INDUKSI MATEMATIKA

Kartika Sari

INDUKSI MATEMATIKA

Misalkan beberapa perangkat kartu domino dalam posisi vertikal disusun ke samping seperti gambar di bawah. Jika domino dengan nomor 1 disentil , maka domino berikutnya juga ikut

Ide pembuktian melalui Induksi matematika dapat diambil dari sini, yaitu bahwa apbila domino pertama atau yang paling ujung disentil, maka semua domino akan ikut tersentil.

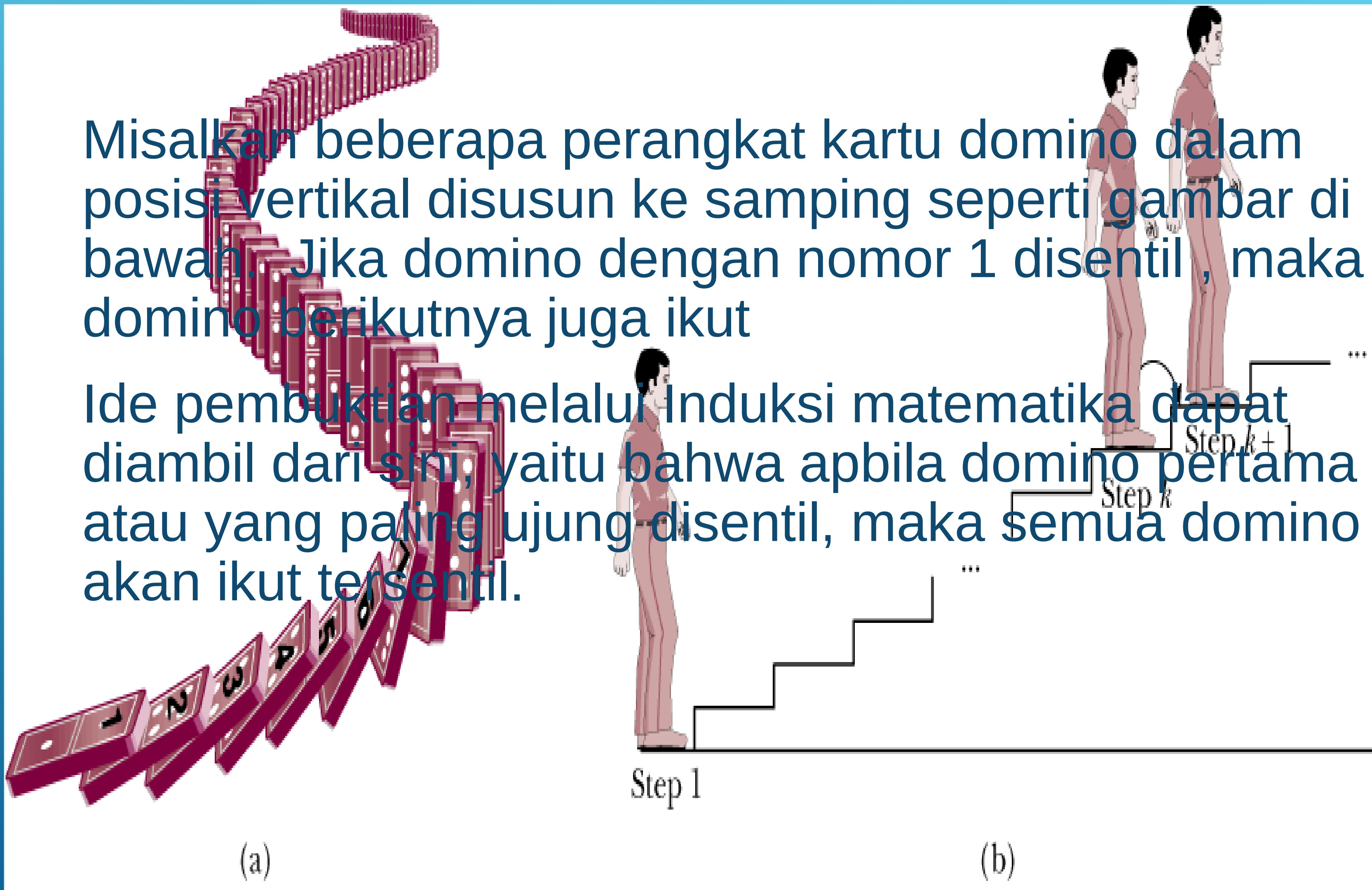

FIGURE 2.1

PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA

Misalkan diberikan pernyataan P(*n*) dengan n bilangan asli.

Salah satu metode untuk membuktikan pernyataan P(n) benar untuk setiap bilangan asli n adalah dengan induksi matematika, yang langkah-langkahnya:

- **Basis Induksi:** Tunjukkan bahwa P(1) benar
- **Hipotesis Induksi:** Asumsikan P(*n*) benar untuk suatu bilangan asli n = k > 1
- **Langkah Induksi:** Buktikan bahwa P(*k*+1) benar, *yaitu Buktikan* $P(i) \Rightarrow P(i+1)$

Contoh 1

Tunjukkan bahwa jumalah *n* bilangan ganjil pertama adalah $n^{2.}$

Hal ini ekuivalen dengan menunjukkan

$$\forall n \;\; \mathrm{P}(n) \text{ dengan } \mathrm{P}(n) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 == n^2$$

Basis Induksi: Tunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} 2(i) - 1 = 1^{2} = 1$$

Hipotesis induksi: Asumsikan P(k) benar , yaitu berlaku

$$\sum_{i=1}^{k} 2i - 1 == k^2$$

Catatan: Kita belum tahu ini benar atau tidak

Langkah Induksi: tunjukkan P(*k*+1) benar, atau tunjukkan bahwa berlaku

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2i - 1 == (k+1)^2$$

Bukti untuk Langkah Induksi::

$$RuasKiri = \sum_{i=1}^{k+1} 2i - 1$$

$$= 2(k+1) - 1 + \sum_{i=1}^{k} 2i - 1$$

$$= 2(k+1) - 1 + k^2$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Perhatikan Prinsip Induksi:

Basis Induksi: P(1)

Jika P(*k*) benar, maka P(*k*+1) benar, yaitu P(*k*) ⇒ P(*k*+1)

Logika berfikir:

Pertama kita tunjukkan P(1) benar

Karena berlaku P(*k*) benar ⇒ P(*k*+1) benar, maka

Jika P(1) benar , maka P(2) benar

Jika P(2) benar , maka P(3) benar

Jika P(3) benar , maka P(4) benar

Jika P(4) benar , maka P(5) benar

Demikian seterusnya, berlaku sampai n tak hingga

Jadi dapat disimpulkan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan asli *n*

Dengan kata lain berlaku

$$\left[\mathrm{P}(1) \wedge \forall k \left(\mathrm{P}(k) \rightarrow \mathrm{P}(k+1)\right)\right] \rightarrow \forall n\, \mathrm{P}(n)$$

Dengan demikian langkah-langkah induksi matematika:

1. Tunjukkan basis induksi
2. Tunjukkan hipotesis induksi
3. Manipulasi langkah induksi sedemikian sehingga informasi hipotesis induksi dapat digunakan untuk pembuktian pada langkah induksi

Contoh 2

Tunjukkan bahwa jumlah *n* bilangan genap positif adalah $n^2 + n$.

Pernyataan jumlah n bilangan genap positif adalah $n^2 + n$, secara matematis dapat ditulis sebagai

$$\forall n \, P(n) \text{ where } P(n) = \sum_{i=1}^{n} 2i == n^2 + n$$

Bukti

Basis Induksi:

$$\text{Ruas kiri} = \mathrm{P}(1) = \sum_{i=1}^{1} 2(i) = 2 = 1^2 + 1 = \text{ ruas kanan}$$

- Hipotesis Induksi: Asumsikan $$\mathrm{P}(k) = \sum_{i=1}^{k} 2i == k^2 + k$$

- Langkah Induksi: Tunjukkan bahwa

$$\mathrm{P}(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} 2i == (k+1)^2 + (k+1)$$

Bukti

$$\text{Ruas kiri} = \sum_{i=1}^{k+1} 2i = \sum_{i=1}^{k} 2i + 2(k+1)$$

$$= k^2 + k + 2k + 2$$

$$= k^2 + 2k + 1 + k + 1$$

$$= (k+1)^2 + (k+1)$$

$$= \text{ Ruas Kanan}$$

Terbukti pernyataan benar untuk semua bilangan asli n. ♦

Contoh 3

Buktikan $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bukti

Basis Induksi

$$\text{Ruas Kiri} = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$$

$$\text{Ruas Kanan} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = \text{ Ruas Kanan}$$

Hipotesis Induksi : Diasumsikan

:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Langkah induksi

Tunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

Bukti

$$\text{Ruas Kiri} = \sum_{i=1}^{k+1} i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(k(2k+1) + 6(k+1))$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(2k^2 + k + 6k + 6) = \frac{(k+1)}{6}(2k^2 + 7k + 6)$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(2k+3)(k+2) = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$= \text{Ruas Kanan}$$

Induksi Kuat

Weak mathematical induction mengasumsikan P(*k*) benar, dan menggunakannya untuk menunjukkan P(*k*+1) benar

Strong mathematical induction mengasumsikan P(1), P(2), …, P(*k*) semuanya benar, dan menggunakannhya untuk menunjukkan P(*k*+1) benar.

Atau secara matematis dapat ditulis sebagai

$$\left[\mathrm{P}(1) \wedge \mathrm{P}(2) \wedge \mathrm{P}(3) \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}(k)\right] \rightarrow \mathrm{P}(k+1)$$

TERIMA KASIH