BAB 9

DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

A. Pengertian Distribusi Peluang Kontinu

Distribusi peluang kontinu adalah peubah acak yang dapat memperoleh semua nilai pada skala kontinu. Ruang sampel kontinu adalah bila ruang sampel mengandung titik sampel yang tak terhingga banyaknya. Syarat dari distribusi kontinu adalah apabila fungsi *f*(*x*) adalah fungsi padat peluang peubah acak kontinu *X* yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan riil R bila:

1. F(x) ≥ 0 untuk semua x ϵ R
2. $\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx$

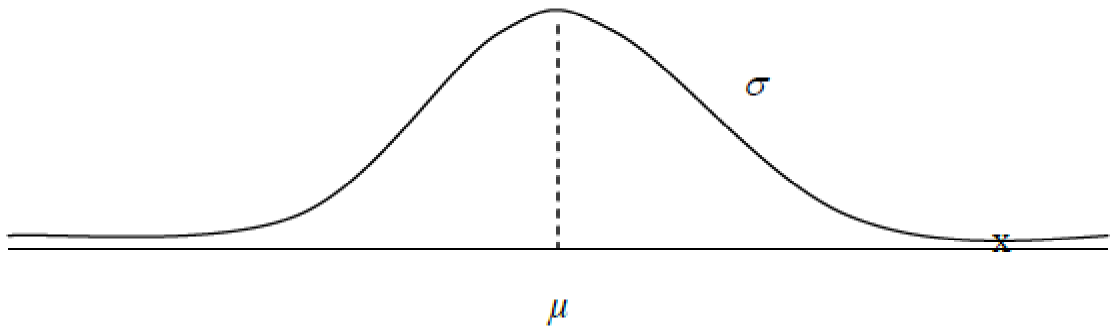
B. Konsep dan Teorema Distribusi

1. Distribusi Normal

Distribusi Normal (Gaussian) mungkin merupakan distribusi probabilitas yang paling penting baik dalam teori maupun aplikasi statistik. Distribusi ini paling banyak digunakan sebagai model bagi data riil di berbagai bidang yang meliputi antara lain karakteristik fisik makhluk hidup (berat, tinggi badan manusia, hewan, dll). Terdapat empat alasan mengapa distribusi normal menjadi distribusi yang paling penting :

a. Distribusi normal terjadi secara alamiah.
b. Beberapa variabel acak yang tidak terdistribusi secara normal dapat dengan mudah ditransformasi menjadi suatu distribusi variabel acak yang normal.
c. Banyak hasil dan teknik analisis yang berguna dalam pekerjaan statistik hanya bisa berfungsi dengan benar jika model distribusinya merupakan distribusi normal.
d. Ada beberapa variabel acak yang tidak menunjukkan distribusi normal pada populasinya, namun distribusi dari rata-rata sampel yang diambil secara random dari populasi tersebut ternyata menunjukkan distribusi normal.

Distribusi Normal disebut juga *Gausian distribution* adalah salah satu fungsi distribusi peluang berbentuk lonceng seperti gambar berikut.



Berdasarkan gambar di atas, distribusi Normal akan memiliki beberapa ciri diantaranya:

a. Kurvanya berbentuk garis lengkung yang halus dan berbentuk seperti genta.
b. Simetris terhadap rataan (*mean*).
c. Kedua ekor/ ujungnya semakin mendekati sumbu absisnya tetapi tidak pernah maemotong.
d. Jarak titik belok kurva tersebut dengan sumbu simetrisnya sama dengan σ
e. Luas daerah di bawah lengkungan kurva tersebut dari - ~ sampai + ~ sama dengan 1 atau 100 %.

Sebuah variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi normal dengan parameter μ_x dan σ_x dimana $-\infty < \mu_x < \infty$ dan $\sigma_x > 0$ jika fungsi kepadatan probabilitas dari X adalah :

$$f_N(x;\mu_x,\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{(2\sigma_x{}^2)}} \quad , -\infty < x < \infty \quad \text{.......................} \ (1)$$

Dimana :

μ_x = mean

σ_x = deviasi standard

π = nilai konstan yaitu 3, 1416

e = nilai konstan yaitu 2,7183

Untuk setiap nilai μ_x dan σ_x, kurva fungsi akan simetris terhadap μ_x dan memiliki total luas dibawah kurva tepat 1. Nilai dari σ_x menentukan bentangan dari kurva sedangkan μ_x menentukan pusat simetrisnya.

Distribusi normal kumulatif didefinisikan sebagai probabilitas variabel acak normal X bernilai kurang dari atau sama dengan suatu nilai x tertentu. Maka fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal ini dinyatakan sebagai :

$$f_N(x;\mu_x,\sigma_x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_N(t;\mu_x,\sigma_x)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(t-\mu_x)^2}{(2\sigma_x{}^2)}} dt \text{ ....(2)}$$

Untuk menghitung probabilitas $P(a \leq x \leq b)$ dari suatu variabel acak kontinu X yang terdistribusi secara normal dengan parameter μ_x dan σ_x maka persamaan (1) harus diintegralkan mulai dari $x = a$ sampai $x = b$. Namun, tidak ada satupun dari teknik-teknik pengintegralan biasa yang bisa digunakan untuk menentukan integral tersebut. Untuk itu para ahli statistik/matematik telah membuat sebuah penyederhanaan dengan memperkenalkan sebuah fungsi kepadatan probabilitas normal khusus dengan nilai mean $\mu = 0$ dan deviasi standard $\sigma = 1$. Distribusi ini dikenal sebagai *distribusi normal standard (standard normal distribution)*. Variabel acak dari distribusi normal standard ini biasanya dinotasikan dengan Z.

Dengan menerapkan ketentuan diatas pada persamaan (1) maka fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi normal standard variabel acak kontinu Z adalah:

$$f_N(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < \infty \text{ ....(3)}$$

Sedangkan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal standard ini dinyatakan sebagai :

$$f_N(z;0,1) = P(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \text{ ....(4)}$$

Distribusi normal variabel acak kontinu X dengan nilai-nilai parameter μ_x dan σ_x berapapun dapat diubah menjadi distribusi normal kumulatif standard jika variabel acak standard Z_x menurut hubungan :

$$z_x = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$$

Nilai z_x dari variabel acak standard z_x sering juga disebut sebagai *skor z* dari variabel acak X.

2. Distribusi Student's t

Distribusi student's t adalah distribusi yang ditemukan oleh seorang mahasiswa yang tidak mau disebut namanya. Untuk menghargai hasil penemuannya itu, distribusinya disebut distribusi Student yang lebih dikenal dengan distribusi "t", diambil daru huruf terakhir kata "student". Bentuk persamaan fungsinya :

$$f(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}}$$

Berlaku untul $-\infty < t < \infty$ dan K merupakan tetapan yang besarnya tergantung dari besar n sedemikian sehingga luas daerah antara kurva fungsi itu dan sumbu t adalah 1.

Bilangan n – 1 disebut derajat kebebasan (dk). Yang dimaksudkan dengan dk ialah kemungkinan banyak pilihan dari sejumlah objek yang diberikan. Misalnya kita mempunyai dua objek yaitu A dan B. Dari dua objek ini kita hanya mungkin melakukan 1 kali pilihan saja, A dan B. Seandainya terpilih A maka B tidak usah dipilih lagi. Dan untuk itu dk = 2 – 1 = 1.

Contoh soal:

a. Untuk n = 13, jadi dk = (n-1) = 13 - 1 = 12, dan p = 0,95 maka t = 1,782 ini didapat (lihat tabel distruibusi-t) dengan jalan maju ke kanan dari 12 dan menurun 0,95.
b. Bagaimana menggunakan tabel t? kalau v = 10 (berarti misalnya n = 11) serta $\alpha = 0{,}05$ maka $P(t > ?) = 0{,}05$

   Jawab:

   Untuk tabel yang disusun secara kumulatif maka kita harus melihat pada tabel t kumulatif, derajat bebas (v) =10 dan p = 1-0,05 = 0,95 dan ini menghasilkan nilai $t = t_{0,05} = 1{,}812$.

   Jadi $P(t > 1{,}812) = 0{,}05$

3. Distribusi Chi-Kuadrat (χ^2)

Distribusi chi-kuadrat merupakan distribusi yang banyak digunakan dalam sejumlah prosedur statistik inferensial. Distribusi chi-kuadrat merupakan kasus khusus dari distribusi gamma dengan faktor bentuk $\alpha = v/2$, dimana v adalah bilangan bulat positif dan faktor skala $\beta = 2$.

Jika variabel acak kontinu X memiliki distribusi chi-kudrat dengan parameter *v*, maka fungsi kepadatan probabilitas dari X adalah :

$$f_{\chi^2}(x; v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})} x^{\left(\frac{v}{2}\right)-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & yang\ lain \end{cases}$$

Parameter *n* disebut *angka derajat kebebasan (degree of freedom/df)* dari X. Sedangkan fungsi distribusi kumulatif chi-kuadrat adalah :

$$f_{\chi^2}(x; v) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})} t^{\left(\frac{v}{2}\right)-1} e^{-\frac{t}{2}} \; dt$$

Berikut ini diberikan rumusan beberapa ukuran statistik deskriptif untuk distribusi chi-kuadrat.

Mean (Nilai Harapan) :

$\mu_x = E(\square) = v$

Varians :

$\sigma_x^2 = 2v$

Kemencengan (skewness) :

$\beta_1 = \alpha_3^2 = \frac{8}{v}$

Keruncingan (kurtosis) :

$\beta_2 = \alpha_4 = 3(\frac{4}{v} + 1)$

Contoh :

Suatu perusahaan baterai mobil memberikan jaminan bahwa masa pakai baterai yang diproduksinya adalah rata-rata 3 tahun dengan simpangan baku 1 tahun. Jika diambil contoh sebanyak 5 buah baterai dan masa pakainya (dalam tahun) adalah: 1,9 ; 2,4 ; 3,0 ; 3,5 ; dan 4,2. Apakah benar bahwa jaminan perusahaan tentang simpangan baku 1 tahun dapat dipercaya?

Penyelesaian :

Pertama-tama kita menghitung nilai ragam contoh (s^2) :

$$s^2 = \frac{48{,}26 - \frac{(15)^2}{5}}{5-1} = 0{,}815$$

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(4)(0{,}815)}{1} = 3{,}26$$

Nilai 3,26 adalah nilai chi kuadrat dengn derajat bebas v = n-1 = 5-1 =4. Karena 95% dari nilai chi kuadrat dengan derajat bebas 4 terletak antara 0,484 $(X^2_{0{,}025})$ dan 11,1 $(X^2_{0{,}975})$

Maka berdasarkan nilai $X^2 = 3{,}26$ terletak dalam selang nilai sebaran chi kuadrat 95% dengan derajat bebas 4, maka pernyataan bahwa simpangan baku adalah 1 tahun masih dapat dipercaya.

4. Distribusi F

Menurut Gasperz (1989:251), secara teori sebaran F merupakan rasio dari dua sebaran chi kuadrat yang bebas. Oleh karena itu peubah acak F diberikan sebagai:

$$F = \frac{X_1^2/V_1}{X_2^2/V_2}$$

Dimana :

$X_1^2 = \textit{ nilai dari sebaran chi kuadrat dengan derajat bebas } V_1 = n_1 - 1$

$X_2^2 = \textit{ nilai dari sebaran chi kuadrat dengan derajat bebas } V_2 = n_2 - 1$

Oleh karena itu sebaran F mempunyai dua derajat bebas yaitu $V_1 \; dan \; V_2$.

Misal :

Kita ingin mengetahui nilai F dengan derajat bebas $V_1 = 10$ dan $V_2 = 12$, maka jika $\alpha = 0{,}05$ dari tabel F diperoleh nilai $F_{0{,}05\,(10{,}12)} = 2{,}75$

DAFTAR PUSTAKA

Akbar, Purnomo Setiady dan Husaini Usman. 2006. *Pengantar Statistika* Edisi Kedua. Jakarta : PT Bumi Aksara

Akdon dan Riduwan .2013. *Rumus dan Data dalam Analisis Statistika*. Bandung : Alfabeta.

Dajan, Anto, 1986. *"Pengantar Metode Statistik Jilid II"*. Jakarta : LP3ES .

Furqon. 1999. *Statistika Terapan Untuk Penelitian*. AFABETA:Bandung

Gaspersz, Vincent. 1989. *Statistika*. Armico:Bandung

Hamid, H.M. Akib dan Nar Herrhyanto. 2008. Statistika Dasar. Jakarta : Universitas Terbuka.

Harinaldi, 2005. "*Prinsip-prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains"*. Jakarta : Erlangga.

Hasan, M. Iqbal. 2011. Pokok – Pokok Materi Statistika 1 (Statistik Deskriptif). Jakarta : PT Bumi Aksara

Herrhyanto, Nar. 2008. *Statistika Dasar*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Mangkuatmodjo, Soegyarto. 2004. *Statistika Lanjutan*. Jakarta: PT Rineka Cipta.

Pasaribu, Amudi. 1975. *Pengantar Statistik*. Gahlia Indonesia : Jakarta

Rachman,Maman dan Muchsin . 1996. *Konsep dan Analisis Statistik*. Semarang : CV. IKIP Semarang Press

Riduwan . 2010. *Dasar-dasar Statistika*. Bandung : Alfabeta.

Saleh,Samsubar. 1998. *STATISTIK DESKRIPTIP*. Yogyakarta : UPP AMP YKPN.

Siregar,Syofian. 2010. *Statistika Deskriptif untuk Penelitian Dilengkapi Perhitungan Manual dan Aplikasi SPSS Versi 17*. Jakarta : Rajawali Pers.

Somantri, Ating dan Sambas Ali Muhidin. 2006. *Aplikasi statistika dalam Penelitian*. pustaka ceria : Bandung

Subana,dkk. 2000. *Statistik Pendidikan*. Pustaka Setia:Bandung

Sudijono, Anas. 2008. *Pengantar Statistik Pendidikan*. Raja Grafindo Persada.Jakarta

Sudijono, Anas. 2009. *Pengantar Statistik Pendidikan*. Jakarta : PT RajaGrafindo Persada.

Sudijono, Anas. 1987. *Pengantar Statistik Pendidikan*. Jakarta : PT RajaGrafindo Persada.

Sudjana, M.A., M.SC.2005. *METODE STATISTIKA*. Bandung: Tarsito

Sugiyono. 2014. *Statistika untuk Penelitian*. Bandung : Alfabeta.

Supranto, 1994. "*Statistik Teori dan Aplikasi Jilid 2"*. Jakarta : Erlangga.

Usman, Husaini & Setiady Akbar, Purnomo.2006. *PENGANTAR STATISTIKA*. Yogyakarta: BUMI AKSARA.

Walpole, Ronald E, 1995. *"Pengantar Statistik Edisi Ke-4"*. Jakarta : PT Gramedia.