

FUNGSI-FUNGSI ANALITIK & FUNGSI HARMONIK

Fungsi Kompleks
(Bab II. Fungsi-Fungsi Analitik)
Dra. Retno Marsitin, M.Pd

FUNGSI-FUNGSI ANALITIK

Definisi:

- Fungsi $f(z)$ dikatakan analitik di titik z_0 apabila derivative $f'(z)$ ada, tidak hanya di z_0 tapi disembarang neighborhood z_0
- Dari definisi tersebut ada kaitan erat antara diferensiabilitas dan analisis fungsi di suatu titik. Namun keduanya tidak sama karena *analisis fungsi di suatu titik berakibat pada diferensiabilitas tapi tidak sebaliknya.*
- Hal ini dengan alasan bahwa $f'(z)$ bisa ada pada sembarang jenis himpunan, pada segmen garis atau bahkan pada titik terasing tapi analisis harus dalam himpunan terbuka. Pengertian ini berasal dari definisi bahwa analisis di suatu titik z_0 menghendaki $f'(z)$ ada tidak hanya di z_0 tapi disemua titik didalam sembarang neighborhood z_0 , padahal kita tahu neighborhood adalah himpunan terbuka.

LANJUTAN FUNGSI-FUNGSI ANALITIK

- Bila suatu fungsi analitik di semua titik z kecuali z_0 maka z_0 disebut *titik terasing* atau *titik singular*.
- Suatu fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks dinamakan *fungsi menyeluruh* (*entire function*).
- Polinomial $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ merupakan fungsi menyeluruh karena $P'(z)$ ada di setiap titik di bidang kompleks.
- Suatu fungsi yang merupakan hasil bagi dua fungsi menyeluruh dinamakan *fungsi meromorfik*.
- Syarat perlu (*belum berarti cukup*) fungsi f analitik pada domain D adalah kontinu di seluruh D . terpenuhinya syarat PCR perlu tapi belum cukup. Cukupnya syarat bagi keanalitikan fungsi adalah terpenuhinya kaidah-kaidah derivative.
- Penggunaan lain dari kaidah derivative untuk fungsi analitik disuatu domain D adalah:
 - a. Jumlah dan hasil kali dua fungsi analitik adalah analitik
 - b. Hasil bagi dua fungsi analitik adalah analitik sepanjang tidak ada penyebut = nol
 - c. Komposisi dua fungsi analitik adalah analitik

CONTOH

Contoh:

1. Suatu polynomial $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ merupakan suatu fungsi menyeluruh karena $P'(z)$ ada pada semua z
2. Fungsi $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ juga merupakan fungsi menyeluruh
3. Fungsi $f(z) = \frac{z^3 - z + 1}{z^2 + 1}$ merupakan hasil bagi dua fungsi menyeluruh karena pembilang dan penyebut merupakan polinomial. $f'(z)$ ada pada setiap titik kecuali $z \pm i$, karena pada titik tersebut f tidak terdefinisikan, jadi f analitik pada semua z kecuali [ada i dan $-i$

FUNGSI HARMONIK

- Fungsi harmonik pada bilangan kompleks yang memuat variabel kompleks sama dengan pada kalkulus yang memuat variabel real yaitu bila turunan kedua ke x dan ke y memenuhi persamaan Laplace ($f_{xx} + f_{yy} = 0$)
- Apabila fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik pada domain D maka turunan parsial kedua ke x dan ke y dari komponen-komponennya yaitu U_{xx}, U_{yy}, V_{xx} dan V_{yy} memenuhi persamaan laplace.
- Persamaan Laplace $\longrightarrow U_{xx} + U_{yy} = 0$ dan $V_{xx} + V_{yy} = 0$

Apabila diketahui salah satu fungsi harmonik $u(x, y)$ maka dapat diperoleh fungsi-fungsi lainnya $v(x, y)$ sedemikian hingga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik yang secara jelas dapat dikatakan:

$f(z) = U_{xx} + i V_{yy}$ **analitik bila hanya bila** \longrightarrow U dan V harmonik dan memenuhi Persamaan Laplace maka V **sekawam** U

CONTOH & PENYELESAIAN

Contoh:

- Tunjukkan bahwa $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ dengan $f(z)$ merupakan fungsi analitik merupakan fungsi harmonik dan tunjukkan bahwa $u(x, y)$ merupakan sekawan harmonik $v(x, y)$

Penyelesaian:

Diketahui $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$, $f(z)$ merupakan fungsi analitik, sehingga:

$$\begin{array}{l} u = x^2 - y^2 \begin{array}{l} \longrightarrow u_x = 2x \longrightarrow u_{xx} = 2 \\ \searrow u_y = -2y \longrightarrow u_{yy} = -2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} v = 2xy \begin{array}{l} \longrightarrow v_x = 2y \longrightarrow v_{xx} = 0 \\ \searrow v_y = 2x \longrightarrow v_{yy} = 0 \end{array} \end{array}$$

Ternyata diperoleh bahwa: $\rightarrow U_{xx} + U_{yy} = 0$ dan $V_{xx} + V_{yy} = 0 \rightarrow$ sehingga u dan v harmonik

Dari uraian diatas dapat dikatakan bahwa:

- a. Dari dua fungsi harmonik tersebut $v(x, y) = 2xy$ merupakan sekawan harmonik $u(x, y) = x^2 - y^2$
- b. $u(x, y) = x^2 - y^2$ bukan sekawan harmonik $v(x, y) = 2xy$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tunjukkan bahwa $g(z) = \ln r + i\theta$ untuk $z \in E = \{z: z = r \operatorname{cis} \varphi, r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$ analitik pada E . Kemudian tunjukkan bahwa apabila $f(z) = z + 1$ maka $h(z) = g(f(z))$ analitik untuk $z \in D = \{z: \operatorname{Re}(z) > -1\}$.
2. Diberikan $U(x, y) = y^3 - 3x^2y$
 - a. Tunjukkan bahwa $U(x, y)$ merupakan fungsi harmonik
 - b. Tentukan sekawan harmonic $V(x, y)$ sehingga $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ analitik
 - c. Tentukan $f'(z)$
3. Selidiki analitik fungsi $\frac{z^3 - z + 1}{z^2 + 1}$
4. Tunjukkan bahwa komponen nyata dan khayal pada fungsi $f(z) = z^2 + z$ merupakan fungsi harmonik.
5. Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ merupakan fungsi menyeluruh (*entire function*)!