BENTUK EKSPONEN (FORMULA EULER)

REGION DI BILANGAN KOMPLEKS

Fungsi Kompleks
(Bab I. Bilangan Kompleks)
Dra. Retno Marsitin, M.Pd

Bentuk Eksponen (Formula Euler)

Eksponen (formua Euler) dalam bentuk $(cos\theta + i\, sin\theta)$ dapat dinyatakan dengan $e^{i\theta}$ atau $\exp(i\theta)$ yaitu:

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = cos\theta + i\, sin\theta$$

sehingga $z = r(cos\theta + i\, sin\theta)$ dapat ditulis dalam bentuk eksponen/formula Euler:

$$z = re^{i\theta} = r\, exp(i\theta)$$

Operasi Bentuk Eksponen

1. Perkalian dan Pembagian

a. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ b. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, $z_2 \neq 0$ c. $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

2. Pangkat

Hasil kali n bilangan kompleks $z_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k(cos\theta_k + i\ sin\theta_k)$, $k = 1,2,3, \dots, n$ didefinisikan sebagai berikut::

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$$

Apabila $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = re^{i\theta}$ maka:

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n \exp(in\theta)$$
$$z^n = r^n(cos\theta + i\ sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

khusus untuk $r = 1$ diperoleh ***Rumus De Moivre:***

$$(cos\theta + i\ sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Lanjutan Operasi Bentuk Eksponen

3. Penarikan Akar

Penarikan akar adalah kebalikan dari operasi perpangkatan, sehingga $\sqrt[n]{z}\ \ atau\ \ z^{\frac{1}{n}}$ selalu memiliki n harga, bila:

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta), z_0 = r_0(cos\theta + i\ sin\theta)\ dan\ z_0 = z^{\frac{1}{n}}\ \ atau\ \ z_0^n = z$$

maka diperoleh identitas: $r_0^n(\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

sehingga:

$r_0^n = r\ \ atau\ \ r_0 = r^{\frac{1}{n}}\ \ dan\ \ n\theta_0 = \theta + 2k\pi$ atau $\theta_0 = \frac{\theta+2k\pi}{n}, k = 0,1,2, \ldots (n-1)$

secara umum dirumuskan, bila $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2, \ldots (n-1)$$

Catatan: Penyelesaian $z^{\frac{1}{n}} = 1$, akan mendapatkan n titik (penyelesaian) dan membentuk segi n beraturan pada lingkaran satuan.

Contoh dan Penyelesaiaannya

Contoh: Tentukan akar pangkat tiga dari i

Penyelesaian:

Dalam hal ini, berarti menyelesaikan persamaan $z^3 = i$, sehingga menyatakan $z\ dan\ i$ dalam bentuk kutub pada persamaan diatas

$z^3 = i$ sehingga diperoleh: $z_k = \sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}}$

merubah $z = 1 + 0i$ ke bentuk kutub:

$$|z| = \sqrt{1+0} = 1$$

$$\theta = arc\tan\left(\frac{0}{1}\right) = 0 + 2k\pi$$

$$z = 1 + 0i = 1\ (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)$$

sehingga:

$$z_k = \sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), k = 0,1,2$$

untuk $k = 1\ maka\ z_1 = 1\ (\cos 0 + i \sin 0) = 1 + i0$

untuk $k = 2\ maka\ z_2 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

untuk $k = 3\ maka\ z_3 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

Jadi akar pangkat tiga dari i adalah $1 + i0, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\ dan\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

Catatan:

Bila dilukis pada bidang xy maka ketiga titik $z_1, z_2\ dan\ z_3$ membentuk segitiga sama sisi

Secara umum diperoleh realita bahwa penyelesaian $z^{\frac{1}{n}} = 1$ mendapatkan n titik penyelesaian dan membentuk segi n beraturan pada lingkaran satuan

Soal-soal Latihan

1. Hitunglah akar-akar persamaan dari:

   a. $(-1)^{\frac{1}{2}}$ b. $(3i)^{\frac{1}{3}}$ c. $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. Tentukan akar-akar persamaan dari $z^3 + i = 0$

3. Tunjukkan bahwa semua akar pangkat 5 dari $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1-i)^2}$ merupakan titik-titik sudut segilima beraturan dengan salah satu titik sudut $\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}(\sqrt{3} + i)$!

4. Tunjukkan bahwa salah satu nilai $i^{\frac{1}{4}}$ adalah bilangan α dengan $Re(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ dan nilai-nilai yang lain $i\alpha, -\alpha$

5. Jika a dan b akar yang tidak real dari persamaan $z^3 = 1$

   a. Tunjukkan bahwa $a^2 = b$!

   b. Apakah $b = a^2$?

Region di Bidang Kompleks

Dalam uraian ini dibicarakan tentang himpunan bilangan-bilangan kompleks, titik-titik atau hal-hal lain yang berhubungan dengan itu. Beberapa istilah teknis yang perlu diketahui untuk kepentingan pembahasan lebih lanjut sebagai berikut:

a. Neighborhood (lingkungan)

Misal:

z_0 sembarang titik dan r bilangan real positif.

Lingkungan bagi z_0 $(r - neighborhood\ of\ z_0)$ didefinisikan sebagai himpunan titik-titik z dibidang kompleks sedemikian hingga:

$$|z - z_0| < r \text{ ditulis dengan } N_b(z_0, r)\ atau\ \ N(z_0, r)$$

Lingkungan – r terhapus bagi z_0 (*delected r – neighborhood of* z_0) didefinisikan sebagai himpunan titik-titik *z* sedemikian hingga:

$$0 < |z - z_0| < r \text{ ditulis dengan } N_b^*(z_0, r)$$

Jadi $N_b(z_0, r)$ merupakan himpunan semua titik didalam lingkaran termasuk pusatnya z_0, sedangkan $N_b^*(z_0, r)$ merupakan merupakan himpunan semua titik didalam lingkaran kecuali pusatnya z_0

Lanjutan Region di Bidang Kompleks

b. Komplemen, titik dalam, titik luar, titik batas

Dari himpunan S maka komplemen – S adalah himpunan titik-titik selain S.

Titik z_0 disebut titik dalam (*interior point*) dari himpunan S bila neighborhood z_0 hanya memuat titik-titik dari S.

Titik luar (*exterior point*) bila neighborhood z_0 memuat titik-titik bukan dari S.

Bila z_0 bukan salah satu maka disebut titik batas.

Jadi z_0 titik batas (*boundary point*) dari himpunan S bila neighborhood z_0 memuat titik-titik dari S dan titik-titik bukan dari S. Semua titik batas adalah pembatas himpunan S.

Contoh:

- Misal T pita tak hingga yang terdiri dari semua titik z dari $1 < Im(z) \leq 3$ maka batas T adalah dua garis mendatar $y = 1$ bukan milik T dan $y = 3$ yang termasuk dalam T, hal ini berarti T memuat sebagian tapi tidak semua titik batasnya.
- Misal V himpunan semua titik z sedemikian $1 \leq |z - i| \leq 2$ maka V memuat semua titik batas yaitu dua lingkaran $|z - i| = 1$ dan $|z - i| = 2$

Lanjutan Region di Bidang Kompleks

c. Himpunan terbuka dan tertutup

- Himpunan terbuka (*open set*) adalah suatu himpunan yang tidak memiliki titik batas.
- Himpunan tertutup (*closed set*) adalah himpunan yang memiliki semua titik batas.
- Himpunan yang memuat sebagian tapi tidak semua titik batas disebut tidak terbuka dan tidak tertutup

d. Terhubung (connected), domain, region

- Himpunan terbuka (*open set*) S disebut terhubung (*connected*) bila tiap pasang dari titik-titiknya dapat dihubungkan dengan rantai kontinu tak hingga segmen garis yang titik-titiknya selalu terletak pada S.
- Suatu himpunan terbuka dan terhubung disebut *domain* dan Setiap neighborhood yang telah kita kenal adalah domain
- Suatu domain yang bersama-sama dengan semua, bebrapa atau tanpa titik batas membentuk sebuah *region*.
- Suatu region tertutup menujukkan region beserta batasnya.
- Suatu himpunan b disebut terbatas (bounded) jika dapat ditemukan lingkaran $|z| = M$ yang memuat B. Jadi B terbatas bila dapat menemukan bilangan positif M sedemikian hingga $|z| < M$ untuk setiap z dalam himpunan B. Bila ditemukan M sebagaimana diatas maka B disebut tak terbatas (*unbounded*).

Contoh

1. $1 \leq |z| \leq 3$ adalah himpunan terbatas dan berbatas (mempunyai semua titik batas), dapat disebut region.
2. $1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 3$ adalah himpunan tak terbatas dan berbatas disebut himpunan tertutup tapi bukan region tertutup.
3. $\mathrm{Re}(z) > 1$ adalah himpunan tak terbatas dan tidak mempunyai titik batas.
4. Suatu lingkungan atau lingkungan terhapus bagi sembarang titik z merupakan suatu region
5. “Analus melingkar” yang terdiri atas titik-titik z dengan $-2 \leq |z+2| \leq 3$ merupakan region tertutup. Himpunan tersebut terdiri atas region diantara dua lingkaran konsentris $|z+2| = 2$ dan $|z+2| = 3$ dengan batas region yaitu kedua lingkaran tersebut.
6. Penggal sumbu nyata dengan $-2 \leq x \leq 2$ merupakan himpunan tertutup tetapi bukan region tertutup karena terdiri dari satu region berikut batasnya. Perhatikan bahwa himpunan ini terdiri atas seluruhnya titik batas dan tidak memuat titik dalam.