PDB ORDO II

PERSAMAAN DAN POLINOMIAL LEGENDRE

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PROF DR HAMKA

Persamaan dan Polinomial Legendre

Persamaan Legendre

Persamaan difeensial dengan bentuk umum sebagai berikut :

$(1 - x^2)$ y – 2xy + n (n + 1) y = 0 .... (2.3) dengan n real : disebut **persamaan Legendre**.

Jika masing-masing ruas dibagi dengan $(1-x^2)$; PD menjadi :

$$y - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

Terlihat bahwa x = 0 merupakan titik ordiner dari PD; sehingga PD diatas bisa diselesaikan dengan penderetan disekitar titik ordiner, dengan mengambil :

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad \text{...} \quad (2\text{-}4)$$

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} \quad \text{...} \quad (2\text{-}5)$$

$$y'' = \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) m a_m x^{m-2} \quad \text{..} \quad (2\text{-}6)$$

substitusikan y, y' dan y" ke PD :

$$(1-x^2) \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) m a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + n(n-1)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0 \quad \text{...} \quad (2\text{-}7)$$

atau $\sum_{m=2}^{\infty} (m-1) m a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) m a_m x^m - 2 \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m + n(n+1)$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

Atau $1.2.a_2 + 2.3.a_3 + 3.4.a_4 x^2 + \ldots\ldots + (s+1)(s+2)a_{s+2} x^s + \ldots\ldots$

$- 1.2a_2x^2 - 2.3a_3x3 - 3.4a_4x4 - \ldots\ldots -2sa_sx^s - \ldots\ldots$

$- 2.1a_1x - 2.2a_2x^2 - 2.3a_3x^3 - \ldots\ldots -2.sa_sx^s - \ldots\ldots$

$+ n(n = 1)a_0 + n(n+1)a_1x + n(n+1)a_2x^2 + \ldots + n(n+1)a_sx^s + \ldots$

$= 0$

kumpulkan x dengan pangkat yang sama, diperoleh persamaan :

koefisien x^0 : $1(2)a_2 + n(n + 1)a_0 = 0 \rightarrow a_2 = -\dfrac{n(n+1)}{2}a_0$

koefisien x^1 : $2(3)a_3 - 2(1)a_1 + n(n + 1)a_1 = 0$

$$6a_3 + (-2 + n(n + 1)a_1 = 0 \rightarrow a_3 = -\frac{(n-1)(n-2)}{6}a_1$$

Koefisien x^s : $(s + 1)(s + 2)a_s + 2 + [-s(s - 1) - 2s + n(n + 1)]a_s = 0$

$$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+1)(s+2)}a_s \quad \text{...} \quad (2\text{-}8)$$

rumus rekursif untuk s = 0,1,2,3,.......

dari rumus rekursif bisa diturunkan :

$$s = 0; a_2 = -\frac{n(n+1)}{1(2)}a_0 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0$$

$$s = 1; a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{2(3)}a_1 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$s = 2; a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3(4)}a_2 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3(4)}\left[-\frac{n(n+1)}{2!}\right]a_0$$

$$= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

$$s = 3; a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4(5)}a_3 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4(5)}\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

PU.PD :

$$y = a_0 + a_1x + \left[-\frac{n(n+1)}{2!}a_0\right]x^2 + \left[-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1\right]x^3 + \left[\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0\right]x^4$$

$$+ \left[\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1\right]x^5 + \text{....................................} \quad (2\text{-}9)$$

atau

y = $a_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n\,(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - .....\right] + a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \right.$

$$\left.\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - ....\right]$$

atau

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2\text{-}10)$$

dengan :

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n\,(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2\text{-}11)$$

$$y_2(x) = 1 - \frac{(n-1)\,(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)\,(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \ldots.. \; (2\text{-}12)$$

Polinomial Legendre

Dalam beberapa aplikasi, parameter n dalam persamaan Legendre adalah bilangan bulat positif ($n \geq 0$). Jika n adalah bilangan bulat positif, untuk s = n sisi kanan persamaan (1-15) sama dengan nol, dan

$a_{n+2} = 0$: $a_{n+4} = 0$; $a_{n+6} = 0$; $a_{n+8} =$; ……..

sehingga,

- jika n genap; persamaan (1-xx) akan tereduksi menjadi suatu polinomial derajat n dalam x
- jika n ganjil ; Persamaan (1-xx) akan tereduksi menjadi suatu polinomial derajat n dalam x.

Untuk n genap maupun ganjil polinomial derajat n yang terjadi disebut polinomial Legendre, ditulis dengan $P_n(x)$. Bentuk umum dari $P_n(x)$ bisa diturunkan dengan cara sebagai berikut :

Rumus rekursif (1-8) diperoleh

$$a_s = -\frac{(s+1)(s+2)}{(n-s)(n+s+1)}a_{s+2} \;;\; s \leq n-2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2.13)$$

sehingga untuk s = 0; 1; 2; 3; ……; n – 1, nilai a_s dapat dinyatakan dalam a_n (n adalah pangkal terhitung dari x dalam polinomial).

Koefisien a_n merupakan konstanta sembarang, dipilih sebagai berikut :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \textbf{; n = 0} \\ \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2} & \textbf{; n = 1; 2; 3; 4 .... (2-14)} \end{cases}$$

pemilihan nilai a_n ini dilakukan agar untuk sembarang polinomial $P_n(x)$; harga $P_n(1) = 1$, sehingga : $a_{n-2} = -\dfrac{(2n-2)!}{2^n (n-1)! - (n-2)!}$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{(2n-4)!}{2^n 2! n-2)!(n-4)!}$$

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}$$

sehingga $P_n(x)$ yang merupakan penyelesaian dari persamaan Legendre bisa dinyatakan secara umum :

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = \frac{(2n-2m)}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \quad \text{.............. (2-15)}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + - \ldots.$$

dengan : $M = \dfrac{n}{2}$ untuk n genap dan $M = \dfrac{n-1}{2}$ untuk n ganjil.

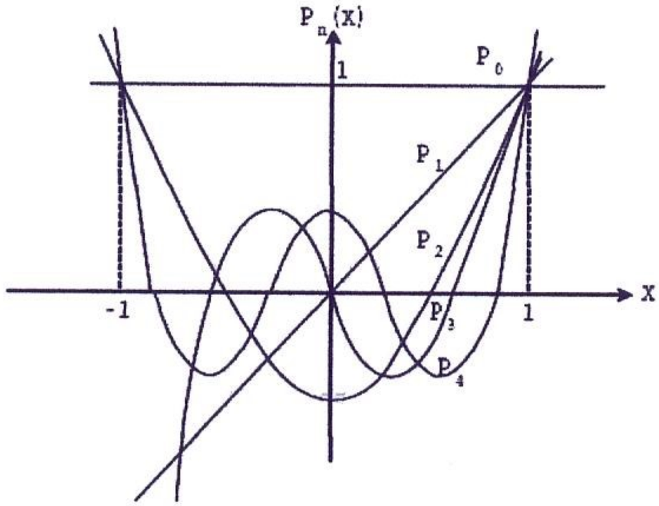
Beberapa polinomial Legendre orde n :

$P_0(x) = 1$ $\qquad\qquad$ $P_1(x) = x$

$P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $\qquad\qquad$ $P_3(x) = \dfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \dfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ $\qquad\qquad$ $P_5(x) = \dfrac{1}{8}(63\, x^5 - 70x^3 + 15x)$

Secara grafis P_n (x) bisa digambarkan sebagai berikut :



Rumus-rumus rekursif untuk polinomial Legendre :

1. $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \, x \, P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$

2. $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n = 1)P_n(x)$

Rumus polinomial Legendre $P_n(x)$ bisa dituliskan dalam bentuk formula Rodrigues sebagai berikut :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \, n!} \frac{d^n}{dx^n} P_{n-1} (x^2 - 1)^n$$

Dua buah polinomial Legendre yang berbeda akan saling tegak lurus pada interval -1 < x <1 ; sehingga :

1. $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$; m # 2

2. $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{1}{2n+1}$

Deret Polinomial Legendre

Jika f(x) memenuhi syarat Dirichet dalam interval -1 < x < 1, maka f(x) bisa diekspansikan kedalam suatu deret Legendre yang berbentuk :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x) = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + \ldots\ldots \quad (2\text{-}16)$$

Syarat Dirichlet untuk deret polonomial Legendre :

1. f(x) terdefinisi dan bernilai tunggal kecuali pada beberapa titik yang jumlahnya berhingga dalam interval (01, 1).
2. f(x) periodik dengan perioda 2
3. f(x) dan f'(x) kontinu bagian demi bagian pada (-1,1) maka deret f(x) = $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$ konvergen ke :
   a. (f(x) jika x titik kontinu.
   b. $\dfrac{f(x^+)+(f(x-)}{2}$; jika x titik diskontinu

Bukti :

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_{-1}^{1} P_m P_k(x)\, dx$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, f(x)\, dx = A_m m \int_{-1}^{1} P^2{}_m(x)\, dx = \frac{2}{2m+1} A_m$$

$$A_m = \frac{2}{2m+1} \int_{-1}^{1} P_m(x)\, f(x)\, dx \qquad (2\text{-}17)$$

Contoh :

$$f(x) = \begin{cases} 1\ ;\ 0 < x < 1 \\ 0\ ;\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

Ekspansikan f(x) ke dalam deret Polinomial Legendre :

Deret polinomial Legendre f(x) = $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$

Ekspansikan

dengan $A_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P_k(x)\, f(x)\, dx$

$$k = 0 \rightarrow A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_0(x)\, f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} 1.1\, dx = \frac{1}{2}$$

$$k = 1 \rightarrow A_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} P_1(x)\, f(x)\, dx = \frac{3}{2} \int_{0}^{1} x.1\, dx = \frac{3}{4}$$

$$k = 2 \rightarrow A_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} P_2(x)\, f(x)\, dx = \frac{5}{2} \int_{0}^{1} \frac{3x^2 - 1}{2}\, dx = 0$$

$$k = 3 \rightarrow A_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^{1} P_3(x)\, f(x)\, dx = \frac{7}{2} \int_{0}^{1} \frac{5x^3 - 30x}{2}\, dx = - \frac{7}{16}$$

$$k = 4 \rightarrow A_4 = \frac{9}{2} \int_{-1}^{1} P_4(x)\, f(x)\, dx = \frac{9}{2} \int_{0}^{1} \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}\, dx = 0$$

$$k = 5 \rightarrow A_5 = \frac{11}{2} \int_{-1}^{1} P_5(x)\, f(x)\, dx = \frac{11}{2} \int_{0}^{1} \frac{63x^5 - 70x^9 + 15x}{2}\, dx = \frac{11}{32}$$

dan seterusnya

$$f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{7}{16} P_3(x) + \frac{11}{32} P_5(x) - + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soal Latihan :

Selesaikan persamaan diferensial berikut :

1. $y'' + 2y' + 4xy = 0$
2. $(1 - x^2)y' = 2xy$
3. $(x + 1)y' - (2x + 3)y = 0$
4. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$
5. Selesaikan PD : $y'' + y = 0$ dengan penderetan disekitar titik $x = 1$

Jawaban :

1. $y = -2 + a_3x^3$
2. $y = a_0(1 + x^2 + x^4 + \dots) = \dfrac{a_0}{1-x^2}$
3. $y = a_0 (1 + 3x + x^2 + \dfrac{10}{3} x^3 + 2x^4 + \dots)$
4. $y = a_1x + a_0 (1 - x^2 - \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{5}x^6 - \dfrac{1}{7}x^8 - \dots.)$
5. $y = a_0(1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} = + \dots) + a_1 (t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} - + \dots) = a_0 \cos$

   $(x - 1) + a_1 \sin (x - 1)$