terdapat perbedaan antara respon tanpa gangguan dengan menggunakan gangguan yakni adanya *maximum overshoot* dan adanya osilasi. Osilasi ini disebabkan karena adanya gangguan gelombang. Nilai *maximum overshoot* yakni 10.15 derajat dan waktu untuk mencapai *setpoint* yakni 560.72 detik. Osilasi yang kecil terjadi pada 50 detik pertama sebelum respon mampu mengikuti *setpoint* yang ditentukan. Hasil dari respon tersebut dapat disimpulkan respon *maneuvering* arah yaw ketika diberikan gangguan masih mampu mengikuti *trend* yang diinginkan. Sehingga sistem kendali yang dirancang mampu menunjukkan respon yang baik serta mampu bersifat *robust* ketika terdapat gangguan. Hal ini dapat membuktikan bahwa sistem kendali *Linear Quadratic Gaussian* (LQG).

Sebuah sistem kendali LQR, dinyatakan dalam bentuk blok diagram sebagai berikut:



Perhatian:

Tanda negative pada umpan balik dan tidak ada sinyal referensi

Gambar 5.1 Konfigurasi dari LQR Linear quadratic regulator

Gambar 1.1 di atas menunjukkan konfigurasi LQR, dimana proses diasumsikan linear time invariant (LTI) atau sebuah sistem dengan sifat parameter nya tidak bergantung pada waktu.

Proses yang dikatakan sebagai LTI dinyatakan dalam bentuk:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = CX$$

$$Z = Gx + Hu$$

$$x \in R^n, u \in R^k$$

$$y \in R^m$$

$$z \in R^l$$

1. Keluaran $y(t)$ sesuai dengan sinyal yang mampu mengukur ketersediaan dari kontrol
2. Keluaran kontrol $z(t)$ sesuai dengan sinyal s yang akan membuat kemungkinan lintasan terpendek terhadap waktu.

Terkadang $z(t) = y(t)$ pada saat tujuan kontrol adalah membuat sinyal output yang diukur sangat kecil. Pada kondisi ini:

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$