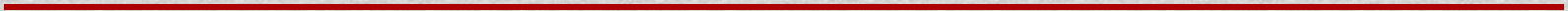


ALGORITMA PEMBAGIAN



Jika diberikan 2 bilangan 3 dan 13, maka terdapat bilangan 4 dan 1 sedemikian sehingga $13 = 3 \dots + \dots$

Jika diberikan 2 bilangan 3 dan -13, maka terdapat bilangan -5 dan 2 sedemikian sehingga $-13 = (-5)3 + 2$.

Motivasi

Jika diberikan 2 bilangan -3 dan 13, maka terdapat bilangan -4 dan 1 sedemikian sehingga $13 = (-4)(-3) + 1$.

Jika diberikan 2 bilangan -3 dan -13, maka terdapat bilangan 5 dan 2 sedemikian sehingga $-13 = 5(-3) + 2$

Motivasi

Jika diberikan 2 bilangan 0 dan 4,
maka tidak terdapat bilangan bulat
 q dan r sehingga $4 = q(0) + r$,
dengan $r < 0$

Motivasi

Jika $a \neq 0$ dan b sebarang bilangan bulat, maka terdapat dengan tunggal bilangan bulat q dan r , dengan $0 \leq r < |a|$ sedemikian sehingga berlaku $b = qa + r$. Selanjutnya, q dinamakan hasil bagi dan r dinamakan sisa pembagian.

Teorema 3.1 (Algoritma Pembagian)

Diperhatikan barisan

$$\dots, b-2a, b-a, b, b+a, b+2a, \dots$$

Misalkan r bilangan bulat non negatif terkecil dalam barisan di atas, maka terdapat bilangan bulat q yang memenuhi $r = b - qa$.

Bukti Teorema 3.1

Karena $b - qa - |a|$ berada dalam barisan dan $b - qa$ bilangan bulat non negatif terkecil dalam barisan tersebut, maka $b - qa - |a| < 0$. Akibatnya $r < |a|$. Karena juga berlaku $r \geq 0$, maka $0 \leq r < |a|$.
Terbukti keberadaan bilangan bulat q dan r .

Lanjutan Bukti Teorema 3.1


Selanjutnya, akan dibuktikan ketunggalan q dan r . Andaikan q dan r tidak tunggal, yaitu terdapat q_1, q_2, r_1 dan r_2 yang memenuhi $b = q_1 a + r_1$ dan $b = q_2 a + r_2$. Oleh karena itu, diperoleh

$$(q_1 - q_2) a + (r_1 - r_2) = 0$$

Lanjutan Bukti Teorema 3.1

Dari sini diperoleh bahwa $r_1 - r_2 = ka$,
untuk suatu bilangan bulat k . Di lain pihak
berlaku $r_1 - r_2 \in (-|a|, |a|)$. Oleh karena itu,
haruslah berlaku $r_1 - r_2 = 0$ atau $r_1 = r_2$.
Akibatnya $q_1 - q_2 = 0$ atau $q_1 = q_2$.
Kontradiksi. Jadi seharusnya keberadaan q
dan r tunggal adanya. ♦

Lanjutan Bukti Teorema 3.1



Himpunan semua bilangan bulat \mathbb{Z} , terpartisi menjadi n himpunan bagian, sesuai dengan sisa atas pembagian oleh suatu bilangan bulat positif n .

Akibat Algoritma Pembagian

$Z = A \cup B$, dengan

$$A = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \} = 2\mathbb{Z}$$

$$B = \{ \dots, -5, -3, -1, 1, 3, \dots \} = 2\mathbb{Z} + 1$$

Contoh Akibat Algoritma Pembagian

Misalkan bilangan-bilangan 1059, 1417 dan 2312 dibagi oleh $d > 1$ memberikan sisa yang sama, namakan r . Tentukan dari $d - r$!

Contoh 3.1

Petunjuk: Berdasarkan yang diketahui, terdapat q_1 , q_2 dan q_3 , yang memenuhi $1059 = q_1 d + r$; $1417 = q_2 d + r$ dan $2312 = q_3 d + r$.

Jawaban: 15

Penyelesaian

Referensi

Santos, David A., 2007, *Number Theory Book for Mathematical Contest*, GNU Free Documentation Licence.



TERIMA KASIH
