

TURUNAN TINGKAT TINGGI

Turunan Tingkat Tinggi

Jika f fungsi yang dapat diturunkan, maka turunannya (f') juga berupa fungsi. Jika f' mempunyai turunan, maka turunan f' kita notasikan dengan f'' .

Notasi lain untuk turunan kedua dari $y = f(x)$ adalah

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D^2 f(x).$$

Umumnya turunan ke- n dari $y = f(x)$ dinyatakan dengan

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^{(n)} f(x).$$

Contoh:

a. Carilah $\frac{d^2y}{dx^2}$ dari :

a. $x^2 + y^2 = 25$

b. $y = \ln t, x = e^t$

c. $y = e^{t^2+t}, x = \ln(e^t + 1)$

2. Carilah turunan ke n dari fungsi di bawah ini:

a. $y = e^{kx}$

b. $y = \ln x$

Penyelesaian :

1. Dari contoh sub bab 4.3 telah diperoleh $\frac{dy}{dx}$ dari $x^2 + y^2 = 25$, yaitu $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

$$\text{Karena } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)$$

Dan mengingat y adalah fungsi dari x , dengan aturan pembagian dan aturan rantai, diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{y \cdot \frac{dx}{dx} - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y \cdot 1 - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y \cdot 2 + x^2}{y^3}$$

$$\text{Jadi } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y \cdot 2 + x^2}{y^3}$$

2.a. $y = \ln t, x = e^t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1/t}{e^t} = \frac{1}{te^t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} =$$

Oleh karena $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{te^t}\right)}{dt} = -\frac{e^t + te^t}{t^2 e^{2t}} = -\frac{1+t}{t^2 e^t}$ dan $\frac{dx}{dt} = e^t$ maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{1+t}{t^2 e^t}}{e^t} = -\frac{1+t}{t^2 e^{2t}}.$$

b. $y = e^{t^2+t}, x = \ln(e^t+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(2t+1)e^{t^2+t}}{e^t/(e^t+1)} = (2t+1)(e^t+1)e^{t^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}$$

$$= \frac{2(e^t+1)e^{t^2} + (2t+1)e^{t^2+t} + 2t(2t+1)(e^t+1)e^{t^2}}{e^t/(e^t+1)}$$

$$= 2(e^t+1)^2 e^{t^2-t} + (2t+1)(e^t+1)e^{t^2} + 2t(2t+1)(e^t+1)^2 e^{t^2-t}$$

3. a. $y = e^{kx} \Rightarrow y' = ke^{kx} \Rightarrow y'' = k^2 e^{kx} \Rightarrow y''' = k^3 e^{kx} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = k^n e^{kx}$

b. $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = (-1)\frac{1}{x^2} \Rightarrow y''' = \frac{(-1)^2}{1 \cdot 2x^3} = \frac{(-1)^2}{2!x^3} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n}$