BAHAN AJAR

FISIKA MATEMATIKA II

Oleh :

IMAS RATNA ERMAWATi

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UHAMKA
2020

KATA PENGANTAR

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

I. DERET FOURIER

1.1 Fungsi Periodik

Sebuah fungsi *f(x)* dikatakan periodik dengan peirode *L*, jika untuk semua x, berlaku hubungan *f(x + L) = f(x)*, dengan *L* adalah konstanta positif. Jika *L* adalah periode terkecil, maka *L* disebut periode dasar, yang selanjutnya disebut sebagai periode saja dan $a \leq x \leq a + L$ disebut selang dasar fungsi periodik *f(x)*, dengan *a* adalah suatu konstanta. Konstanta *a* dapat dipilih sembarang, namun pilihan $a = -L/2$ sering digunakan karena memberikan selang dasar yang simetris terhadap titik $x = 0$, yaitu $-L/2 \leq x \leq L/2$.

Contoh fungsi periodik adalah fungsi-fungsi sinusoida (fungsi sin *x* dan cos *x*). Kedua fungsi sin *x* dan cos *x* sama-sama memiliki periode 2π, yang berarti berlaku hubungan :

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \text{ dan } \cos(x \pm 2\pi) = \cos x \tag{1.1}$$

Pers. (1.1) menunjukkan bahwa periode $L = 2\pi$.

1.2 Deret Fourier

Misalkan suatu fungsi *f(x)* didefinisikan di dalam interval $(-L, L)$ dan di luar interval ini oleh $f(x + 2L) = f(x)$, dalam hal ini *f(x)* memiliki periode 2*L*. Deret Fourier yang bersesuaian diberikan oleh :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1.2}$$

dengan koefisien-koefisien Fourier a_n dan b_n adalah :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{aligned} \qquad \text{dengan } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Untuk menentukan a_0 dalam Pers.(1.2), substitusi nilai $n = 0$ pada Pers.(1.3) untuk a_n, sehingga diperoleh $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$. Dengan demikian, suku konstan pada Pers.(1.2), yaitu $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$, merupakan nilai rata-rata dari *f(x)* pada suatu periode.

Untuk kasus yang lebih sederhana, di mana *f(x)* memiliki periode 2π atau *f(x)* didefinisikan di dalam interval (-π, π), Pers. (1.2) menjadi :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{1.4}$$

dan koefisien-koefisien Fourier a_n dan b_n adalah :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad \text{dengan } n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.5)$$

Untuk mencari perumusan bagi a_n dan b_n pada Pers.(1.5) diperlukan beberapa integral yang terkait dengan nilai rata-rata berikut :

1. Nilai rata-rata bagi sin *mx* dan cos *nx* (lewat satu periode) :

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0.$$

2. Nilai rata-rata bagi sin *mx* dan sin *nx* (lewat satu periode) :

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{2}, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases}$$

3. Nilai rata-rata bagi cos *mx* dan cos *nx* (lewat satu periode) :

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{2}, & m = n \neq 0 \\ 1, & m = n = 0 \end{cases}$$

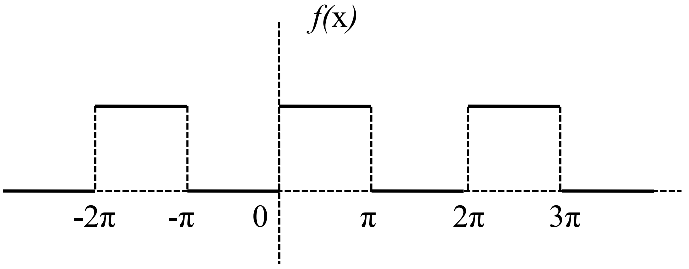
(1.6)

dan dengan mengingat bahwa nilai rata-rata $\sin^2 nx$ (lewat satu periode) = nilai rata-rata $\cos^2 nx$ (lewat satu periode), yaitu

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \qquad (1.7)$$

Contoh 1

Suatu pulsa tegangan periodik sebagai fungsi *f(x)*, digambarkan seperti dalam Gambar 1.1. Tentukan perluasan fungsi *f(x)* tersebut dalam uraian deret Fourier.



Gambar 1.1 Fungsi *f(x)* untuk pulsa tegangan periodik.

Jawab :

Dari gambar diperoleh bahwa *f(x)* adalah fungsi dengan periode 2π, dan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Interval (-π,π)

Koefisien Fourier, a_n dan b_n , dicari dengan menggunakan Pers.(1.3),

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cdot \pi = 1 & \text{untuk } n = 0 \\ \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0 & \text{untuk } n \neq 0 \end{cases}$$

Jadi $a_n = 1$, dan semua nilai a_n lainnya = 0.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot \sin nx\, dx + \int_0^{\pi} 1\cdot \sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 0, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga dengan Pers. (1.4),

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n}(a_n \cos n\pi + b_n \sin n\pi)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right) \quad (1.8)$$

Soal-soal Latihan 1 :

Pada soal-soal berikut ini, Anda diberikan fungsi-fungsi periodik pada interval ($-\pi < x < \pi$). Carilah perluasan fungsi-fungsi periodik tersebut dalam deret Fourier sinus-cosinus dengan terlebih dahulu membuat sketsa bagi masing-masing fungsi dengan periode 2π.

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$ Jawab : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ Jawab : $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} \cdots\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots\right)$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ Jawab : $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} \cdots\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{2\sin 6x}{6} \cdots\right)$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ Jawab : $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \cdots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$

5. $f(x) = 1 + x,\ -\pi < x < \pi$ Jawab : $f(x) = 1 + 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \cdots\right)$

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ Jawab : $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} \cdots\right)$

1.3 Syarat *Dirichlet*

Persyaratan sebuah fungsi *f(x)* agar teruraikan ke dalam deret Fourier diberikan oleh syarat *Dirichlet* berikut :

Jika :

1. *f*(x) didefinisikan dan bernilai tunggal di dalam $(-L, L)$.
2. *f*(x) periodic di luar $(-L, L)$ dengan periode $2L$.
3. *f*(x) dan *f'*(x) kontinu sepotong-sepotong di dalam $(-L, L)$

maka deret Fourier dengan koefisien-koefisiennya pada Pers.(1.2) dan (1.3), konvergen ke :

a. *f*(x) jika *x* adalah sebuah titik kontinuitas
b. $\frac{f(x_{0+})+f(x_{0-})}{2}$ jika x_0 adalah sebuah titik diskontinuitas, dengan

$$f(x_{0+}) = \lim_{c\to 0} f(x_0 + c) \text{ dan } f(x_{0-}) = \lim_{c\to 0} f(x_0 - c)$$

1.4 Bentuk Kompleks dari Deret Fourier

Dengan menggunakan hubungan $\sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$ dan $\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, bentuk deret Fourier sinus-cosinus Pers.(1.8) dapat dibuat menjadi deret Fourier bentuk kompleks. Demikian sebaliknya, dari deret Fourier bentuk kompleks dapat dikembalikan lagi menjadi deret Fourier sinus-cosinus, dengan menggunakan *Euler's formula*.

Asumsikan sebuah deret berikut :

$$f(x) = c_0 + c_1e^{ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_2e^{2ix} + c_{-2}e^{-2ix} + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \qquad (1.9)$$

dan bentuk c_n harus dicari. Dari hubungan: $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = 0$, nilai rata-rata e^{ikx} pada interval $(-\pi, \pi)$ sama dengan nol jika *k* bilangan bulat bukan nol. Untuk c_0, diperoleh dengan mencari nilai rata-rata *f(x)* Pers.(1.9), yaitu :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = c_0 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \begin{cases}\text{nilai rata} - \text{rata } e^{ikx} \\ \text{dengan } k \text{ bil. bulat} \neq \text{ nol}\end{cases} = c_0 + 0$$

Sehingga diperoleh :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (1.10)$$

Dengan mengalikan Pers.(1.9) dengan e^{-inx}dan kembali dicari nilai rata-ratanya, akhirnya diperoleh :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \qquad (1.11)$$

Tugas 1 :

Dengan menggunakan literatur yang ada, cobalah Anda turunkan Pers.(1.4) dan (1.11).

Contoh 2

Tentukan perluasan fungsi *f(x)* pada Contoh 1 dalam uraian deret Fourier bentuk kompleks.

Jawab :

Gunakan pers (1.11), yaitu $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$, untuk $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1 \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{-2\pi in}(e^{-in\pi} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\pi in}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 0, & \text{untuk } n \text{ genap} \neq 0 \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

Jadi Pers.(1.9) menjadi :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi}\left(\frac{e^{ix}}{1} + \frac{e^{3ix}}{3} + \frac{e^{5ix}}{5} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\left(\frac{e^{-ix}}{-1} + \frac{e^{-3ix}}{-3} + \frac{e^{-5ix}}{-5} + \cdots\right)$$

dan dengan menggunakan *Euler's formula*, kembali akan diperoleh Pers.(1.8) :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \frac{1}{3}\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + \frac{1}{5}\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i}\frac{e^{5ix}}{5} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

Soal-soal Latihan 2 :

Lihat kembali soal-soal latihan 1. Tentukan perluasan fungsi *f(x)* dalam uraian deret Fourier bentuk kompleks untuk soal-soal bernomor ganjil.

1.5 Perluasan Deret Fourier

Berdasarkan Pers.(1.5) dan (1.11), terangkum bahwa untuk *f(x)* yang terdefinisi pada selang kurva (0, 2π) yang berulang secara periodik, berlaku :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos n\pi \, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin n\pi \, dx$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$$

Untuk panjang interval $2L$ $(-L, L)$ atau $(0, 2L)$, $\sin\frac{n\pi x}{L}$ memiliki periode $2L$, karena:

$$\sin\frac{n\pi}{L}(x + 2L) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (1.12)$$

Hal yang sama juga berlaku untuk $\cos\frac{n\pi x}{L}$ dan $e^{\frac{in\pi x}{L}}$, keduanya memiliki periode $2L$.

Sehingga, diperoleh kembali Pers.(1.2) dan (1.3), yaitu bentuk perluasan deret Fourier :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ atau } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\pi x/L} \qquad (1.13)$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx \qquad (1.14)$$
$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-in\pi x/L} dx$$

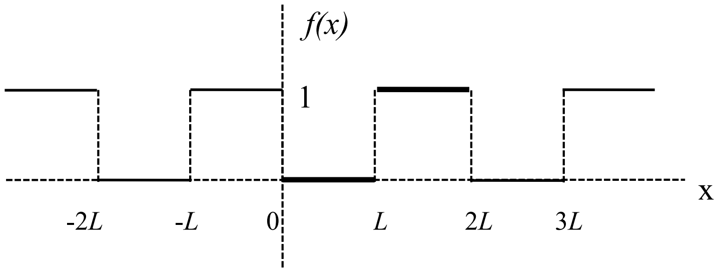
Contoh 3

Carilah perluasan fungsi periodik berikut dalam deret Fourier eksponensial dengan periode $2L$, bila diketahui :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ 1 & L < x < 2L \end{cases}$$

Jawab :

Terlebih dahulu, buat sketsa dari grafik $f(x)$ dan lanjutkan sketsanya dengan periode $2L$.



Catatan :

Mencari deret Fourier eksponensial berarti mencari koefisien *Cn* terlebih dahulu.

Gambar 1.2 Sketsa fungsi *f(x)* untuk deret Fourier eksponensial.

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx = \frac{1}{2L}\int_{0}^{L} 0 \cdot e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx + \frac{1}{2L}\int_{L}^{2L} 1 \cdot e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2L}\frac{e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{-\frac{in\pi}{L}}\Big|_{L}^{2L} = \frac{1}{-2in\pi}\left(e^{-2in\pi} - e^{-in\pi}\right) = \frac{1}{-2in\pi}\left(1 - e^{-in\pi}\right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{in\pi}, & n \text{ ganjil} \\ 0, & n \text{ genap } \neq 0 \end{cases}$$

dan

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{L}^{2L} dx = \frac{1}{2}$$

Sehingga,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx/L} = \frac{1}{2} - \frac{1}{i\pi}\left(e^{i\pi x/L} - e^{-i\pi x/L} + \frac{1}{3}e^{3i\pi x/L} - \frac{1}{3}e^{-3i\pi x/L} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} + \cdots\right)$$

Soal-soal Latihan 3 :

Untuk soal 1 dan 2. carilah perluasan fungsi-fungsi periodik berikut dalam deret Fourier sinus-cosinus dan deret Fourier eksponensial kompleks.

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & -L < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$

Jawab :

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{L}\cdots\right) + \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{2}{2}\sin\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L} + \frac{2}{6}\sin\frac{6\pi x}{L}\cdots\right)$$

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & -L < x < 0 \\ \text{x} & 0 < x < L \end{cases}$

Jawab : $(x) = \frac{1}{4} - \frac{2L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{L}\cdots\right) + \frac{L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}\cdots\right)$

Untuk soal-soal 3 – 5, masing-masing fungsi diberikan lewat satu periode. Sketsalah fungsi-fungsi tersebut untuk beberapa periode dan perluaslah dalam deret Fourier sinus-cosinus dan deret Fourier eksponensial kompleks.

3. $f(x) = x,\ 0 < x < 2$ Jawab : $f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$

4. $f(x) = x^2,\ -\pi < x < \pi$ Jawab : $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$

5. $f(x) = x^2,\quad 0 < x < 2\pi$ Jawab : $f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 2\sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{i\pi}{n}\right) e^{inx},\ \ n \neq 0$

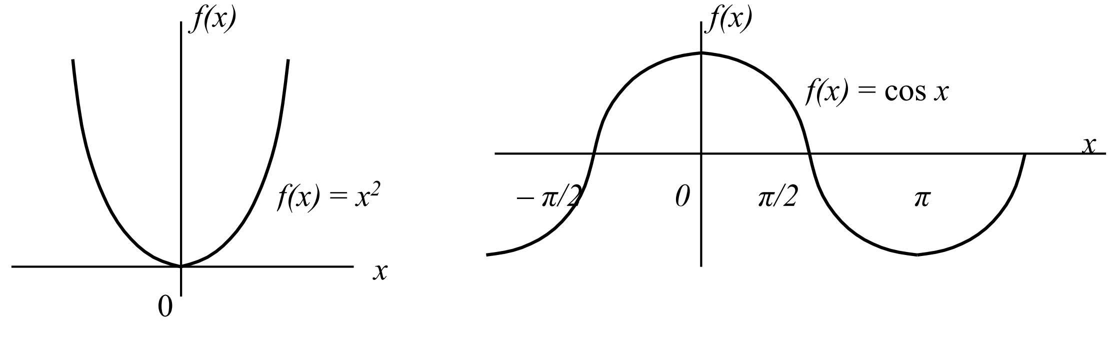
6. Misalkan $f(x) = x$ dalam interval $-1 < x < 1$. Sketsa fungsi tersebut dengan periode 2 dan perluaslah dalam deret Fourier eksponensial kompleks dengan periode 2.

Jawab:

$$f(x) = -\frac{i}{\pi}\left(\cdots - \frac{1}{3}e^{-3i\pi x} + \frac{1}{2}e^{-2i\pi x} - e^{-i\pi x} + e^{i\pi x} - \frac{1}{2}e^{2i\pi x} + \frac{1}{3}e^{3i\pi x} - \cdots\right)$$

1.6 Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

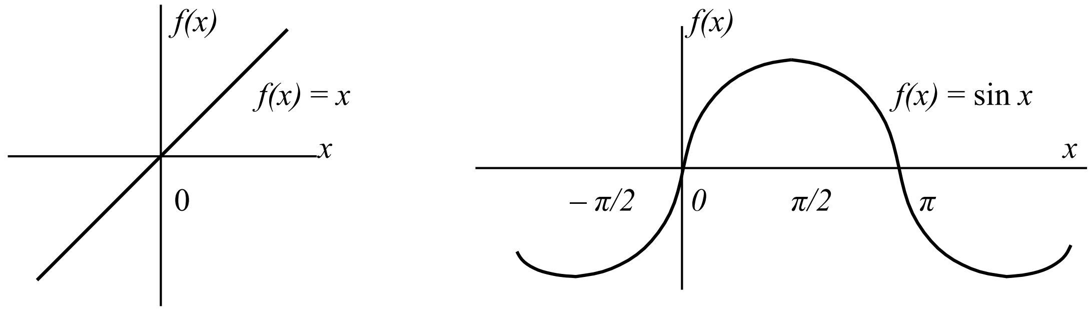
Sebuah fungsi $f(x)$ dinamakan fungsi genap bila dipenuhi hubungan $f(-x) = f(x)$. Contoh fungsi genap yang paling sederhana adalah x^2 atau $\cos x$. Kedua fungsi ini masing-masing diilustrasikan oleh Gambar 1.3 a dan b.



(a) (b)

Gambar 1.3 Grafik fungsi genap, (a). $f(x) = x^2$ dan (b). $f(x) = \cos x$

Sebuah fungsi $f(x)$ dinamakan fungsi ganjil bila dipenuhi hubungan $f(-x) = -f(x)$. Contoh fungsi ganjil yang paling sederhana adalah x atau $\sin x$. Kedua fungsi ini masing-masing diilustrasikan oleh Gambar 1.4 a dan b.



Contoh lainnya adalah *f(x) = x^n*. Jika *n* adalah pangkat genap, maka *f(x) = x^n* adalah fungsi genap. Namun, jika *n* adalah pangkat ganjil, maka *f(x) = x^n* adalah fungsi ganjil.

Pada umumnya, jika *f(x)* adalah fungsi genap, integral *f(x)* dari – *L* ke *L* adalah dua kali integral *f(x)* dari 0 ke *L*, atau dapat ditulis :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ ganjil} \\ 2\int_0^L f(x)\,dx, & f(x) \text{ genap} \end{cases} \qquad (1.15)$$

Untuk deret Fourier, Pers.(1.3), jika *f(x)* adalah fungsi ganjil, berlaku :

$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (1.16)$$

maka *f(x)* "dikatakan" diperluas dalam deret sinus Fourier. Namun, jika *f(x)* adalah fungsi genap, berlaku :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$
$$b_n = 0 \qquad (1.17)$$

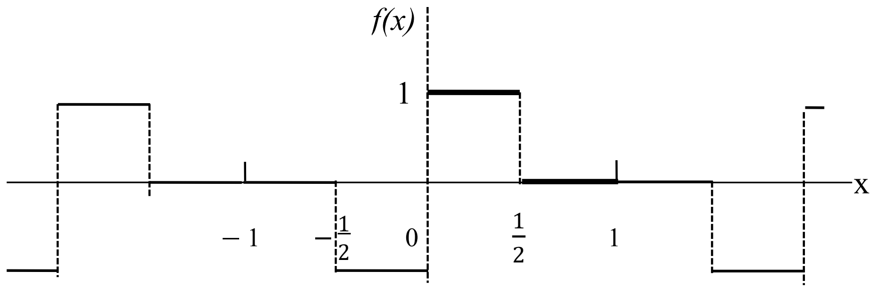
maka maka *f(x)* "dikatakan" diperluas dalam deret cosinus Fourier.

Contoh 4

Nyatakan $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ dalam (a) deret sinus Fourier, (b) deret cosinus Fourier, dan (c) deret Fourier eksponensial.

Jawab :

(a). Sketsa fungsi *f(x)* di antara (0, 1), kemudian diperluas untuk interval (-1, 0) yang membuatnya sebagai fungsi ganjil (Gambar 1.5).



Dalam hal ini, periode = 2 atau L = 1

Gambar 1.5 Sketsa fungsi *f(x)* untuk deret sinus Fourier.

Yang diminta adalah deret sinus Fourier berarti $a_n = 0$ dan

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}\,dx$$

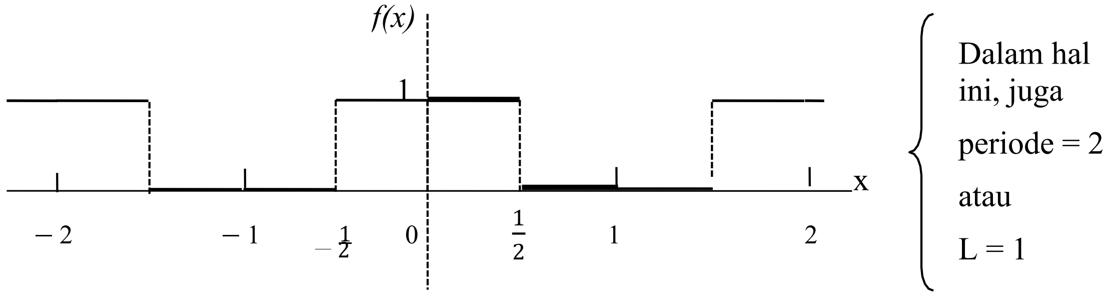
$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} 1\cdot\sin n\pi x\,dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\cdot\sin n\pi x\,dx = \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^{1/2} = \frac{-2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

dan diperoleh : $b_1 = \frac{2}{\pi}$, $b_2 = \frac{4}{2\pi}$, $b_3 = \frac{2}{3\pi}$, $b_4 = 0$, dan seterusnya.

Dengan demikian, deret sinus Fourier bagi *f(x)* adalah :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\pi x}{1} + \frac{2\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \frac{2\sin 6\pi x}{6} + \cdots\right)$$

(b). Sketsa fungsi *f(x)* di antara (0, 1), kemudian diperluas untuk interval (–1, 0) yang membuatnya sebagai fungsi genap (Gambar 1.6). Dalam hal ini sisi – *x* adalah cermin dari + *x* (Gambar 1.6).



Gambar 1.6 Sketsa fungsi *f(x)* untuk deret cosinus Fourier.

Yang diminta adalah deret cosinus Fourier berarti $b_n = 0$ dan $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = 2\left[\int_0^{1/2} 1\cdot dx + \int_{1/2}^{1} 0\cdot dx\right] = 1$$

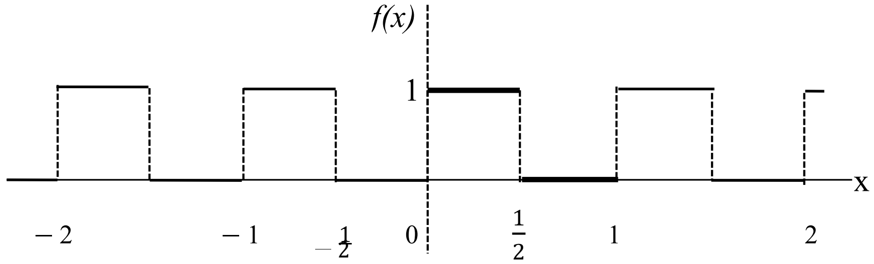
$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} 1\cdot\cos n\pi x\,dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\cdot\cos n\pi x\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Dengan demikian, deret cosinus Fourier bagi *f(x)* adalah :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos\pi x}{1} - \frac{\cos 3\pi x}{3} + \frac{\cos 5\pi x}{5} \cdots\right)$$

(c). Sketsa fungsi *f(x)* di antara (0, 1), kemudian diperluas dengan periode 1 (Gambar 1.7).



Dalam hal ini, periode = interval fungsi atau $2L = 1$

Gambar 1.7 Sketsa fungsi *f(x)* untuk deret Fourier eksponensial.

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx = \frac{1}{1}\int_0^{1} f(x)\, e^{-2in\pi x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 1\cdot e^{-2in\pi x}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\cdot e^{-2in\pi x} dx$$

$$= \frac{1}{-2in\pi} e^{-2in\pi x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-in\pi}-1}{-2in\pi} = \frac{1-e^{-in\pi}}{2in\pi} = \frac{1-(-1)^n}{2in\pi} = \begin{cases} \frac{1}{in\pi}, & n \text{ ganjil} \\ 0, & n \text{ genap} \neq 0 \end{cases}$$

$$c_n = \int_0^{1/2} dx = \frac{1}{2}$$

Dengan demikian, deret Fourier eksponensial bagi *f(x)* adalah :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx/L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi}\left(e^{2i\pi x} - e^{-2i\pi x} + \frac{1}{3}e^{6i\pi x} - \frac{1}{3}e^{-6i\pi x} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \cdots\right)$$

1.7 **Teorema *Parseval***

Teorema *Parseval* ditujukan untuk menunjukkan hubungan antara rata-rata kuadrat *f(x)* dan koefisien-koefisien Fourier.

Tinjau lagi Pers.(1.2) :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dan

Rata-rata dari $[f(x)]^2$ adalah $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx$ (1.18)

Dengan menggunakan rata-rata kuadrat dari suatu sinus atau cosinus lewat satu periode adalah 1/2 , diperoleh :

$$\text{Rata-rata dari } \left(\tfrac{1}{2}a_0\right)^2 \text{ adalah } \left(\tfrac{1}{2}a_0\right)^2$$
$$\text{Rata-rata dari } (a_n \cos nx)^2 \text{ adalah } a_n^2 \cdot \tfrac{1}{2} \qquad (1.19)$$
$$\text{Rata-rata dari } (b_n \sin nx)^2 \text{ adalah } b_n^2 \cdot \tfrac{1}{2}$$

Dan dengan menggunakan Pers.(1.6), diperoleh :

$$\text{Rata-rata dari } [f(x)]^2 \text{ (lewat satu periode) adalah} = \left(\tfrac{1}{2}a_0\right)^2 + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty a_n^2 + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty b_n^2 \qquad (1.20)$$

dan untuk pernyataaan kompleksnya diperoleh :

$$\text{Rata-rata dari } [f(x)]^2 \text{ (lewat satu periode) adalah} = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \qquad (1.21)$$

Ungkapan yang lebih umum, Pers. (1.20) menjadi :

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} [f(x)]^2\, dx = \left(\tfrac{1}{2}a_0\right)^2 + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty a_n^2 + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty b_n^2$$

atau

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} [f(x)]^2\, dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$$

yang dikenal dengan Identitas *Parseval*.

Soal-soal Latihan 4 :

Untuk soal-soal 1 – 4 berikut, masing-masing fungsi diberikan lewat satu periode. Sketsalah fungsi-fungsi tersebut untuk beberapa periode dan tentukan apakah dia merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil. Dengan menggunakan Pers.(1.16) dan (1.17), perluaslah fungsi-fungsi tersebut dalam deret Fourier yang bersesuaian.

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$ Jawab : $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin nx$, n ganjil

2. $f(x) = \begin{cases} -1, & -L < x < 0 \\ 1, & 0 < x < L \end{cases}$ Jawab : $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right)$

3. $f(x) = x^2, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ Jawab : $f(x) = \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2}\left(\cos 2\pi x - \frac{1}{2^2}\cos 4\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 6\pi x \cdots\right)$

4. $f(x) = |x|, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad$ Jawab : $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ ganjil}} \cos \frac{2nx}{n^2}$

5. Diketahui fungsi *f(x)* = *x* untuk 0 < *x* < 1, sketsalah fungsi genap f_c dengan periode 2 dan fungsi ganjil f_s dengan periode 2, yang masing-masing *f(x)* sama pada 0 < *x* < 1. Perluas f_c dalam sebuah deret cosines dan f_s dalam sebuah deret sinus.

Jawab : $f_c(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos \pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \cdots)$

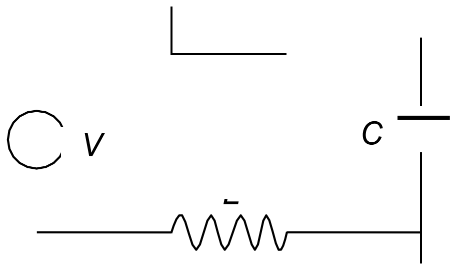
$$f_s(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \cdots\right)$$

II. PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

2.1 Persamaan Diferensial

Sebuah persamaan yang di dalamnya memuat turunan (*derivative*) dinamakan sebuah persamaan diferensial. Jika dalam persamaan tersebut memuat turunan parsial, dia dinamakan persamaan diferensial parsial (PDP), namun jika di dalamnya hanya memuat turunan biasa, dia dinamakan persamaan diferensial biasa (PDB). Setiap persamaan diferensial memiliki penyelesaian atau solusi, baik solusi umum maupun solusi khusus. Dalam bab ini, kita akan meninjau beberapa metode penyelesaian dari PDB yang sering dijumpai dalam persamaan fisika.

Tinjau sebuah rangkaian listrik hubungan seri *RLC* (Gambar 2.1). Rangkaian seri *RLC* sederhana memuat sebuah resistor *R*, sebuah kapasitor *C*, dan sebuah induktor *L*, serta sebuah sumber tegangan *V*.



Gambar 2.1 Rangkaian RLC

Jika arus yang mengaliri rangkaian saat t adalah $I(t)$ dan muatan pada kapasitor adalah $q(t)$, maka $I = dq/dt$. Tegangan pada R adalah IR, tegangan pada C adalah q/C, dan tegangan pada L adalah $L(dI/dt)$. Pada setiap saat, diperoleh :

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = V \qquad (2.1)$$

Jika Pers.(2.1) didiferensiasi terhadap t dan substitusikan $dq/dt = I$, diperoleh

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt} \qquad (2.2)$$

sebagai persamaan diferensial untuk arus I dalam rangkaian seri sederhana dengan R, C, L, dan V yang diketahui.

Orde dari persamaan diferensial adalah orde dari *derivative* tertinggi dalam persamaan tersebut. Persamaan diferensial orde-satu adalah persamaan diferensial yang memuat turunan tingkat-satu, persamaan diferensial orde-dua memuat turunan tingkat-dua, dan seterusnya.

Persamaan diferensial orde-satu misalnya :

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V, \qquad \frac{dv}{dt} = -g \qquad y' + xy^2 = 1, \qquad (2.3)$$

dan Pers.(2.2) merupakan salah satu contoh persamaan diferensial orde-dua.

Dalam penerapannya, sebagian besar persamaan diferensial yang digunakan adalah persamaan diferensial linear. Dua persamaan pertama dari Pers.(2.3) merupakan contoh dari persamaan linear, sedangkan persamaan terakhir merupakan contoh persamaan nonlinear. Sebuah persamaan diferensial linear (dengan x sebagai variabel bebas dan y sebagai variabel terikat) memiliki bentuk umum :

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y''' + \ldots = b$$

dengan a_0, a_1, a_2, …, dan b adalah konstanta atau fungsi dari x.

Perlu diingat bahwa sebuah solusi dari persamaan diferensial (dalam variabel x dan y) adalah sebuah relasi di antara x dan y, yang jika disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial itu memberikan sebuah identitas. Sebagai contoh, relasi $y = \sin x + C$ adalah sebuah solusi dari persamaan diferensial $y' = \cos x$, karena jika $y = \sin x + C$ disubstitusikan ke $y' = \cos x$, maka diperoleh sebuah identitas, yaitu $\cos x = \cos x$.

2.2 Persamaan ***Separable***

Bila kita menguji sebuah integral $y = \int f(x)\, dx$, berarti kita memecahkan sebuah persamaan diferensial $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$, yang dapat ditulis sebagai $dy = f(x)dx$. Variabel ruas kiri dan kanan terpisah, pada ruas kiri hanya memuat variabel y dan ruas kanan hanya memuat variabel x. Persamaan diferensial seperti ini, yang dapat dipisahkan variabelnya, disebut persamaan *separable*, dan solusinya dapat diperoleh dengan hanya mengintegrasikan masing-masing ruas persamaan tersebut.

Contoh 2.1 Laju peluruhan suatu bahan radioaktif sebanding dengan jumlah atom yang tersisa. Jika terdapat N_0 atom saat $t = 0$, tentukan jumlah atom saat waktu t.

Jawab :

Persamaan diferensial untuk persoalan ini :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

dengan λ adalah konstanta peluruhan.

Persamaan ini adalah persamaan *separable*, yang ditulis sebagai : $\frac{dN}{N} = -\lambda\ dt$

Integrasi kedua ruas, diperoleh : $\ln N = -\lambda t + C$

Saat $t = 0$, $N = N_0$, konstanta integrasinya adalah $\ln N_0$.

Jadi pemecahan untuk N, diperoleh : $\qquad N = N_0 \ e^{-\lambda t}$

Contoh 2.2 Pecahkan persamaan diferensial : $xy' = y + 1$.

Jawab :

Bagi kedua ruas persamaan dengan $(y + 1)$, diperoleh

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x} \text{ atau } \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x}$$

Integrasi kedua ruas, diperoleh :

$$\ln(y+1) = \ln x + C = \ln x + \ln a = \ln(ax),$$

sehingga solusi dari persamaan diferensial $xy' = y + 1$ adalah $y + 1 = ax$.
Solusi umum ini merepresentasikan sebuah keluarga kurva dalam bidang (x, y), satu kurva untuk masing-masing nilai a. Atau kita dapat menyebut solusi umum ini sebagai keluarga solusi. Solusi khususnya adalah salah satu dari keluarga solusi ini.

Soal-soal Latihan 1 :

Tentukan solusi umum (solusi yang memiliki konstanta sembarang) dari masing-masing persamaan diferensial berikut dengan metode separasi variabel. Kemudian, tentukan solusi khusus masing-masing persamaan dengan menggunakan syarat-syarat batas yang ada.

1. $xy' = y, \quad y = 3$ bila $x = 2$
2. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y = \frac{1}{2}$ bila $x = \frac{1}{2}$

   Jawab : $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (1-y^2)^{\frac{1}{2}} = C, \ \ C = \sqrt{3}$
3. $y' \sin x = y \ln y, \quad y = e$ bila $x = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ Jawab : $\ln y = A(\csc x - \cot x), \quad A = \sqrt{3}$
4. $(1 + y^2)dx + xy\,dy = 0, \quad y = 0$ bila $x = 5$
5. $xy' - xy = y, \quad y = 1$ bila $x = 1$
6. $y' = \frac{2xy^2 + x}{x^2y - y}, \quad y = 0$ bila $x = \sqrt{2}$ $\qquad$ Jawab : $2y^2 + 1 = A(x^2 - 1)^2, \quad A = 1$
7. $(1 + y)y' = y, \quad y = 1$ bila $x = 1$ $\qquad$ Jawab : $ye^y = ae^x, \quad a = 1$
8. $y' - xy = x, \quad y = 1$ bila $x = 0$

Tugas 1

Perhatikan kembali rangkaian listrik sederhana sebelumnya [Gambar 2.1 dan Pers.(2.1)] dan tinjau untuk kasus-kasus berikut.

a. Rangkaian *RC* (dalam hal ini, $L = 0$) dengan $V = 0$, tentukan q sebagai fungsi dari t jika q_0 adalah muatan pada kapasitor saat $t = 0$.
b. Rangkaian *RL* (dalam hal ini, kapasitor tidak ada sehingga $1/C = 0$) dengan $V = 0$, tentukan $I(t)$ yang memberikan $I = I_0$ saat $t = 0$.
c. Jika *time constant* τ untuk suatu rangkaian didefinisikan sebagai waktu yang diperlukan bagi muatan (atau arus) untuk turun menuju 1/e kali keadaan nilai awalnya. Tentukan *time constant* τ untuk rangkaian a dan b.

2.3 Persamaan Linear Orde-Satu

Sebuah persamaan linear orde-satu dapat ditulis dalam bentuk :

$$y' + Py = Q, \qquad (2.4)$$

di mana P dan Q adalah fungsi dari x. Untuk memecahkan Pers.(2.4), pertama kita tinjau persamaan yang lebih sederhana, yaitu bila $Q = 0$, yaitu :

$$y' + Py = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = -Py \qquad (2.5)$$

yang *separable*. Selanjutnya diperoleh :

$$\frac{dy}{y} = -P\,dx, \text{ sehingga diperoleh } \ln y = -\int P\,dx + C, \text{ atau}$$

$$y = e^{-\int P\,dx + C} = Ae^{-\int P\,dx} \qquad (2.6)$$

dengan $A = e^C$. Untuk menyederhanan notasi, misalkan :

$$I = \int P\,dx, \qquad \text{sehingga} \qquad \frac{dI}{dx} = P \qquad (2.7)$$

dan Pers.(2.6) dapat ditulis sebagai

$$y = Ae^{-I} \qquad \text{atau} \qquad ye^{I} = A. \qquad (2.8)$$

Selanjutnya kita dapat melihat bagaimana memecahkan Pers.(2.4). Jika kita defrensiasikan Pers.(2.8) kanan terhadap x dan terapkan Pers.(2.7) kanan, diperoleh :

$$\frac{d}{dx}(ye^{I}) = y'e^{I} + ye^{I}\frac{dI}{dx} = y'e^{I} + ye^{I}P = e^{I}(y' + Py), \qquad (2.9)$$

yang tidak lain adalah ruas kiri dari Pers.(2.4) yang dikalikan dengan e^I. Jadi kita dapat menulis Pers.(2.4) kali e^I sebagai

$$\frac{d}{dx}(ye^{I}) = e^{I}(y' + Py) = Qe^{I}. \qquad (2.10)$$

Karena Q dan e^I adalah fungsi dari x, pengintegrasian Pers.(2.10) terhadap x, diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} ye^{I} &= \int Qe^{I}\,dx + C, \qquad \text{atau} \\ y &= e^{-I}\int Qe^{I}\,dx + Ce^{-I}, \end{aligned}\right\} \text{ di mana } I = \int P\,dx \qquad (2.11)$$

yang merupakan solusi umum dari Pers.(2.4).

Contoh 2.3 Pecahkan persamaan : $x^2y' - 2xy = \frac{1}{x}$

Jawab :

Gunakan bentuk Pers.(2.4), $y' + Py = Q$, sehingga diperoleh $y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}$.

Dari Pers.(2.11), diperoleh $I = \int P\,dx = \int -\frac{2}{x}\,dx = -2\ln x$, sehingga $e^{I} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$,

dan $\qquad ye^{I} = y \cdot \frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C.$

Akhirnya diperoleh solusi umum : $y = -\frac{x^{-2}}{4} + Cx^2 = -\frac{1}{4x^2} + Cx^2$.

Soal-soal Latihan 2 :

Tentukan solusi umum dari masing-masing persamaan diferensial berikut.

1. $y' + y = e^x$ — Jawab : $y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$
2. $x^2y' + 3xy = 1$
3. $dy + (2xy - xe^{-x^2})dx = 0$ — Jawab : $y = (\frac{1}{2}x^2 + C)\,e^{-x^2}$
4. $y'\sqrt{x^2+1} + xy = x$ — Jawab : $y = 1 + Ce^{-(x^2+1)^{1/2}}$
5. $(x\ln x)y' + y = \ln x$ — Jawab : $y = \frac{1}{2}\ln x + C/\ln x$
6. $(1-x^2)dy - (xy + 2x\sqrt{1-x^2})dx = 0$ — Jawab : $y(1-x^2)^{1/2} = x^2 + C$
7. $y' + y\cos x = \sin 2x$ — Jawab : $y = 2(\sin x - 1) + C\,e^{-\sin x}$
8. $dx + (x - e^y)dy = 0$ — Jawab : $x = \frac{1}{2}e^y + Ce^{-y}$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{3y^{2/3} - x}$ — Jawab : $x = y^{2/3} + Cy^{-1/3}$
10. Tentukan solusi umum dari Pers.(2.2) untuk sebuah rangkaian listrik RC (L = 0) dengan $V = V_0\cos\omega t$. Jawab : $I = Ae^{-t/(RC)} - V_0\omega C(\sin\omega t - \omega RC\cos\omega t)/(1 + \omega^2R^2C^2)$

2.4 Metode Lain bagi Penyelesaian Persamaan Linear Orde-Satu

Persamaan *Bernoulli*

Bentuk persamaan *Bernoulli* :

$$y' + Py = Qy^n \tag{2.12}$$

di mana *P* dan *Q* adalah fungsi dari *x*. Persamaan ini tidak linear tetapi dapat direduksi menjadi sebuah persamaan linear, dengan membuat perubahan variabel, yaitu :

$$z = y^{1-n}, \text{ sehingga } z' = (1 - n)y^{-n}y'. \tag{2.13}$$

Kalikan Pers.(2.12) dengan $(1-n)y^{-n}$ diperoleh :

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{-n}Py = (1-n)y^{-n}Qy^n,$$

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)Py^{1-n} = (1-n)Q\ \ y^{n-n},$$

dan substitusi Pers.(2.13), diperoleh :

$$z' + (1-n)Pz = (1-n)Q.$$

Persamaan ini adalah persamaan linear orde-satu yang dapat diselesaikan sebagaimana biasa.

Persamaan Eksak

Ungkapan $P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$ adalah sebuah diferensial eksak jika :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2.14}$$

Jika Pers.(2.14) berlaku, maka terdapat sebuah fungsi $F(x,y)$ sedemikian hingga :

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial y}. \qquad P\ dx + Q\ dy = dF.$$

Persamaan diferensial : $P\ dx + Q\ dy = 0$ atau $y' = -\frac{P}{Q}$ disebut eksak jika Pers.(2.14) berlaku. Pada kasus ini, $P\ dx + Q\ dy = dF = 0$, dan solusinya adalah : $F(x,y) =$ konstan.

Sebuah persamaan yang tak eksak sering dapat dibuat eksak dengan mengalikannya dengan sebuah faktor yang tepat. Sebagai contoh, persamaan : $x\ dy - y\ dx = 0$ adalah tak eksak. Tetapi, bila persamaan ini dibagi dengan x^2, yaitu : $\frac{x\ dy - y\ dx}{x^2} = \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$ adalah eksak, dan solusinya : $\frac{y}{x} =$ konstan. Faktor pengali $[\frac{1}{x^2}]$ ini disebut *integrating factor*.

Persamaan Homogen

Sebuah persamaan berbentuk :

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0 \tag{2.15}$$

di mana P dan Q adalah fungsi-fungsi homogen disebut persamaan homogen. Pers.(2.15) dapat ditulis dalam bentuk $y' = f(y/x)$; perubahan variabel $v = y/x$ atau $y = vx$ mereduksi Pers.(2.15) menjadi persamaan *separable* dalam variabel v dan x.

Soal-soal Latihan 3 :

Selesaikan persamaan diferensial berikut.

1. $y' + y = xy^{2/3}$ Jawab : $y^{1/3} = x - 3 + Ce^{-x/3}$
2. $(2xe^{3y} + e^x)\ dx + (3x^2e^{3y} - y^2)\ dy = 0$ Jawab : $x^2e^{3y} + e^x - \frac{1}{3}y^3 = C$
3. $(x - y)\ dy + (y + x + 1)\ dx = 0$ Jawab : $x^2 - y^2 + 2x(y + 1) = C$
4. $x^2\ dy + (y^2 - xy)\ dx = 0$ Jawab : $x = y(\ln x + C)$
5. $xy\ dx + (y^2 - x^2)\ dy = 0$ Jawab : $y^2 = Ce^{-x^2/y^2}$

2.5 Persamaan Linear Orde-Dua dengan Koefisien Konstan dan Ruas Kanan Nol

Pada sub bab ini kita akan meninjau bentuk solusi dari persamaan diferensial yang berbentuk :

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{2.16}$$

Dengan a_0, a_1, dan a_2 adalah konstanta. Persamaan ini disebut homogen karena setiap suku memuat y atau turunan y. Pada contoh berikut, kita tinjau sebuah persamaan homogen untuk dicari solusinya.

Contoh 2.4 Pecahkan persamaan $y'' + 5y' + 4y = 0$

Jawab :

Agar lebih mudah, gantikan *d/dx* dengan *D* (disebut sebagai operator diferensial), sehingga

$$Dy = \frac{dy}{dx} = y', \quad D^2y = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

Dengan operator diferensial ini, ungkapan soal berubah menjadi :

$$D^2y + 5Dy + 4y = 0 \quad \text{atau} \quad (D^2 + 5D + 4)y = 0$$

yang dapat difaktorkan menjadi :

$$(D + 1)(D + 4)y = 0 \quad \text{atau} \quad (D + 4)(D + 1)y = 0$$

Dalam memecahkan persamaan ini, pecahkan untuk

$$(D + 4)y = 0 \quad \text{dan} \quad (D + 1)y = 0$$

yang masing-masing adalah persamaan *separable* dengan solusi masing-masing :

$$y = c_1e^{-4x} \quad \text{dan} \quad y = c_2e^{-x}$$

Karena kedua solusi ini bebas linear maka kombinasi linear dari keduanya akan memuat dua konstanta sembarang yang merupakan solusi umum. Jadi solusi umum dari persamaan $y'' + 5y' + 4y = 0$ adalah (sering disebut sebagai solusi komplementer) :

$$y = c_1e^{-4x} + c_2e^{-x} \quad \text{atau} \quad y = c_1e^{-x} + c_2e^{-4x}$$

Persamaan kuadrat $D^2 + 5D + 4 = 0$ mempunyai akar-akar yang berlainan, yaitu –1 dan –4. Persamaan ini dikenal sebagai persamaan karakteristik atau persamaan pembantu (*auxiliary equation*) dari persamaan $y'' + 5y' + 4y = 0$.

Jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu persamaan diferensial adalah *a* dan *b* dengan $a \neq b$, maka solusi umum dari persamaan diferensial adalah kombinasi linear dari e^{ax} dan e^{bx}. Dalam bentuk ringkas ditulis :

Solusi umum dari $(D - a)(D - b)y = 0,\ a \neq b$ adalah $y = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$ (2.17)

Jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu persamaan diferensial sama, dalam hal ini $a = b$, maka ungkapan (2.17) menjadi : $(D - a)(D - a)y = 0$ dengan solusi umum $y = (A_x + B)\ e^{ax}$, atau ditulis :

Solusi umum dari $(D - a)(D - a)y = 0,\ a = b$ adalah $y = (Ax + B)\ e^{ax}$ (2.18)

Jika akar-akar persamaan karakteristik dari persamaan diferensial berupa bilangan kompleks (*conjugate complex*), maka persamaan diferensial dalam ungkapan (2.17), memiliki solusi umum :

$$y = Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}).$$

(2.19)

Jika $e^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i \sin\beta x$, maka pernyataan dalam tanda kurung Pers.(2.19) menjadi sebuah kombinasi linear dari $\sin\beta x$ dan $\cos\beta x$, sehingga Pers.(2.19) dapat ditulis sebagai :

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x)$$

Atau (2.20)

$$y = c\, e^{\alpha x} \sin(\beta x + \gamma)$$

dengan c_1, c_{12}, c, dan γ adalah konstanta sembarang.

Contoh 2.5 Pecahkan persamaan $y'' - 6y' + 9y = 0$

Jawab :

Tuliskan persamaan sebagai :

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0 \quad \text{atau} \quad (D - 3)(D - 3)y = 0$$

Karena akar-akar persamaan karakteristiknya sama, solusinya :

$$y = (Ax + B)\ e^{3x}.$$

Soal-soal Latihan 4 :

Selesaikan persamaan diferensial berikut.

1. $y'' + y' - 2y = 0$ Jawab : $y = Ae^{x} + Be^{-2x}$
2. $y'' + 9y = 0$ Jawab : $y = Ae^{3ix} + Be^{-3ix}$
3. $(D^2 - 2D + 1)y = 0$ Jawab : $y = (Ax + B)\ e^{x}$
4. $(D^2 - 5D + 6)y = 0$ Jawab : $y = Ae^{3x} + Be^{2x}$
5. $(D^2 - 4D + 13)y = 0$ Jawab : $y = Ae^{2x}\sin(3x + \gamma)$
6. $4y'' + 12y' + 9 = 0$ Jawab : $y = (A + Bx)\ e^{-3x/2}$

2.6 Persamaan Linear Orde-Dua dengan Koefisien Konstan dan Ruas Kanan Tak Nol

Pada sub bab sebelumnya, kita telah membahas persamaan linear orde-dua dengan koefisien konstan dan ruas kanan nol. Persamaan ini menggambarkan osilasi atau vibrasi dari sistem mekanik atau listrik. Sering kali sistem ini tidak bebas, karena pada sistem biasanya dikenakan gaya atau *emf*. Vibrasi yang ditimbulkan disebut vibrasi tertekan dan persamaan diferensial yang digunakan untuk menggambarkan sistem berbentuk :

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

atau (2.21)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1}{a_2}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0}{a_1} y = F(x)$$

dengan a_0, a_1, dan a_2 adalah konstanta. Persamaan ini disebut tak-homogen karena memuat satu suku yang tidak tergantung pada y, yaitu $f(x)$. Fungsi sering disebut fungsi pemaksa, yang menyatakan gaya atau *emf*. Pada contoh berikut, kita tinjau sebuah persamaan tak- homogen untuk dicari solusinya.

Contoh 2.6 Pecahkan persamaan **:** $(D^2 + 5D + 4)y = \cos 2x$

Jawab :

Sebelumnya, pada contoh 2.4. persamaan $y'' + 5y' + 4y = 0$ memiliki solusi komplementer $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$. Berkaitan dengan soal Contoh 2.6, persamaan ini juga memiliki solusi komplementer y_c, yang berbentuk :

$$y_c = Ae^{-x} + Be^{-4x}.$$

Andaikan, kita hanya mengetahui satu solusi, yang disebut solusi khusus (*particular solution*) y_p, maka solusi khususnya adalah :

$$y_p = \frac{1}{10} \sin 2x.$$

Cara memperoleh solusi khusus ini akan dibahas kemudian.

Dua persamaan yang ditinjau, yaitu $(D^2 + 5D + 4)y_p = \cos 2x$ dan $(D^2 + 5D + 4)y_c = 0$

Penjumlahan keduanya, diperoleh :

$$(D^2 + 5D + 4)(y_p + y_c) = \cos 2x + 0 = \cos 2x$$

Jadi solusi umumnya adalah :

$$y = y_p + y_c = Ae^{-x} + Be^{-4x} + \frac{1}{10} \sin 2x.$$

Dengan demikian, dapat dicatat bahwa solusi umum dari persamaan berbentuk seperti soal Contoh 2.6 adalah $y = y_c + y_p$, di mana fungsi komplementer y_c adalah solusi umum dari persamaan homogen dan y_p adalah solusi khususnya.

Selanjutnya, kita akan bahas beberapa metode untuk memperoleh solusi khusus.

Metode inspeksi

Metode inspeksi ini sangat berguna dalam kasus sederhana di mana jawaban akan diperoleh secara cepat. Sebagai contoh, untuk : $y'' + 2y' + 3y = 5$, solusi khususnya adalah $y_p = \frac{5}{3}$, karena bila *y* pada persamaan tersebut bernilai konstan, maka $y'' = y' = 0$. Contoh lainnya, untuk : $y'' - 6y' + 9y = 8e^x$, maka $y = 2e^x$ adalah sebuah solusi. Di sisi lain, untuk :

$$y'' + y' - 2y = e^x, \qquad (2.22)$$

metode ini tidak dapat digunakan karena e^x memenuhi $y'' + y' - 2y = 0$.

Metode integrasi dari dua persamaan orde-satu

Metode integral ini dapat langsung digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial. Sebagai contoh, tinjau lagi Pers.(2.22). Persamaan ini dapat ditulis sebagai :

$$(D-1)(D+2)y = e^{x}. \tag{2.23}$$

Misalkan $u = (D+2)y$, maka Pers.(2.23) menjadi :

$$(D-1)u = e^{x} \quad \text{atau} \quad u' - u = e^{x}$$

yang merupakan persamaan linear orde-satu. Pemecahannya adalah :

$$u' - u = e^{x} \text{ ditulis menjadi } u' - Pu = e^{x},$$

Dengan Pers.(2.11), dalam hal ini $P = -1$ dan $Q = e^{x}$, ungkapan $I = \int P\,dx$ menjadi $I = \int -\,dx = -x$, dan $ue^{I} = \int Qe^{I}\,dx + C$ menjadi :

$$ue^{-x} = \int e^{-x}e^{x}\,dx = x + c_1,$$

$$u = xe^{x} + c_1e^{x}.$$

Persamaan diferensial untuk *y* menjadi :

$$(D+2)y = xe^{x} + c_1e^{x} \quad \text{atau} \quad y' + 2y = xe^{x} + c_1e^{x}.$$

Persamaan ini sekali lagi merupakan persamaan linear orde-satu, yang pemecahannya adalah sebagai berikut ($P = 2$ dan $Q = xe^{x} + c_1e^{x}$) :

$$I = \int 2\,dx = 2x,$$

$$ye^{2x} = \int e^{2x}(xe^{x} + c_1e^{x})\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{3}c_1e^{3x} + c_2 = \frac{1}{3}xe^{3x} + c_1'e^{3x} + c_2,$$

$$y = \frac{1}{3}xe^{x} + c_1'e^{x} + c_2e^{-2x}.$$

Dengan metode ini, solusi yang diperoleh selalu berbentuk $y = y_p + y_c$ atau $y = y_p + y_h$ di mana fungsi komplementer $y_c = y_h$ adalah solusi umum dari persamaan homogen dan y_p adalah solusi khususnya. Dalam hal ini, $y_p = \frac{1}{3}xe^{x}$ dan $y_c = y_h = c_1'e^{x} + c_2e^{-2x}$.

Metode eksponensial ruas kanan

Metode eksponensial ruas kanan digunakan untuk memperoleh bentuk solusi khusus, jika ruas kanan Pers.(2.21) adalah $F(x) = ke^{cx}$, di mana k dan c adalah konstanta yang diketahui. Misalkan *a* dan *b* adalah akar-akar persamaan karekteristik dari Pers.(2.21), maka persamaan ini dapat ditulis :

$$(D-a)(D-b)y = ke^{cx} \tag{2.24}$$

Pemecahan untuk solusi khususnya, sangat bergantung pada nilai kontanta *c* dikaitkan dengan *a* dan *b.* Secara ringkas, solusi khusus Pers.(2.24) diperoleh dengan mengasumsikan solusi berbentuk :

$$\left.\begin{array}{l} Ce^{cx} \text{ jika } c \text{ tidak sama dengan } a \text{ atau } b \\ Cxe^{cx} \text{ jika } c = a \text{ atau } b,\ a \neq b \\ Cx^2e^{cx} \text{ jika } c = a = b \end{array}\right\} \quad (2.25)$$

Contoh 2.7 Pecahkan persamaan $(D-1)(D+5)y = 7e^{2x}$.

Jawab :

$(D-1)(D+5)y = 7e^{2x}$ dapat ditulis sebagai $(D^2+4D-5)y = 7e^{2x}$

Akar-akar persamaan karakteristik tidak sama dengan pangkat eksponensial ($c \neq a$ atau b). Solusi khusus diperoleh dengan cara substitusi $y_p = Ce^{2x}$ ke persamaan soal, diperoleh : $y''_p + 4y'_p - 5y_p = C(4e^{2x} + 8e^{2x} - 5e^{2x}) = 7e^{2x}$. Jadi $C = 1$, sehingga $y_p = e^{2x}$.

Solusi umumnya adalah :

$$y = Ae^x + Be^{-5x} + e^{2x}.$$

Contoh 2.8 Pecahkan untuk Pers. (2.23), yaitu $y'' + y' - 2y = e^x$.

Jawab :

$$(D-1)(D+2)y = e^x$$

Dalam hal ini, $c = a$ atau b, $a \neq b$, berarti bentuk solusinya adalah $y_p = Cxe^x$. Sehingga

$$y'_p = C(xe^x + e^x), \quad \text{dan} \quad y''_p = C(xe^x + 2e^x).$$

Substitusi ke Pers.(2.23) diperoleh :

$$y'' + y' - 2y = C(xe^x + 2e^x + xe^x + e^x - 2xe^x) = e^x.$$

Jadi diperoleh $C = \frac{1}{3}$, sehingga solusi khususnya adalah $y_p = \frac{1}{3}xe^x$, sebagaimana yang telah diperoleh sebelumnya, tetapi dengan langkah lebih cepat.

Metode eksponensial kompleks

Kadangkala *F(x)* pada ruas kanan Pers.(2.21) berbentuk fungsi sinus atau cosines. Misalkan Pers.(2.21) berbentuk :

$$(D-a)(D-b)y = \begin{cases} k \sin \alpha x \\ k \cos \alpha x \end{cases}$$

Untuk memperoleh solusi khususnya, pertama pecahkan

$$(D-a)(D-b)y = ke^{i\alpha x}$$

kemudian ambil bentuk real atau imajinernya.

Contoh 2.9 Pecahkan persamaan diferensial : $y'' + y' - 2y = 4 \sin 2x$.

Jawab :

$$Y'' + Y' - 2Y = 4e^{2ix} = 4(\cos 2x + i \sin 2x)$$

karena itu, solusi persamaan ini mengambil bentuk kompleks. Jika $Y = Y_R + iY_I$, persamaan di atas ekuivalen dengan dua persamaan berikut :

$$Y_R'' + Y_R' - 2Y_R = \text{Re } 4e^{2ix} = 4 \cos 2x$$
$$Y_I'' + Y_I' - 2Y_I = \text{Im } 4e^{2ix} = 4 \sin 2x$$

Persamaan terakhir mirip dengan soal Contoh 2.9 dan terlihat bahwa solusinya adalah bagian imajiner dari *Y*. Jadi untuk memperoleh y_p, kita cari $Y_p$dan mengambil bentuk imajinernya. Terlihat bahwa akar-akar persamaan karakteristiknya tidak sama dengan 2i ($c \neq a$ atau b). Untuk memperoleh solusi khusus, substitusi $Y_p = Ce^{2ix}$ ke persamaan terakhir, diperoleh :

$$Y'' + Y' - 2Y = (-4 + 2i - 2)Ce^{2ix} = (2i - 6)Ce^{2ix} = 4e^{2ix}$$

$$C = \frac{4}{2i-6} = \frac{4(-2i-6)}{(2i-6)(-2i-6)} = \frac{-8(i+3)}{40} = -\frac{1}{5}(i + 3),$$

Sehingga diperoleh : $Y_p = -\frac{1}{5}(i + 3)e^{2ix} = -\frac{1}{5}(i + 3)\ (\cos 2x + i \sin 2x)$.

Dengan mengambil bentuk imajiner dari Y_p, diperoleh y_p dari soal Contoh 2.9, yaitu :

$$y_p = -\frac{1}{5}\cos 2x - \frac{3}{5}\sin 2x.$$

Metode Koefisien yang tidak Diketahui

Sebelumnya, telah dibahas tentang bentuk y_p yang terkait dengan bagi Pers.(2.21) bila pada ruas kanan persamaan *F(x)* adalah sebuah eksponensial. Pembahasan selanjutnya adalah bila ruas kanan Pers.(2.21) adalah sebuah eksponensial dikalikan dengan sebuah polynomial, yaitu $F(x) = e^{cx}P_n(x)$, di mana $P_n(x)$ adalah suatu sebuah polynomial berderajat *n*.

Solusi khusus y_p bagi dari $(D - a)(D - b)y = e^{cx}P_n(x)$ adalah :

$$y_p = \begin{cases} e^{cx}Q_n(x) & \text{jika } c \text{ tidak sama dengan } a \text{ atau } b \\ xe^{cx}Q_n(x) & \text{jika } c = a \text{ atau } b,\ a \neq b \\ x^2e^{cx}Q_n(x) & \text{jika } c = a = b \end{cases} \tag{2.26}$$

di mana $Q_n(x)$ adalah suatu polynomial yang berderajat sama seperti $P_n(x)$ yang koefisien-koefisiennya dicari agar memenuhi persamaan diferensial yang dipecahkan. Catatan bahwa sinus dan cosinus telah dicakup dalam e^{cx} menggunakan eksponesial kompleks. Untuk c = 0, bentuk ruas kanan persamaan hanya berupa sebuah polynomial.

Contoh 2.10 Pecahkan persamaan diferensial : $y'' + y' - 2y = x^2 - x$.

Jawab :

Misalkan solusi khususnya berbentuk

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Ada tiga koefisien yang tidak diketahui, yaitu A, B, C yang harus dicari sedemikian hingga memenuhi persamaan soal Contoh 2.10. Kita peroleh :

$$y'_p = 2Ax + B \quad \text{dan} \quad y''_p = 2A.$$

Substitusi y_p, y'_p, dan y''_p ke soal Contoh 2.10, diperoleh :

$$y''_p + y'_p - 2y_p = 2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2 - x.$$

$$-2Ax^2 + 2Ax - 2Bx + 2A + B - 2C = x^2 - x.$$

Dengan demikian,

$$-2Ax^2 = x^2, \quad -2A = 1, \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$2Ax - 2Bx = -x, \quad 2A - 2B = -1, \quad 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 2B = -1, \quad B = 0$$

$$2A + B - 2C = 0, \quad 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - 2C = 0, \quad C = -\frac{1}{2}$$

Jadi solusi khususnya adalah :

$$y_p = Ax^2 + Bx + C = -\frac{1}{2}x^2 + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

Soal-soal Latihan 5 :

Selesaikan persamaan diferensial berikut.

1. $y'' - 4y = 10$ Jawab : $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - \frac{5}{2}$

2. $y'' + y' - 2y = e^{2x}$ Jawab : $y = Ae^{x} + Be^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$

3. $(D^2 + 1)y = 2e^{x}$ Jawab : $y = Ae^{ix} + Be^{-ix} + e^{x}$

4. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$ Jawab : $y = Ae^{-x} + Be^{2x} + xe^{2x}$

5. $(D^2 + 2D + 1)y = 2e^{-x}$ Jawab : $y = (Ax + B + x^2)e^{-x}$

6. $y'' + 2y' + 10y = 100\cos 4x$ (Petunjuk : cari dulu $y'' + 2y' + 10y = 100e^{4ix}$)

   Jawab : $y = e^{-x}(A\sin 3x + B\cos 3x) + 8\sin 4x - 6\cos 4x$

7. $(D^2 - 2D + 1)y = 2\cos x$ Jawab : $y = (Ax + B)e^{x} - \sin x$

8. $5y'' + 12y' + 20y = 120\sin 2x$

   Jawab : $y = e^{-6x/5}[A\sin(8x/5) + B\cos(8x/5)] - 5\cos 2x$

9. $y'' + 16y = 16\cos 4x$ Jawab : $y = A\sin 4x + B\cos 4x + 2x\sin 4x$

10. $(D^2 + 2D + 17)y = 60e^{-4x}\sin 5x$ (Petunjuk : cari dulu $(D^2+2D+17)y = 60e^{(-4+5i)x}$)

    Jawab : $y = e^{-x}(A\sin 4x + B\cos 4x) + 2e^{-4x}\cos 5x$

Soal-soal :

Tentukan solusi umum dari masing-masing persamaan diferensial berikut.

1. $xy' + y = 2x^{5/2}$
2. $y'\cos x + y = \cos^2 x$

III. KALKULUS VARIASI

Salah satu pemakaian kalkulus variasi adalah untuk menemukan geodesic dari suatu permukaan, Geodesic merupakan kurva sepanjang suatu permukaan yang menandai jarak terpendek antara dua titik yang berdekatan. Pemakaian lainnya adalah berkaitan dengan nilai maksimum dan minimum. Dalam kalkulus variasi, kita sering menyatakan persoalan-persaolan dengan mengatakan bahwa suatu besaran tertentu diminimisasi, dengan menaruh $f'(x) = 0$, atau membuat besaran tersebut stasioner.

3.1 Persamaan *Euler*

Tinjau integral :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx, \text{ dengan } y' = \frac{dy}{dx} \tag{3.1}$$

Persoalannya adalah bagaimana menentukan *y(x)* agar *I* stasioner (ekstrem, minimum atau maksimum). Kita definisikan *Y(x)* :

$$Y(x) = y(x) + \epsilon\,\eta(x)$$

dengan *y(x)* adalah nilai ekstrem yang dicari, ϵ adalah sebuah parameter, dan $\eta(x)$ sebagai fungsi dari *x*, yang nilainya nol pada x_1 dan x_2. Juga diperoleh :

$$Y'(x) = y'(x) + \epsilon\,\eta'(x)$$

Bila $\epsilon = 0$, maka $Y(x) = y(x)$, dan pers.(3.1) menjadi :

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')dx$$

Dengan kata lain, $I(\epsilon)$ minimum bila $\epsilon = 0$, atau dapat ditulis : $\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = 0$, bila $\epsilon = 0$. Mengingat bahwa *Y* dan *Y'* sebagai fungsi dari ϵ, diferensiasi $I(\epsilon)$ terhadap ϵ, diperoleh :

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \epsilon}\right) dx$$

Substitusi *Y* dan *Y'* akhirnya diperoleh (selengkapnya baca *Boas, p.388*) :

$$\left(\frac{dI}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \int_{x1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \eta(x)dx = 0$$

Karena $\eta(x)$ sembarang, pernyataan $\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ haruslah sama dengan nol.

atau :

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{3.2}$$

Yang dikenal dengan persamaan *Euler* atau *Euler-Lagrange*.

Setiap persoalan dalam kalkulus variasi dipecahkan dengan integralnya menjadi stasioner. Tuliskan fungsi *F*, substitusi ke persamaan *Euler*, dan memecahkan persamaan diferensial yang dihasilkan.

Contoh 1

Tuliskan dan pecahkan persamaan *Euler* yang membuat integral berikut stasioner (geodesic dalam suatu bidang).

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Jawab :

Kita lakukan penyederhanaan $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$

Dalam persoalan ini, $F = \sqrt{1+y'^2}$, maka

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

dan dengan Pers.(3.2), yaitu persamaan *Euler* ($\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$), memberikan :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

Integrasi terhadap *x*, diperoleh :

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konstan},$$

atau $y' =$ konstan. Jadi slope $y(x)$ adalah konstan, sehingga $y(x)$ adalah berupa sebuah garis lurus sebagaimana yang diinginkan.

Soal-soal Latihan 1 :

Tuliskan dan pecahkan persamaan *Euler* yang membuat integral-integral berikut stasioner.

1. $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx$
2. $\int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{x}$

3.2 Pemakaian Persamaan *Euler-Lagrange*

Dalam koordinat polar (r, θ), penyederhanaan integral (membuatnya stasioner) :

$$\int_{x_1}^{x_2} F(r, \theta, \theta')dr \quad \text{di mana } \theta' = \frac{d\theta}{dr}$$

Kita pecahkan pers *Euler* :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \tag{3.3}$$

Untuk menyederhanakan

$$\int_{x_1}^{x_2} F(t, x, \dot{x})dr \quad \text{di mana } \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

kita pecahkan :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{3.4}$$

Contoh 2

Tentukan lintasan yang diikuti oleh seberkas cahaya jika indeks biasnya (dalam koordianat polar) sebanding dengan r^{-2}.

Jawab :

Kita ingin membuat stasioner $\int n\, ds$ atau

$$\int r^{-2}\, ds = \int r^{-2}\sqrt{ds^2 + r^2 d\theta^2} = \int r^{-2}\sqrt{1 + r^2\theta'^2}\, dr.$$

Dalam persoalan ini, $F = r^{-2}\sqrt{1 + r^2\theta'^2}$, maka

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = \frac{1}{2} r^{-2}(1 + r^2\theta'^2)^{-\frac{1}{2}}(2\, r^2\theta') = \frac{r^{-2}r^2\theta'}{\sqrt{1 + r^2\theta'^2}} = \frac{\theta'}{\sqrt{1 + r^2\theta'^2}}$$

$$\text{dan } \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0,$$

dan dengan Pers.(3.3), yaitu persamaan *Euler* :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

diperoleh :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\theta'}{\sqrt{1 + r^2\theta'^2}}\right) = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\theta'}{\sqrt{1 + r^2\theta'^2}} = \text{konstan} = K.$$

Pemecahan untuk θ' dengan mengkuadratkan ruas kiri dan kanan, diperoleh :

$$\theta'^2 = K^2(1 + r^2\theta'^2) = K^2 + K^2r^2\theta'^2 \quad \text{sehingga} \quad \theta'^2(1 - K^2r^2) = K^2$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dr} = \frac{K}{\sqrt{1 - K^2r^2}}$$

Integrasi terhadap *r* (gunakan tabel integral), diperoleh :

$$\theta = arc \sin Kr + C.$$

Contoh 3

Tentukan integral pertama dari persamaan *Euler* untuk membuat stasioner integral

$$I = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Jawab :

Karena x tidak ada dalam integral, kita mengubahnya menjadi y sebagai variabel integrasi. Dengan Pers.(3.6) : $x' = \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$, $y' = \frac{1}{x'}$, $dx = \frac{dx}{dy}dy = x'dy$

$$\sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + y'^2}x'dy = \sqrt{1 + x'^2}dy.$$

Sehingga

$$I = \int \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{y}} dy = \int F(y, x')dy\,.$$

Dalam persoalan ini, $F = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}$, maka

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}(1 + x'^2)^{-\frac{1}{2}}(2\,x') = \frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + x'^2}} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

dan dengan Pers.(3.5), yaitu persamaan *Euler* :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

diperoleh :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + x'^2}}\right) = 0.$$

Integral pertama dari persamaan *Euler*, yaitu :

$$\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + x'^2}} = \text{konstan}.$$

Contoh 4

Tentukan geodesic pada kerucut $z^2 = 8(x^2 + y^2)$.

Jawab :

Dengan menggunakan koordinat silindris : $z^2 = 8(x^2 + y^2) = 8\,r^2$, $z = r\sqrt{8}$, $dz = dr\sqrt{8}$, sehingga

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + 8\,dr^2 = 9dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Kita ingin menyederhanakan

$$I = \int ds = \int \sqrt{9dr^2 + r^2 d\theta^2} = \int \sqrt{9 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}\,dr = \int \sqrt{9 + r^2\theta'^2}\,dr.$$

(Dalam hal ini kita ingin menggunakan *r* sebagai variabel integrasi karena integrannya hanya memuat *r* bukan θ.)

Dari $I = \int \sqrt{9 + r^2\theta'^2}\,dr = \int F(r, \theta')\,dy$,

$$\text{diperoleh } F = \sqrt{9 + r^2\theta'^2}, \qquad \text{sehingga } \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0,$$

dan pers Euler (integral pertama pers. Euler) dapat ditulis :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta'}\right) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = \frac{r^2\theta'}{\sqrt{9 + r^2\theta'^2}} = \text{konstanta} = K.$$

Kita pecahkan untuk θ' dan integralkan sekali lagi.

$$r^2\theta' = K\left(\sqrt{9 + r^2\theta'^2}\right)$$

$$r^4\theta'^2 = K^2(9 + r^2\theta'^2),$$

$$\theta'^2(r^4 - K^2r^2) = 9K^2 \quad \text{atau} \quad \theta' = \sqrt{\frac{9K^2}{r^2(r^2 - K^2)}} = \frac{3K}{r\sqrt{(r^2 - K^2)}}$$

$$\int d\theta = \int \frac{3K\,dr}{r\sqrt{(r^2 - K^2)}}.$$

Dari tabel integral diperoleh :

$$\theta + \alpha = 3K \cdot \frac{1}{K} \text{arc cos} \frac{K}{r} \quad (\alpha = \text{konstanta integrasi})$$

$$\cos\left(\frac{\theta + \alpha}{3}\right) = \frac{K}{r} \quad \text{atau} \quad r\cos\left(\frac{\theta + \alpha}{3}\right) = K.$$

Soal-soal Latihan 2 :

Ubahlah variable bebasnya untuk memudahkan persamaan *Euler* dan selanjutnya tentukan integral pertamanya.

1. $\int_{x_1}^{x_2} y^{3/2}\, ds$

   $[dx/dy = C/\sqrt{y^3 - C^2}]$

2. $\int_{x_1}^{x_2} \frac{x'^2}{\sqrt{x'^2 + x^2}} dy$

   $[x^4 y'^2 = C^2(1 + x^2 y'^2)^3]$

Tuliskan dan pecahkan persamaan *Euler* yang membuat integral-integral berikut stasioner. Ubahlah variable bebasnya, jika diperlukan, untuk membuat persamaan *Euler* lebih mudah.

3. $\int_{x_1}^{x_2} \frac{yy'^2}{1+yy'} dx$

   $[x = ay^{3/2} - \frac{1}{2}y^2 + b]$

4. $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}\, d\phi,\ \theta' = \frac{d\theta}{d\phi}$

   $[\cot\theta = A\cos(\phi - \alpha)]$

3.3 Persamaan Lagrange

Andaikan *F* adalah sebuah fungsi yang diketahui sebagai fungsi dari *y*, *z*, *dy/dx*, *dz/dx*, dan *x*, dan kita ingin memperoleh dua kurva $y = y(x)$ dan $z = z(x)$ yang dapat membuat $I = \int F dx$ stasioner. Dengan demikian, nilai integral *I* bergantung pada kedua $y(x)$ dan $z(x)$ sehingga, dalam kasus ini, ada dua persamaan *Euler*, satu untuk *y* dan satu untuk *z*, yaitu :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (3.5)$$

Pers.(3.5) memilki peranan penting dalam penerapannya dalam mekanika. Dalam fisika dasar, hukum Newton II, **F** = m**a**, adalah persamaan fundamental. Dalam mekanika lanjut, sering digunakan asumsi yang berbeda yang sering disebut Prinsip *Hamilton*. Asumsi ini menyatakan bahwa setiap partikel atau sistem partikel selalu bergerak dalam suatu cara yang mana $I = \int_{t1}^{t2} L\, dt$ stasioner, di mana $L = T - V$ disebut *Lagrangian*, *T* adalah energy kinetic, dan *V* adalah energy potensial dari partikel atau sistem.

Contoh 5

Gunakan prinsip Hamilton untuk mendapatkan persamaan gerak sebuah partikel bermassa m yang berderak di bawah pengaruh gravitasi (dekat permukaan bumi).

Jawab :

Pertama kita rumuskan energi kinetic dan energi potensial partikel. Gunakan titik (*dot*) untuk derivatif terhadap t, yaitu $dx/dt = \dot{x}$, $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$, $d^2y/dt^2 = \ddot{y}$, dan seterusnya.

Persamaan untuk *T*, *V*, dan $L = T - V$, adalah :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$V = mgz,$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Dalam hal ini *t* adalah variable bebas, *x*, *y*, dan *z* adalah variable terikat, dan *L* berkaitan erat dengan apa yang sebelumnya disebut sebagai *F*. Oleh karena itu, untuk membuat $I = \int_{t1}^{t2} L\, dt$ stasioner, kita tuliskan persamaan *Euler* yang berkaitan. Ada tiga persamaan *Euler*, satu untuk *x*, satu untuk *y*, dan satu untuk *z*. Persamaan-persamaan *Euler* tersebut dalam mekanika disebut persamaan *Lagrange*, yaitu :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Substitusi *L* ke persamaan *Lagrange*, diperoleh :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \qquad \text{atau} \qquad \dot{x} = \text{konstanta}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \qquad \text{atau} \qquad \dot{y} = \text{konstanta}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) + mg = 0 \qquad \text{atau} \qquad \ddot{z} = -g$$

Dalam medan gravitasi dekat permukaan bumi, kecepatan arah horizontal adalah konstan dan percepatan arah vertikalnya adalah – g (sama dengan hasil penerapan hukum Newton).

Contoh 6

Gunakan persamaan *Lagrange* untuk mendapatkan persamaan gerak sebuah partikel bermassa m dalam variabel-variabel koordinat polar *r* dan θ.

Jawab :

Elemen panjang busur dalam koordinat polar adalah :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \qquad (3.7)$$

Kecepatan sebuah partikel yang bergerak adalah ds/dt, dari Pers.(3.7) diperoleh :

$$v^2 = (\frac{ds}{dt})^2 = (\frac{dr}{dt})^2 + r^2 (\frac{d\theta}{dt})^2 = \dot{r}^2 + r^2\theta^2.$$

Energi kinetik partikel adalah $\frac{1}{2}mv^2$, dan energi potensial paertikel adalah $V(r, \theta)$ sehingga diperoleh :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\theta^2),$$

$$V = V(r, \theta),$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\theta^2) - V(r,\theta).$$

Persamaan *Lagrange* dalam variabel r, θ adalah :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \theta}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Substitusi *L* ke persamaan *Lagrange* diperoleh :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\theta^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Persamaan gerak dalam variabel *r* adalah :

$$m(\ddot{r} - r\theta^2) = -\frac{\partial V}{\partial r}. \qquad (3.8)$$

Persamaan gerak dalam variabel θ adalah :

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \text{atau} \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}. \qquad (3.9)$$

Kuantitas $-\frac{\partial V}{\partial r}$ dan $-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$ tidak lain adalah komponen-komponen gaya pada partikel dalam arah r dan θ. Oleh karena itu, Pers.(3.8) dan (3.9) adalah komponen-komponen dari $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Komponen-komponen percepatannya adalah :

$$a_r = \ddot{r} - r\theta^2$$

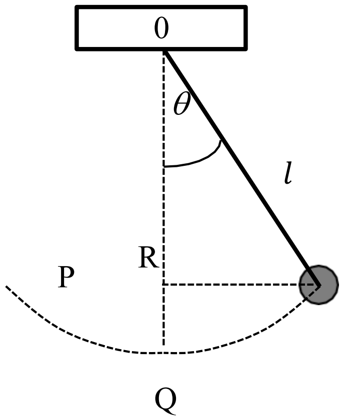
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

Suku kedua dalam a_r adalah percepatan sentripetal v^2/r bila $v = r\theta$ (tanda minus memberi arti bahwa percepatan sentripetal berarah ke pusat). Suku kedua dalam a_θ disebut percepatan Coriolis.

Contoh 7

Gunakan persamaan *Lagrange* untuk mendapatkan persamaan gerak sebuah pendulum sederhana (massa m digantungkan pada sebuah tali tak bermassa dengan panjang l dan berayun pada bidang vertikal).

Jawab :



Gambar 3.1 Pendulum

Sistem bandul diilustrasikan oleh Gambar 3.1

Energi kinetik :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \text{ dengan } v = l\theta$$

$$= \frac{1}{2}m(l\theta)^2 = \frac{1}{2}ml^2\theta^2$$

Energi potensial dirumuskan dengan memperhatikan bahwa energi potensial di titik Q lebih besar dari pada di P.

$$V = mg\,OQ - mg\,O = mg(l - l\cos\,\theta).$$

Lagrangian :

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\theta^2 - mgl(1 - \cos\theta).$$

Persamaan gerak sistem dicari dengan menggunakan persamaan *Lagrange* (hanya ada satu variabel terikat, yaitu variabel θ sehingga hanya ada satu persamaan *Lagrange*) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\theta\ ) - (mgl \sin \theta) = 0$$

$$ml^2\theta + mgl \sin \theta = 0$$

$$\theta\ + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

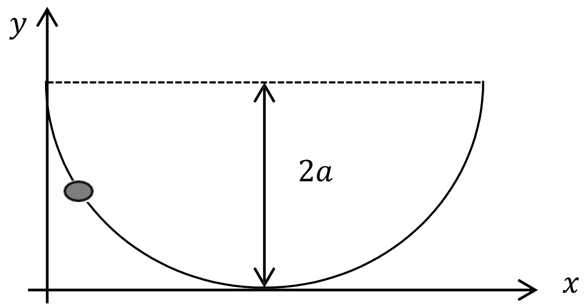
Contoh 7

Sebuah benda berupa manik berlubang bermassa m meluncur tanpa gesekan pada sebatang kawat berbentuk *cycloid* (lihat Gambar 3.2) dengan persamaan :

$x = a(\theta - \sin \theta)$,

$y = a(1 + \cos \theta)$,

dengan $\theta : 0 \le \theta \le\ 2\pi$



Gambar 3.2 Manik dalam *cycloid*

Tentukan :

a. *Lagrangian*
b. Persamaan gerak sistem

Jawab :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^{\,2} + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\{(1 - \cos \theta)\theta\}^2 + \frac{1}{2}ma^2(- \sin\theta\ \theta\ )^2$$

$$= ma^2(1 - \cos \theta)\theta^{\ 2}$$

$$V = mgy = mga(1 + \cos\ \ \theta)$$

a. *Lagrangian* :

$$L = T - V = ma^2(1 - \cos \theta)\theta^{\ 2} - mga(1 + \cos \theta).$$

b. Persamaan gerak dari sistem *cycloid* ini dicari dengan menggunakan persamaan *Lagrange* (dalam hal ini, hanya ada satu variabel terikat, yaitu variabel θ saja sehingga hanya ada satu persamaan *Lagrange*) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\{\frac{\partial}{\partial\theta}[ma^2(1-\cos\theta)\theta^2 - mga(1+\cos\theta)]\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}[ma^2(1-\cos\theta)\theta^2 - mga(1+\cos\theta)] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\{2ma^2(1-\cos\theta)\theta\} - (ma^2\sin\theta\,\theta^2 + mga\sin\theta) = 0$$

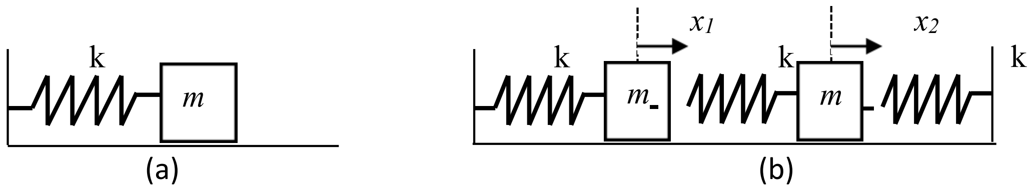
$$\frac{d}{dt}\{(1-\cos\theta)\theta\} - \frac{1}{2}\sin\theta\,\theta^2 - \frac{g}{2a}\sin\theta = 0$$

$$(1-\cos\theta)\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\,\theta^2 - \frac{g}{2a}\sin\theta = 0.$$

Soal-soal Latihan 3 :

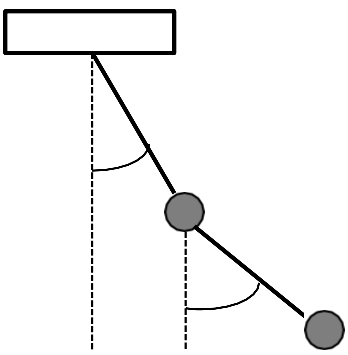
1. Gunakan persamaan *Lagrange* untuk mendapatkan persamaan gerak sistem pegas tunggal (massa m digandengkan pada sebuah pegas tak bermassa dengan konstanta pegas k dan bergetar pada bidang horizontal), seperti Gambar 3.3 a.
   $[L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ dan $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0]$

2. Gunakan persamaan *Lagrange* untuk mendapatkan persamaan gerak sistem pegas bergandeng (dua massa m digandengkan pada tiga pegas tak bermassa dengan konstanta pegas k yang sama dan bergetar pada bidang horizontal), seperti Gambar 3.3 b.



Gambar 3.3 Sistem pegas (a) Pegas tunggal dan (b) Pegas bergandeng

5. Gunakan persamaan *Lagrange* untuk mendapatkan persamaan gerak sistem pendulum bergandeng, seperti Gambar 3.4 (dua massa *m* yang sama digantungkan pada dua buah tali tak bermassa dengan panjang l yang sama dengan sudut θ_1 dan θ_2 dan berayun pada bidang vertikal).



IV. TRANSFORMASI KOORDINAT

Satu langkah penting dalam menyelesaikan suatu persoalan fisika adalah memilih suatu sistem koordinat yang tepat. Pemilihan sistem koordinat yang tepat sering kali dapat memudahkan pekerjaan menyelesaikan soal. Sebagai contoh, dalam membahas gerak sebuah peluru dekat permukaan bumi, kita akan menggunakan sistem koordinat tegak lurus dengan : $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, dan $\ddot{z} = -g$, tetapi untuk gerak sebuah partikel yang bergerak melingkar kita akan menggunakan sistem koordinat polar dengan r = konstan dan θ = percepatan sudut. Dalam bab ini, kita akan membahas trasformasi dari satu sistem koordinat ke sistem lainnya. Apakah kita menggunakan bahasa geometri dan mengatakan "mengubah sistem koordinat" atau bahasa aljabar dan mengatakan "mengubah variabel", pada dasarnya adalah sama.

4.1 Transformasi Linear

Suatu transformasi linear adalah suatu trasnformasi di mana setiap variabel baru merupakan kombinasi linear dari variabel-variabel lamanya. Dalam dua dimensi, persamaan transformasi ditulis :

$$\begin{aligned} X &= ax + by \\ Y &= cx + dy \end{aligned} \tag{4.1}$$

di mana a, b, c, dan d adalah konstanta.

Sebagai contoh, kita tinjau :

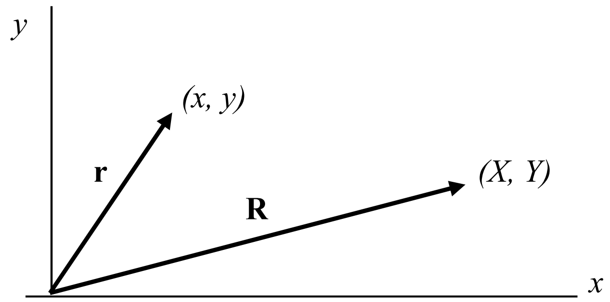
$$\begin{aligned} X &= 5x - 2y \\ Y &= -2x + 2y \end{aligned} \tag{4.2}$$

Persamaan ini dapat diinterpretasikan secara geometri dalam dua cara.

Cara pertama (Gambar 4.1)

Misalkan **r** dan **R** adalah vektor-vektor :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{R} &= X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} \end{aligned} \tag{4.3}$$



Dalam hal ini, Pers.(4.1) dan (4.2) menyatakan tentang bagaimana memperoleh vektor **R** bila vektor **r** diketahui.

Gambar 4.1 Interpretasi persamaan transformasi secara geometri (cara pertama)

Dalam bentuk matriks, Pers.(4.1) dapat ditulis sebagai :

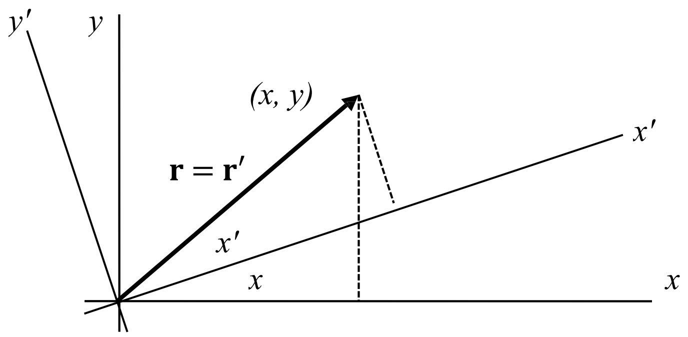
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ atau } R = Mr \tag{4.4}$$

dengan R, M, dan r berlaku sebagai matriks. Matriks M disebut sebagai matriks transformasi, yang di dalamnya memuat segala informasi yang diperlukan untuk memperoleh R dari r.

Cara kedua (Gambar 4.2)

Misalkan kita pilih variabel baru *x'* dan *y'* untuk menggantikan *X* dan *Y*, maka Pers.(4.1) menjadi :

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \tag{4.5}$$



Gambar 4.2 Interpretasi persamaan transformasi secara geometri (cara kedua)

Di sini kita tinjau dua sumbu koordinat (x, y) dan (x', y') dan satu vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ dengan koordinat relatif untuk masing-masing sumbu :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' \tag{4.6}$$

di mana $\mathbf{i}'$ dan $\mathbf{j}'$ adalah vektor-vektor satuan sepanjang sumbu x' dan y'. Dalam hal ini, matriks trasnformasi *M* menyatakan kepada kita tentang bagaimana memperoleh komponen-komponen vektor dari $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ relatif terhadap sumbu x' dan y' bila kita mengetahui komponen-komponennya relatif terdadap sumbu x dan y.

4.2 Transformasi *Orthogonal*

Pada umumnya, sumbu x′ dan y′ dalam Pers.(4.5) dan Gambar 4.2 tidak saling tegak lurus. Bila demikian, Pers.(4.5) merupakan persamaan rotasi dan *a, b, c, d* dapat ditulis dalam bentuk sudut rotasi θ, sehingga Pers.(4.5) menjadi :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Kita akan meninjau kasus khusus dari transformasi linear yang disebut sebagai transformasi *orthogonal*. Suatu ransformasi *orthogonal* adalah suatu transformasi linear dari x, y ke x', y' sedemikian hingga memenuhi :

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2. \tag{4.8}$$

Atau, dalam Gambar 4.1, Pers. 4.1 menyatakan sebuah transformasi *orthogonal* jika

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2. \tag{4.9}$$

Dari gambar terlihat bahwa syarat Pers.(4.8) dan (4.9) menyatakan bahwa panjang vektor tidak berubah oleh suatu transformasi *orthogonal*. Dalam Gambar 4.1, vektor dirotasi (atau mungkin direfleksikan) dengan panjang dijaga tetap. Dalam Gambar 4.2, sumbu dirotasi (atau direfleksikan) sedangkan vektornya tetap. Matriks *M* dari sebuah transformasi *orthogonal* disebut sebuah matriks *orthogonal*. Suatu matriks dikatakan *orthogonal* bila invers matriks tersebut sama dengan matriks transpose-nya, atau akan dipenuhi :

$$M^T = M^{-1} \quad \text{atau} \quad M^T M = I \tag{4.10}$$

Sebagai ilustrasi, tinjau kembali Pers.(4.5), yaitu :

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

dengan definisi Pers.(4.8)

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 \\ &= (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + (2ab + 2cd)xy \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

maka haruslah : $\quad a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$

$$M^T M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena $M^T M = I$, maka matriks *M* adalah matriks *orthogonal***.**

4.3 Nilai *Eigen* dan Vektor *Eigen*

Kita dapat memberikan interpretasi fisis untuk Gambar 4.1 dan Pers.(4.1). Misalkan, pada bidang (x, y) ditutup dengan sebuah membran tipis elastis yang dapat diregangkan, disusutkan, atau dirotasikan (dengan sumbu tetap). Dengan demikian, setiap titik (x, y) dari membran menjadi titik-titik (X, Y) setelah mengalami deformasi. Pertanyaan yang muncul adalah apakah di sana terdapat sejumlah vektor yang tidak berubah arahnya oleh deformasi tersebut?, yaitu vektor-vektor $\mathbf{R} = \mu\mathbf{r}$, dengan μ =konstanta. Vektor-vektor demikian disebut vektor *eigen* (*eigenvector*) atau vektor karakteristik dari deformasi, dan nilai μ disebut nilai *eigen* (*eigenvalues*) atau nilai karakteristik dari matriks transformasi *M*.

Nilai *Eigen*

Sebagai contoh bagaimana mendapatkan nilai *eigen*, kita tinjau lagi Pers.(4.2), yaitu :

$$X = 5x - 2y$$
$$Y = -2x + 2y$$

Dalam bentuk matriks ditulis :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini, $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Vektor *eigen* mensyaratkan, $\mathbf{R} = \mu\mathbf{r}$, dalam notasi matriks ditulis :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix}$$

Atau dalam bentuk terpisah ditulis :

$$\begin{matrix} 5x - 2y = \mu x \\ -2x + 2y = \mu y \end{matrix} \qquad \text{atau} \qquad \begin{matrix} (5-\mu)x - 2y = 0 \\ -2x + (2-\mu)y = 0. \end{matrix} \tag{4.11}$$

kembali dalam matriks ditulis :

$$\begin{pmatrix} 5-\mu & -2 \\ -2 & 2-\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Agar diperoleh solusi, haruslah determinan matriks ruas kiri yang berorde-2 sama dengan nol (solusi nontrivial).

$$\begin{vmatrix} 5-\mu & -2 \\ -2 & 2-\mu \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik dari matriks *M*.

Cara memperoleh persamaan karakteristik dari sebuah matriks *M* adalah kurangkan μ pada elemen-elemen diagonal utama matriks *M*, susun serta selesaikan determinan matriks dan samakan dengan nol.

Perhitungan untuk μ menghasilkan :

$$(5-\mu)(2-\mu) - 4 = 0 \qquad \text{atau} \qquad \mu^2 - 7\mu + 6 = 0$$

dan diperoleh nilai *eigen* masing-masing :

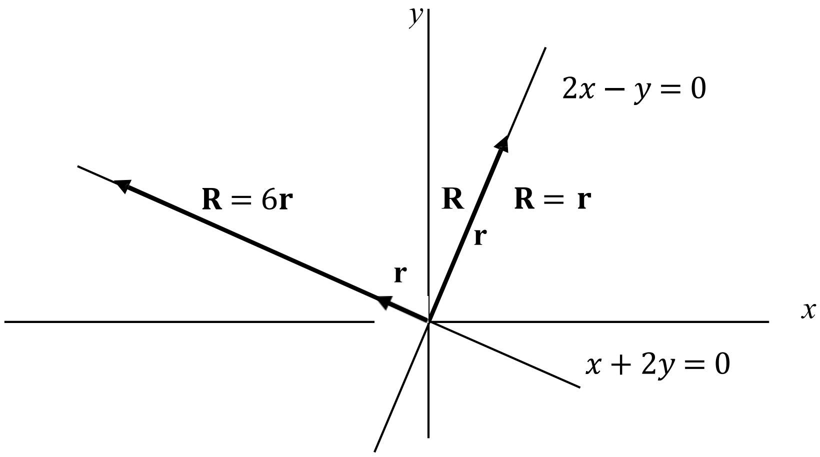
$$\mu = 1 \quad \text{dan} \quad \mu = 6.$$

Substitusi nilai μ ke salah satu Pers.(4.11), diperoleh :

$$\left.\begin{matrix} \text{Untuk } \mu = 1: & 4x - 2y = 0 & \text{atau} & 2x - y = 0 \\ \text{Untuk } \mu = 6: & -x - 2y = 0 & \text{atau} & x + 2y = 0 \end{matrix}\right\} \tag{4.12}$$

yang masing-masing menghasilkan persamaan garis lurus melalui pusat sumbu dan setiap vektor **r** terletak pada garis ini.

Untuk vektor-vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ setelah mengalami transformasi oleh transformasi Pers.(4.2) akan menjadi **R**, di mana **R** sejajar dengan **r**. Setiap vektor **r** dengan komponen-komponen x dan y yang memenuhi salah satu persamaan garis lurus dalam Pers.(4.12) memiliki sifat ini. Jadi untuk setiap vektor **r** dari titik pusat ke suatu titik pada garis lurus $x + 2y = 0$ berubah oleh transformasi Pers.(4.2) menjadi sebuah vektor **R** yang berarah sama tetapi panjangnya enam kali lebih panjang, yaitu $\mathbf{R} = 6\mathbf{r}$. Sedangkan, untuk setiap vektor **r** dari titik pusat ke suatu titik pada garis lurus $2x - y = 0$ tidak berubah oleh transformasi yang sama, yaitu $\mathbf{R} = \mathbf{r}$. Ilustrasi kedua vektor ditunjukkan oleh Gambar 4.3. Vektor-vektor sepanjang kedua garis ini adalah vektor-vektor *eigen* dari transformasi.



Gambar 4.3 Vektor-vektor *eigen* dari hasil transformasi.

Pemecahan Pers.(4.12) tidak memberikan nilai tunggal untuk variabel x maupun y. Jadi bebas dalam memilih nilai salah satu variabel ini untuk setiap nilai μ.

Untuk $\mu = 1 : 2x - y = 0$, pilih $x_1 = 1$ sehingga $y_1 = 2$,

Untuk $\mu = 6 :\ x + 2y = 0$, pilih $y_2 = 1$ sehingga $x_2 = -2$

Dengan demikian, vektor *eigen* matriks *M* yang dicari adalah :

$$r_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)^T \quad \text{dan} \quad r_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2 \quad 1)^T$$

Selanjutnya perlu diketahui apakah kedua vektor *eigen* ini *orthogonal*? Syarat *orthogonal* adalah : ${r_1}^T r_2 = 0$. Dalam hal ini, kedua vektor ini *orthogonal*, karena :

$${r_1}^T r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0.$$

Bila kedua vektor *eigen* ini *orthogonal*, perlu dinormalisasi sama dengan satu (karena besar atau panjang vektor *eigen* tidak ditentukan).

Mengingat bahwa :

$$\text{vektor satuan} = \frac{\text{vektor}}{\text{panjang vektor}}$$

diperoleh besar atau panjang vektor *eigen* : $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, masing-masing untuk $\mu = 1$, dan $\mu = 6$.

Dan dengan menggunakan syarat normalisasi, yaitu: $x_i^2 + y_i^2 = 1$, dengan i = 1, 2, …, diperoleh komponen-komponen vektor *eigen* ternormalisasi :

$$\mu = 1 \quad : x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{sehingga diperoleh } \hat{r}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\mu = 6 \quad : x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{sehingga diperoleh } \hat{r}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$\hat{r}_1$ dan $\hat{r}_2$ masing-masing adalah vektor *eigen* ternormalisasi. Selanjutnya, himpunan vektor *orthogonal* yang ternormalisasi ini disebut himpunan vektor *orthonormal*.

Secara umum, langkah-langkah dalam mencari nilai *eigen* dan vektor *eigen* dari matriks transformasi (orde 2), $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, adalah sebagai berikut :

1. Mulai dari $\mathbf{R} = \mu\mathbf{r}$, selanjutnya diperoleh $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
2. Bentuk matriks : $\begin{pmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ dan persamaan terpisahnya.
3. Cari persamaan karakteristik matriks M, yaitu : $\begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0$.
4. Cari nilai *eigen*, yaitu μ_1 dan μ_2.
5. Substitusi masing – masing μ_1 dan μ_2 ke persamaan terpisah pada langkah 2.
6. Dari persamaan garis, pilih x_1, y_1 dan pilih x_2, y_2 hingga vektor *eigen* diperoleh .
7. Terapkan syarat *orthogonal* dan normalisasi.

Soal-soal Latihan 1 :

Carilah nilai *eigen* dan vektor *eigen* dari matriks-matriks berikut :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ Jawab: $\mu_1 = 4 \quad (1,1)$; $\mu_2 = -1 \; (3,-2)$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Jawab : $\mu_1 = 1 \quad (0, \; 0, \; 1)$; $\mu_2 = -1 \quad (1, \; -1, \; 0)$; $\mu_3 = 5 \quad (1, \; 1, \; 0)$

5. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.4 Pendiagonalan Matriks

Tinjau kembali Pers.(4.11), yaitu :

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= \mu x \\ -2x + 2y &= \mu y \end{aligned}$$

Substitusi $\mu_1 = 1$, dan $\mu_2 = 6$ ke persamaan diperoleh :

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2y_1 &= x_1 \\ -2x_1 + 2y_1 &= y_1 \end{aligned} \quad \text{dan} \quad \begin{aligned} 5x_2 - 2y_2 &= 6x_2 \\ -2x_2 + 2y_2 &= 6y_2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dalam notasi matriks, keempat persamaan dalam Pers.(4.13) dapat ditulis :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

dan telah diperoleh :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{dan} \quad x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

sehingga Pers.(4.14) menjadi :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{4.14a}$$

Dengan

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

diperoleh ungkapan

$$MC = CD \tag{4.15}$$

Perlu diselidiki apakah matriks *C* punya invers atau deteminan *C* tidak sama dengan nol?

$$\det\ (C) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right) = 1 \neq 0, \quad \text{jadi } C \text{ punya } invers.$$

Kalikan Pers.(4.15) dengan C' dari sebelah kiri, diperoleh :

$$C'MC = C'CD$$

Karena $C'C = I$ akhirnya diperoleh :

$$C'MC = D \tag{4.16}$$

Matriks D disebut similar dengan M, dan bila mencari D dengan M diketahui maka dapat dikatakan bahwa M dapat didiagonalisasi dengan transformasi similaritas. Untuk mencari D hanya perlu memecahkan persamaan karakteristik matriks M (dengan metode determinan : yaitu diagonal utama $M - \mu$).

Urutan diagonal utama matriks D dapat dibalik dan Pers.(4.14) dapat ditulis sebagai :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dan Pers.(4.16) akan terpenuhi dengan C yang berbeda.

Arti fisis dari *C* dan *D*

Tinjau dua sumbu koordinat (x, y) dan (x', y') dengan sumbu (x', y') dirotasi sejauh θ dari sumbu (x, y), seperti Gambar 4.4. Koordinat-koordinat (x, y) dan (x', y') dari satu titik (atau komponen-komponen dari satu vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$) relatif terhadap kedua sistem yang dihubungkan dengan Pers.(4.7). yaitu :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\theta + y \sin\theta \\ y' &= -x \sin\theta + y \cos\theta \end{aligned}$$

Pemecahan Pers.(4.7) untuk x dan y, diperoleh :

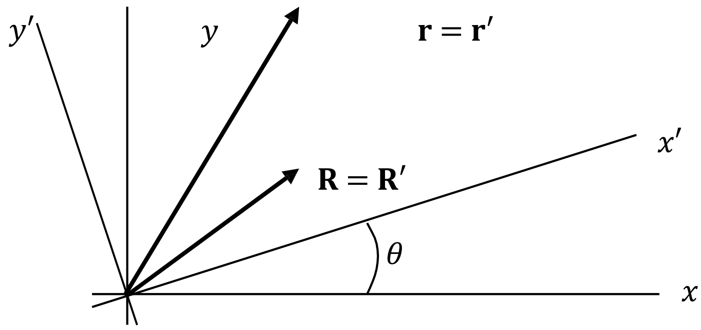
$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{aligned} \tag{4.17}$$

Dalam notasi matriks ditulis :

$$r = C\, r' \text{ dengan } C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Andaikan ada vektor lain $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ dengan komponen-komponen X, Y dan X', Y', komponen-komponen ini dihubungkan oleh :

$$R = C\, R' \tag{4.19}$$



Gambar 4.4 Ilustrasi untuk memahami pengertian *C* dan *D*.
Sekarang misalkan *M* adalah matriks yang menggambarkan deformasi bidang dalam sistem (x, y), maka persamaan :

$$R = M\,r \tag{4.20}$$

menyatakan bahwa vektor **r** menjadi vektor **R** setelah deformasi relatif terhadap sumbu (x, y).

Bagaimana halnya dengan deformasi dalam sistem (x', y'), atau matriks apakah yang mengubah $\mathbf{r}'$ menjadi $\mathbf{R}'$? Substitusi Pers.(4.18) dan (4.19) ke dalam Pers.(4.20), diperoleh :

$$C\,R' = MC\,r' \quad \text{atau} \quad R' = C'MC\,r'$$

dengan Pers.(4.16), diperoleh :

$$R' = D\,r'$$

Jadi deformasi dalam sistem (x', y') oleh matriks $D = C'MC$ sedangkan deformasi dalam sistem (x, y) oleh matriks M.

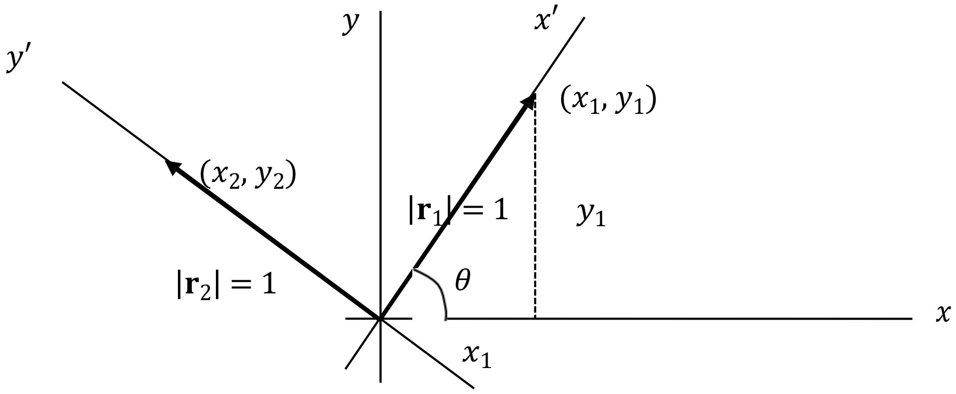
Selanjutnya, jika matriks *C* yang dipilih untuk membuat $D = C'MC$ adalah sebuah matriks diagonal, maka sumbu baru (x', y') terletak sepanjang arah vektor *eigen M*. Lihat kembali Pers.(4.14), kolom-kolom dari matriks *C* adalah komponen-komponen vektor *eigen* satuan. Jika vektor-vektor *eigen* saling tegak lurus, maka sumbu baru (x', y') sepanjang arah vektor *eigen* merupakan sumbu tegak lurus yang dirotasikan dari sumbu (x, y) sejauh sudut θ, seperti Gambar 4.5. Vektor-vektor *eigen* satuan artinya $|\mathbf{r}_1| = 1$ dan $|\mathbf{r}_2| = 1$. Dari gambar diperoleh :

$$x_1 = |\mathbf{r}_1| \cos\theta = \cos\theta, \qquad x_2 = -|\mathbf{r}_2| \sin\theta = -\sin\theta,$$

$$y_1 = |\mathbf{r}_1| \sin\theta = \sin\theta, \qquad y_2 = |\mathbf{r}_2| \cos\theta = \cos\theta,$$

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Jadi matriks *C* yang mendiagonalisasi *M* adalah matriks rotasi *C* dalam Pers.(4.18) bila sumbu (x', y') sepanjang arah vektor *eigen M*.



Gambar 4.5 Ilustrasi untuk vektor-vektor *eigen* saling tegak lurus.
Matriks diagonal *D* menggambarkan deformasi, relatif terhadap sumbu baru. Sebagai contoh, kita peroleh :

$$R' = D\,r' \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

atau (4.21)

$$X' = x', \qquad Y' = 6\,y'$$

Pers.(4.21) menyatakan bahwa, dalam sistem (x', y'), setiap titik (x', y') memiliki koordinat x'-nya yang tidak berubah oleh deformasi dan koordinat y'-nya dikalikan dengan 6, sehingga deformasi secara ringkas merupakan sebuah tarikan dalam arah y'.

4.5 Penggunaan Pendiagonalan Matriks

Penggunaan pendiagonalan matriks (proses diagonalisasi) yang sederhana adalah pada persamaan *conic* (elips atau hiperbola) yang pusatnya adalah pada titik asal sumbu, dengan bentuk umum persamaannya adalah :

$$A\,x^2 + 2Hxy + By^2 = K$$

(4.22)

dengan A, H, B, dan K adalah sustu

konstanta. Dalam matriks ditulis sebagai :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \qquad \text{atau} \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K$$

(4.23)

$$dengan \;\; M = \begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix}$$

Tinjau kembali Gambar 4.4, misalkan sumbu (x', y') dirotasi dari sumbu (x, y) sejauh θ, sehingga koordinat titik (x, y) dan (x', y') dihubungkan oleh persamaan :

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

Dalam notasi matriks ditulis :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

atau $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dengan $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. (4.24)

Mengingat bahwa $(AB)^T = B^T A^T$ maka Pers.(4.24) menjadi :

$$(x \quad y) = (x' \quad y') \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ atau} \tag{4.25}$$

$$(x \quad y) = (x' \quad y')\, C^T = (x' \quad y')\, C^{-1}$$

Persamaan suku terakhir dari Pers.(4.25) diperoleh karena *C* adalah matriks *orthogonal*, yaitu berlaku hubungan : $C^T = C^{-1}$.

Substitusi Pers.(4.24) dan (4.25) ke Pers.(4.23), diperoleh :

$$(x \quad y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K$$

$$(x' \quad y')\, C^{-1} M\, C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = K \tag{4.26}$$

dalam hal ini, $D = C^{-1} M\, C$. Jadi jika *C* adalah matriks yang mendiagonalisasi *M*, maka Pers.(4.36) adalah persamaan konik relatif terhadap sumbu baru.

Contoh 4.1

Tinjau persamaan konik : $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30$. Rotasikan persamaan ini ke sumbu baru.

Jawab :

Persamaan konik $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30$ dalam notasi matriks ditulis :

$$(x \quad y) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 30$$

sehingga diperoleh $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, dan sebelumnya telah diperoleh bahwa nilai eigennya adalah $\mu = 1$ dan $\mu = 6$, juga telah diperoleh bahwa :

$$C^{-1} M\, C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, persamaan konik Pers.(4.26) relatih terhadap sumbu baru adalah :

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = 30 \quad \text{atau} \quad x'^2 + 6y'^2 = 30. \qquad (4.27)$$

Amati bahwa perubahan urutan 1 dan 6 dalam *D* akan memberikan $6x'^2 + y'^2 = 30$ sebagai persamaan baru dari persamaan elips Pers.(4.27). Hal ini adalah cara sederhana dalam saling menukarkan sumbu antara sumbu x' dan sumbu y'.

Dengan membandingkan matriks *C*, yaitu matriks vektor *eigen* satuan Pers.(4.15) dengan matriks rotasi Pers.(4.18), terlihat bahwa sudut rotasi θ dari sumbu semula (x, y) ke sumbu baru (x', y') adalah :

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Perlu juga diketahui bahwa matriks *M* dapat didiagonalisasi dengan transformasi similaritas $C^{-1}M\,C$ dengan *C* matriks *orthogonal*, jika dan hanya jika M adalah matriks simetris.

Contoh 4.2

Rotasi persamaan kuadrik : $x^2 + 6xy - 2y^2 - 2yz + z^2 = 24$ ke sumbu baru.

Jawab :

Persamaan kuadrik : $x^2 + 6xy - 2y^2 - 2yz + z^2 = 24$ dalam notasi matriks ditulis :

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 24$$

Persamaan karakteristik dari matriks ini adalah :

$$\begin{vmatrix}1-\mu & 3 & 0\\ 3 & -2-\mu & -1\\ 0 & -1 & 1-\mu\end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\mu)\begin{vmatrix}-2-\mu & -1\\ -1 & 1-\mu\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 1-\mu\end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\mu)[(-2-\mu)(1-\mu) - 1] - 3[3(1-\mu)] = 0$$

$$\mu^3 - 13\mu + 12 = 0$$

$$(\mu - 1)(\mu + 4)(\mu - 3) = 0$$

Nilai *eigen* : $\mu = 1,\ \mu = -4,\ \mu = 3$.

Persamaan kuadrik relatif terhadap sumbu baru sumbu baru (x', y') adalah :

$$(x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = 24$$

atau $$x'^2 - 4y'^2 + 3z'^2 = 24.$$

Salah satu dari vektor *eigen* dapat dicari dengan mensubstitusi nilai *eigen* $\mu = 1$ ke dalam persamaan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \\ \mu z \end{pmatrix}$$

dan memecahkannya untuk nilai *x, y,* dan *z.*

Dengan demikian, $\mathbf{i}x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$ adalah vektor *eigen* yang berkaitan dengan $\mu = 1$, dan membaginya dengan besarnya diperoleh vektor *eigen* satuan. Dengan mengulang-ulang proses ini untuk nilai-nilai *eigen* yang lain, diperoleh ke tiga vektor *eigen* satuan berikut :

$$\text{Untuk } \mu = 1 \text{ diperoleh } \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\text{Untuk } \mu = -4 \text{ diperoleh } \left(-\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}\right)$$

$$\text{Untuk } \mu = 3 \text{ diperoleh } \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right).$$

Dengan demikian, matriks rotasi *C* adalah :

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

Harga atau nilai dalam *C* adalah cosinus dari 9 sudut di antara sumbu (x, y) dan (x', y').

Soal-soal Latihan 2 :

Rotasikan persamaan konik atau kuadrik berikut ke sumbu baru.

1. $2x^2 + 4xy - y^2 = 24$ [Jawab : $3x'^2 - 2y'^2 = 24$]
2. $8x^2 + 8xy + 2y^2 = 35$ [Jawab : $10x'^2 = 35$]
3. $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 8$
4. $5x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4xz = 14$
5. $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2xz - 2yz = 12$ [Jawab : $3x'^2 + \sqrt{3}y'^2 - \sqrt{3}z'^2 = 12$]
6. $x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz = 60$

4.6 Koordinat Lengkung

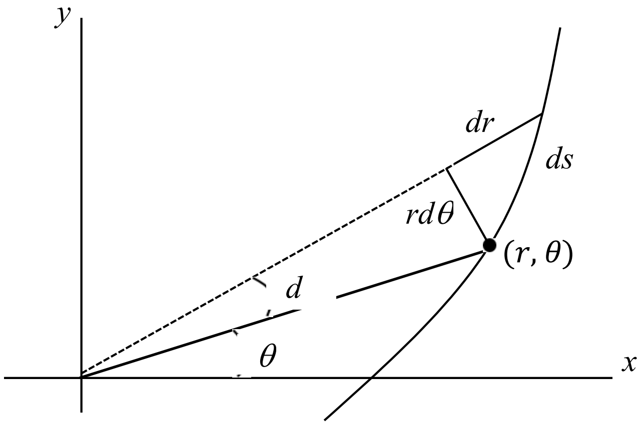
Sebelum pembahasan tentang perubahan variabel atau transformasi koordinat perlu dibahas mengenai sifat-sifat dari sistem koordinat seperti sistem koordinat tegak lurus (x, y, z) dan sistem koordinat silindris (r, θ, z).

Elemen-elemen dari panjang busur *ds* dari kedua sistem koordinat diberikan oleh :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{untuk sistem koordinat tegak lurus}$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad \text{untuk sistem koordinat silindris} \qquad (4.28)$$

dengan *ds* adalah elemen garis atau lintasan.

Sebagai contoh, tinjau Gambar 4.6, yaitu koordinat polar dalam bidang.



Gambar 4.6 Ilustrasi untuk koordinat polar dalam bidang.

Menurut teorema *Pythagoras* :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Metode untuk memperoleh ds^2 untuk koordinat silindris adalah dari persamaan-persamaan :

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta, \quad z = z \qquad (4.29)$$

dan diperoleh :

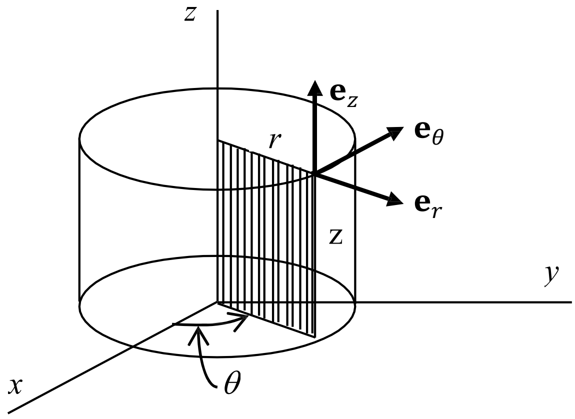
$$dx = \cos\theta\, dr - r \sin\theta\, d\theta$$
$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \qquad (4.29a)$$
$$dz = dz$$

Kuadratkan masing-masing Pers.(4.29a) dan jumlahkan hasilnya, diperoleh :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \qquad (4.30)$$

Sistem koordinat ini disebut sistem *orthogonal*, yang berarti permukaan-permukaan koordinat benar-benar saling tegak lurus.

Pada sistem silindris (Gambar 4.7), permukaan koordinat adalah r = konstan (bentuk silindris konsentrik), θ = konstan (bentuk bidang-bidang setengah), dan z = konstan (bentuk bidang-bidang). Ketiga permukaan ini melalui sebuah irisan titik pada sudut kanan. Ketiga kurva irisan dari permukaan koordinat berpasangan saling potong pada sudut kanan, kurva-kurva ini disebut garis-garis koordinat atau arah koordinat. Vektor-vektor satuan untuk arah koordinat pada sistem silindris ditandai dengan $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ identik dengan $\mathbf{k}$) yang membentuk sudut tegak lurus seperti $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Pembahasan sistem koordinat seperti ini akan mengarah pada sistem koordinat lengkung atau koordinat *cuvalinear* apabila permukaan koordinatnya bukan bidang dan garis koordinatnya berupa kurva bukan garis lurus.



Gambar 4.7 Sistem koordinat silindris

4.7 Faktor Skala dan Vektor Basis untuk Sistem *Orthogonal*

Pada sistem tegak lurus, jika *x, y, z* adalah koordinat-koordinat sebuah partikel dan *x* berubah dengan *dx* dengan *y* dan *z* konstan, maka jarak perpindahan partikel adalah $ds = dx$. Sedangkan, pada sistem silindris, jika θ berubah dengan $d\theta$ dengan *r* dan *z* konstan, maka jarak perpindahan partikel bukan $d\theta$ tetapi $ds = r\,d\theta$ (r = faktor skala). Faktor-faktor seperti *r,* dalam $r\,d\theta$, dikalikan dengan diferensial ($d\theta$) untuk memperoleh jarak disebut faktor-faktor skala dan sangat penting untuk diperhatikan. Kembali pada Pers.(4.30), jika transformasinya *orthogonal*, maka faktor-faktor skala dapat dikeluarkan. Untuk sistem silindris ($ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$) pd Pers.(4.30), faktor-fakor skala-nya adalah 1, *r*, 1. Tinjau sebuah vektor $d\mathbf{s}$ dengan komponen-komponen dr, $r\,d\theta$, dan dz dalam arah-arah koordinat $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, dan $\mathbf{e}_z$:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_z dz \qquad (4.31)$$

sehingga

$$ds^2 = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \text{ [sama seperti Pers. (4.28)],}$$

karena vektor-vektor **e** adalah orthogonal dan panjangnya satu satuan.

Kita dapat mencari hubungan vektor-vektor basis (terkadang disebut vektor satuan) dari sistem koordinat lengkung ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ dalam sistem silindris) dan $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Hal ini akan bermanfaat bila kita ingin mendiferensialkan sebuah vektor yang dinyatakan dalam bentuk vektor-vektor satuan koordinat lengkung. Untuk jelasnya $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ adalah konstan dalam besar dan arah, sedangkan $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ arahnya tidak menentu sehingga derivatifnya tidak sama dengan nol. Secara aljabar, untuk mencari sistem koordinat silindris yang terkait dengan sistem tegak lurus adalah sebagai berikut :

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$$

$$= \mathbf{i}\,(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta) + \mathbf{j}\,(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta) + \mathbf{k}\,dz \qquad (4.32)$$

Bandingkan Pers.(4.32) dengan Pers.(4.31), dan dengan menggunakan hubungan :

$$x = r\cos\theta \qquad \partial x/\partial r = \cos\theta \qquad \partial x/\partial\theta = -r\sin\theta$$

$$y = r\sin\theta \qquad \partial x/\partial r = \sin\theta \qquad \partial x/\partial\theta = -r\cos\theta$$

diperoleh :

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \mathbf{j}\,\frac{\partial y}{\partial r} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta,$$

$$r\mathbf{e}_\theta = \mathbf{i}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \mathbf{j}\,\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\mathbf{i}\,r\sin\theta + \mathbf{j}\,r\cos\theta, \qquad (4.33)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

Untuk lebih mudahnya, vektor basis biasanya dilambangkan dengan $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$. Dari Pers.(4.33) diperoleh :

$\mathbf{a}_r = \mathbf{e}_r$ adalah jelas sebuah vektor satuan (kerena $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)

$\mathbf{a}_\theta = r\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}\,r\sin\theta + \mathbf{j}\,r\cos\theta$, memiliki panjang $|\mathbf{a}_\theta| = r$ shg vektor satuan :

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\mathbf{a}_\theta = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta$$

Dalam hal ini, vektor satuan $\mathbf{e}_\theta$ diperoleh dengan cara membagi vektor basis $r\mathbf{e}_\theta$ dengan r, (r = faktor skala). Dengan demikian, vektor satuan jelas memiliki faktor skala = 1, sedangkan vektor basis dapat memiliki faktor skala $\neq 1$.

Kita dapat menggunakan perumusan sebelumnya untuk mendapatkan kecepatan dan percepatan partikel dalam koordinat silindris dan juga untuk sistem koordinat lainnya. Dalam koordinat silindris (Gambar 4.8), pergeseran partikel dari titik asal pd saat *t* adalah :

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z.$$

maka

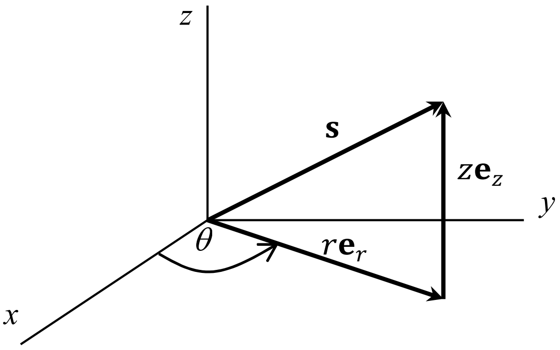
$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r) + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z.$$

Permasalahannya adalah :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r)$$

karena

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad \text{dan} \quad \frac{dz}{dt} = z$$



Gambar 4.8 Pergeseran partikel dari titik asal pada saat *t* dalam sistem koordinat silindris

Dengan Pers.(4.33),

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r) = \frac{d}{dt}(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta) = -\mathbf{i}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \mathbf{j}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta\,\theta,$$

sehingga diperoleh :

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\theta\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z.$$

Percepatannya dapat dicari dengan cara mendiferensialkan persamaan terakhir terhadap *t*, dan terapkan Pers.(4.33) untk mendapatkan $\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_\theta)$. Bila dikerjakan, diperoleh hasil akhir :

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\theta^2)\mathbf{e}_r + (\dot{r}\theta + r\theta)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z.$$

4.8 Koordinat Lengkung Umum

Pada umumnya, pemakaian kumpulan koordinat (variabel) x_1, x_2, x_3 lebih diminati. Sebagai contoh, untuk sistem tegak lurus $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$, silindris $x_1 = r,\ x_2 = \theta$, $x_3 = z$, dengan demikian, ketiga permukaan koordinat adalah $x_1 = x_2 = x_3 =$kontanta. Ketiganya melalui sebuah titik temu dalam ketiga garis koordinat. Bila x, y, z sebagai fungsi x_1, x_2, x_3, pertama kita cari ds^2 sebagaimana yang diperoleh untuk sistem silindris [Lihat derivatif Pers.(4.30) dari (4.29)].

Selanjutnya, jika sistem koordinat diketahui *orthogonal*, ds^2 akan berbentuk :

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 dx_i^2. \qquad (4.34)$$

dengan *h* adalah faktor skala.

Vektor pergeseran $d\mathbf{s}$ dapat ditulis sebagai [Bandingkan dengan Pers.4.31)] :

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_1 h_1 dx_1 + \mathbf{e}_2 h_2 dx_2 + \mathbf{e}_3 h_3 dx_3 = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i h_i dx_i, \qquad (4.35)$$

dengan **e** adalah vektor satuan dalam arah koordinat.

Elemen volume dV dalam sistem *orthogonal* adalah :

$$dV = h_1\ h_2\ h_3\ dx_1\ dx_2\ dx_3$$

dengan sisi-sisi $h_1 dx_1,\ \ h_2 dx_2,\ h_3 dx_3$.

Sebagai contoh, elemen volume untuk sistem tegak lurus adalah : $dV = dx\ dy\ dz$ dan untuk silindris $dV = \ dr\ rd\theta\ dz$.

Jika sistem koordinat tidak *orthogonal*, Pers.(4.34) tidak berlaku dan ungkapan untuk ds^2 akan berbentuk :

$$\begin{aligned} ds^2 = \ & g_{11}\ dx_1^2 + g_{12}\ dx_1 dx_2 + g_{13}\ dx_1 dx_3 \\ & + g_{21}\ dx_2 dx_1 + g_{22}\ dx_2^2 + g_{23}\ dx_2 dx_3 \\ & + g_{31} dx_3 dx_1 + g_{32}\ dx_3 dx_2 + g_{33}\ \ dx_3^2 \end{aligned} \qquad (4.36)$$

dengan g_{ij} adalah koefisien-koefisien yang muncul dalam perhitungan $dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Perumusan yang lebih ringkas, Pers.(4.36) ditulis :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij}\ dx_i\ dx_j\ . \qquad (4.37)$$

Atau dalam notasi matriks, ditulis :

$$ds^2 = (dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \qquad (4.38)$$

kuantitas g_{ij} berbentuk tensor yang dikenal sebagai tensor metrik.

Sekarang, jika sistem koordinatnya *orthogonal*, maka

$$ds^2 = g_{11}\ dx_1^2 + g_{22}\ dx_2^2 + g_{33}\ \ dx_3^2 \qquad (4.39)$$

[Dalam bahasa matriks, g_{ij} adalah matriks diagonal.]

Dalam bentuk faktor skala, dari Pers.(4.34) diperoleh :

$$\begin{aligned} & g_{11} = h_1^2, \qquad g_{11} = h_1^2, \qquad g_{11} = h_1^2 \\ & g_{12} = g_{13} = g_{21} = g_{23} = g_{31} = g_{33} = \ \ 0 \end{aligned} \qquad (4.39a)$$

untuk sistem koordinat *orthogonal*.

Soal-soal Latihan 3 :

1. Carilah ds^2, faktor skala, $d\mathbf{s}$, elemen volume (dV) kemudian tentukan vektor basis ($\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_z$) dan vektor satuan ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$) dari koordinat bola.

Petunjuk : Anda dapat memperoleh ds^2 untuk koordinat bola dengan persamaan-persamaan : $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = \cos\theta$
dan terapkan derivatifnya pada Pers.(4.30) yaitu $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

[Jawab : Faktor skala $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \sin\theta$]

2. Carilah komponen-komponen kecepatan dan percepatan dalam koordinat bola.

   Petunjuk : Untuk memperoleh kecepatan, Anda dapat menggunakan dua cara yaitu mulai dengan $d\mathbf{s}$ atau dengan $\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r$.

   Jawab : $\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta \theta + \mathbf{e}_\varphi r \sin\theta\, \varphi$

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{e}_r(\ddot{r} - r\theta^2 - r\sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) + \mathbf{e}_\theta(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\theta - r\sin\theta\cos\theta\, \dot{\varphi}^2)$$
$$+ \mathbf{e}_\varphi(r\sin\theta\ \ddot{\varphi} + 2r\cos\theta\, \theta\, \dot{\varphi} + 2\sin\theta\, \dot{r}\, \dot{\varphi}).$$

3. Kerjakan seperti soal 1 untuk sistem koordinat berikut :

   a. Koordinat parabolik silindris (u, v, z):

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$
$$y = uv$$
$$z = z$$

   b. Koordinat *paraboloidal* (u, v, φ) :

$$x = uv\cos\varphi$$
$$y = uv\sin\varphi$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

4.9 Operator Vektor dalam Koordinat Lengkung *Orthogonal*

Dalam pembahasan tentang analisis vektor, pada sistem koordinat tegak lurus, telah didefinisikan tentang operator-operator vektor yaitu gradien (∇u), divergensi ($\nabla \cdot \mathbf{V}$), curl ($\nabla \times \mathbf{V}$), dan Laplasian ($\nabla^2 u$). Selanjutnya, kita perlu mengetahui bagaimana menyatakan operator-operator dalam bentuk koordinat *orthogonal* umum.

Gradien (∇u)

Pada bab analis vektor, telah ditunjukkan bahwa Derivatif arah $\frac{du}{ds}$ dalam arah tertentu adalah komponen dari ∇u dalam arah tersebut. Dalam koordinat silindris, jika kita bergerak ke arah r (θ dan z kontan), maka dengan Pers.(4.30) diperoleh $ds = dr$. Jadi, komponen r dari ∇u adalah $\frac{du}{ds}$ bila $ds = dr$, komponen r dari ∇u menjadi $\frac{\partial u}{\partial r}$. Dengan cara yang sama, komponen

θ dari ∇u adalah $\frac{du}{ds}$ bila $ds = r\,d\theta$, komponen r dari ∇u menjadi $(\frac{1}{r})\frac{\partial u}{\partial \theta}$. Jadi, ∇u dalam koordinat silindris adalah :

$$\nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \qquad (4.40)$$

Selanjutnya, dalam koordinat *orthogonal* umum x_1, x_2, x_3, komponen ∇u dalam arah x_1 (x_2 dan x_3 konstan) adalah $\frac{du}{ds}$ jika $ds = h_1\,dx_1$ [dari Pers.(4.34)], yaitu komponen ∇u dalam arah $\mathbf{e}_1$ adalah $(\frac{1}{\mathbf{h_1}})(\frac{\partial u}{\partial x_1})$. Hal yang sama dilakukan untuk komponen ∇u dalam arah lainnya dan kita peroleh :

$$\nabla u = \mathbf{e}_1 (\frac{1}{h_1}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 (\frac{1}{h_2}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 (\frac{1}{h_3}) \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (\frac{\mathbf{e}_i}{h_i}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (4.41)$$

Divergensi ($\nabla \cdot \mathbf{V}$)

Misalkan diketahui sebuah vektor dalam sistem *orthogonal*

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_1 V_1 + \mathbf{e}_2 V_2 + \mathbf{e}_3 V_3 \qquad (4.42)$$

dengan komponen-komponen V_1, V_1, V_1. Kita dapat membuktikan bahwa

$$\nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}) = 0, \quad \nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3}) = 0, \quad \nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3}) = 0, \qquad (4.42a)$$

Langkah pembuktian $\nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}) = 0$ adalah dimulai dengan menggunakan Pers.(4.41) dengan $u = x_1$, $u = x_2$, $u = x_3$, diperoleh :

$$\nabla x_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}, \quad \nabla x_2 = \frac{\mathbf{e}_{12}}{h_2}, \quad \nabla x_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}.$$

Dan dengan mengingat urutan $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ dari kiri ke kanan maka diperoleh :

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \text{dan} \quad \nabla x_1 \times \nabla x_2 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \quad \text{dst.}$$

Divergensinya :

$$\nabla \cdot (\nabla x_1 \times \nabla x_2) = \nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2})$$

Dengan menggunakan identitas : $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$, diperoleh :

$$\nabla x_2 \cdot (\nabla \times \nabla x_1) - \nabla x_1 \cdot (\nabla \times \nabla x_2) = \nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2})$$

Sekali lagi, gunakan identitas : $\nabla \times \nabla \emptyset = 0$, akhirnya diperoleh :

$$\nabla x_2 \cdot (0) - \nabla x_1 \cdot (0) = \nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}) \quad \text{atau} \quad \nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}) = 0.$$

Cara yang sama dilakukan untuk pembuktian: $\nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3}) = 0, \quad \nabla \cdot (\frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3}) = 0.$

Selanjutnya, kita tuliskan Pers.(4.42) dalam bentuk :

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3}(h_2 h_3 V_1) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3}(h_1 h_3 V_2) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}(h_1 h_2 V_3) \tag{4.43}$$

Kita tentukan $\nabla \cdot \mathbf{V}$ dengan cara mencari divergensi setiap suku pada ruas kanan Pers (4.43). Dengan menggunakan hubungan :

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \phi) + \phi \nabla \cdot \mathbf{v}$$

dengan $\phi = h_2 h_3 V_1$ dan $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 / h_2 h_3$, kita dapatkan bahwa divergensi suku pertama dari ruas kanan Pers (4.43) adalah :

$$\nabla \cdot (h_2 h_3 V_1) \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \cdot \nabla (h_2 h_3 V_1) + h_2 h_3 V_1 \nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \tag{4.44}$$

Dengan Pers.(4.42a), suku kedua Pers.(4.44) adalah nol. Dalam suku pertama Pers.(4.44), hasil kali dot $\mathbf{e}_1$ dengan $\nabla(h_2 h_3 V_1)$ adalah komponen pertama dari $\nabla(h_2 h_3 V_1)$. Dengan Pers. (4.41), komponen ini adalah :

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 h_3 V_1).$$

Dengan cara yang sama, perhitungan divergensi untuk suku-suku yang lain dari Pers.(4.43),kita dapatkan :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 V_1) + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 V_2) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 V_3)$$

atau

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}(\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(h_1 h_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(h_1 h_2 V_3)) \tag{4.45}$$

Sebagai contoh, pada koordinat silindris dengan faktor skala $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$, dengan Pers.(4.45), ungkapan divergensi dalam koordinat silindris adalah :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r V_z))$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Curl ($\nabla \times \mathbf{V}$)

Dengan cara yang sama seperti yang digunakan untuk divergensi $(\nabla \cdot \mathbf{V})$, kita dapat mencari curl ($\nabla \times \mathbf{V}$). Hasilnya adalah :

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix} \quad (4.46)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3V_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_3V_3)\right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1V_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3V_3)\right] + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2V_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1V_1)\right].$$

Dalam koorinat silindris, kita peroleh :

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_r & rV_\theta & V_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{\mathbf{e}_z}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_z}{\partial \theta}\right).$$

Laplasian ($\nabla^2 u$)

Karena $\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u$, kita dapat mencari $\nabla^2 u$ dengan mengkombinasikan Pers.(4.41) dan (4.45) dengan $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla} u$. Kita peroleh :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\right] \quad (4.47)$$

Dalam koorinat silindris, bentuk Laplasian adalah :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Soal-soal Latihan 4 :

1. Tentukan ∇U, $\nabla \cdot \mathbf{V}$, $\nabla \times \mathbf{V}$, dan $\nabla^2 U$ dalam sistem koordinat bola.
2. Kerjakan seperti soal 1 untuk sistem koordinat pada latihan 3c, yaitu untuk koordinat silindris parabolik (u, v, z) dan koordinat *paraboloidal* (u, v, φ).
3. Dalam koordinat silindris, tentukan $\nabla \cdot \mathbf{e}_r$, $\nabla \cdot \mathbf{e}_\theta$, $\nabla \times \mathbf{e}_r$, $\nabla \times \mathbf{e}_\theta$.
4. Dalam koordinat bola, tentukan $\nabla \cdot \mathbf{e}_r$, $\nabla \cdot \mathbf{e}_\theta$, $\nabla \times \mathbf{e}_\theta$, $\nabla \times \mathbf{e}_\varphi$.

5. Dalam koordinat bola, tentukan $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r}$, $\boldsymbol{\nabla} \times (r\mathbf{e}_\theta)$, $\boldsymbol{\nabla}(r \cos\theta)$.
6. Dalam koordinat silindris, tentukan $\nabla^2 r$ dan $\nabla^2(1/\mathrm{r})$
7. Dalam koordinat bola, tentukan $\nabla^2 r$, $\nabla^2(r^2)$, $\nabla^2(1/\mathrm{r}^2)$.

DAFTAR PUSTAKA

Boas, Mary L., 1983, *Mathematical Methods in The Physical Sciences*, John Wiley & Sons, Inc. New York.

Frank A. Jr.; Ault, J.C (Alih bahasa : Lea Prasetio), 1985, *Teori dan Soal-soal Diferensial dan Integral Kalkulus,* Penerbit Erlangga, Jakarta.

Frank A. Jr.; Philip A. S. (Alih bahasa : Alit Bondan), 2004, *Matematika Universitas,* Penerbit Erlangga, Jakarta.

Hans J. Wospakrik, 1993, *Dasar-dasar Matematika untuk Fisika*, Intitut Teknologi Bandung, Bandung.

Seymour L.; Marc L. L. (Alih bahasa : Refina Indriasari), 2004, *Aljabar Linear,* Penerbit Erlangga, Jakarta.

Stephenson, G.; Radmore, P.M., 1990, *Advanced Mathematical Methods for Engineering and Science Students*, Cambridge University Press, Cambridge.