Teorema Dasar Aritmatika

- Teorema 1

Setiap bilangan bulat yang > 1 adalah hasil kali bilangan-bilangan prima.

Bukti

Diambil sebarang bilangan bulat $n > 1$. Jika n prima, bukti selesai. Jika n komposit, maka n mempunyai pembagi sejati terkecil , yang tentunya berada di antara n dan 1, namakan q_1. Dengan demikian terdapat bilangan bulat k_1 sehingga berlaku $n = q_1k_1$. Andaikan q_1 tidak prima, maka terdapat faktor dari q_1 selain dirinya sendiri dan 1. Akan tetapi hal ini kontradiksi dengan pernyataan q_1 faktor terkecil dari n. Oleh karena itu q_1 bilangan prima. Jika k_1 bilangan prima, maka bukti selesai.

Jika k_1 bilangan komposit, maka k_1 mempunyai faktor terkecil selain 1, namakan q_2 . Seperti sebelumnya, tentunya q_2 merupakan bilangan prima. Oleh karena itu terdapat bilangan bulat k_2, sehingga $n = q_1 q_2 k_2$ dengan $1 < k_2 < k_1 < n$. Jika k_2 prima, bukti selesai. Jika k_2 komposit, maka k_2 mempunyai faktor prima terkecil, demikian seterusnya. Karena n suatu bilangan bulat positif tertentu, maka sebelum n langkah terdapat $s < n$, sehingga $n = q_1 q_2 \ldots q_{s-1} q_s$, dengan q_1 , q_2 ,... , q_s bilangan-bilangan prima.♦

Berdasarkan Teorema 1, maka n dapat dinyatakan dalam faktorisasi prima sebagai berikut

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m},$$

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_m; a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_m > 0$$

Dengan p_j bilangan prima dan a_j bilangan bulat positif, j = 1, 2, 3, ..., m.

Faktorisasi dari n semacam ini dinamakan faktorisasi kanonik dari n.

Teorema Dasar Aritmetika

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai hasil kali faktor-faktor prima tepat dengan satu cara (urutan faktor-faktornya bisa berbeda)

Bukti

Diambil sebarang bilangan bulat positif $n > 1$. Akan ditunjukkan n mempunyai faktorisasi kanonik tunggal. Andaikan faktorisasi kanonik dari n tidak tunggal. Dengan demikian

(i) $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m} = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \ldots q_n^{b_n}$

dengan

$$a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$$

$p_1, p_2, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ bilangan2 prima

Karena p_1 faktor dari n, maka $p_1 | q_1^{b_1} q_2^{b_2} \ldots q_n^{b_n}$

p_1 habis membagi salah satu dari q_j . Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum misalkan p_1 habis membagi q_1 . Karena p_1 dan q_1 prima, maka $p_1 = q_1$. Dengan cara yang sama diperoleh $p_2 = q_2$. Demikian seterusnya, diperoleh $n = m$

Selanjutnya, andaikan $a_j < b_j$ untuk suatu j, maka apabila kedua ruas persamaan (i) dibagi $p_j^{a_j}$

Diperoleh

$$p_1^{a_1} \dots p_{j-1}^{a_{j-1}} p_{j+1}^{a_{j+1}} \dots p_m^{a_m} = p_1^{b_1} \dots p_j^{b_j - a_j} q_n^{b_n}$$

Terjadi kontradiksi. Demikian juga bila $a_j > b_j$, terjadi hal yang sama. Oleh karena itu, seharusnya dan $a_j = b_j$ untuk setiap j. Hal ini berarti faktorisasi kanonik dari n tunggal adanya. ♦

Berdasarkan Teorema Dasar Aritmatika, apabila *a* dan *b* secara berturut-turut mempunyai faktorisasi prima $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m}$ dan $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_m^{b_m}$ (tentunya mungkin terdapat suatu $a_k = 0$ atau $b_l = 0$) maka

$$(a,b) = p_1^{\min(a_1,b_1)} p_2^{\min(a_2,b_2)} \ldots p_1^{\min(a_s,b_s)}$$

$$[a,b] = p_1^{maks(a_1,b_1)} p_2^{maks(a_2,b_2)} \ldots p_1^{maks(a_s,b_s)}$$

Ada tiga kemungkinan hubungan antara a_j dan b_j untuk setiap j, yaitu $a_j > b_j$, $a_j < b_j$ dan $a_j = b_j$

Jika $a_j > b_j$, maka

$$\text{maks}\ (a_j\ ,\ b_j) + \min\ (a_j\ ,\ b_j) = a_j + b_j$$

Jika $a_j < b_j$, maka

$$\text{maks}\ (a_j\ ,\ b_j) + \min\ (a_j\ ,\ b_j) = b_j + a_j = a_j + b_j$$

Jika $a_j = b_j$, maka

$$\text{maks}\ (a_j\ ,\ b_j) + \min\ (a_j\ ,\ b_j) = a_j + a_j = a_j + b_j$$

Oleh karena itu

$$a.b = p_1^{a_1+b_1} p_2^{a_2+b_2} \dots p_s^{a_s+b_s}$$

$$= p_1^{maks(a_1,b_1)+\min(a_1,b_1)} p_2^{maks(a_2,b_2)+\min(a_2,b_2)} \dots$$

$$p_s^{maks(a_s,b_s)+\min(a_s,b_s)}$$

$$= p_1^{maks(a_1,b_1)} p_2^{maks(a_2,b_2)} \dots p_s^{maks(a_s,b_s)} .$$

$$, \quad p_1^{\min(a_1,b_1)} p_2^{\min(a_2,b_2)} \dots p_s^{\min(a_s,b_s)}$$

$$= [a,b](a,b) = (a,b)[a,b]$$

Contoh 1

Diberikan polinom

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

dengan koefisien-koefisien bulat dan $P(x)$ bernilai 7 untuk 4 bilangan bulat x yang berbeda. Buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat x yang mengakibatkan $P(x)$ bernilai 14!

Penyelesaian

Diketahui $p(a_k) = 7$ dengan k = 1, 2, 3, 4 dan $a_i \neq a_j$ untuk setiap $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Oleh karena itu,

$p(a_k) - 7 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3))(x - a_4)q(x)$

; q polinom dengan koefisien-koefisien bulat.

Sekarang, andaikan terdapat bilangan bulat m , yang mengakibatkan $p(m) = 14$. Hal ini berarti $p(m) - 7 = 7$

Akibatnya

$$
\begin{aligned}
7 &= p(m) - 7 \\
&= (m - a_1)(m - a_2)(m - a_3)\ )(m - a_4)q(x)
\end{aligned}
$$

Padahal 7 hanya mungkin diuraikan dalam perkalian 3 bilangan bulat yang berbeda, yaitu

7 = -1.1.(-7). Kontradiksi. ♦

Contoh 2

Buktikan bahwa hasil kali 3 bilangan bulat berurutan yang tak nol tidak pernah berupa bentuk pangkat sempurna (maksudnya kuadrat sempurna atau pangkat tiga sempurna)

Penyelesaian:

Misalkan bilangan tersebut $(n-1)n(n+1) \neq 0$, maka $(n-1)n(n+1) = (n^2 - 1)n$. Jelas n tidak habis membagi $(n^2 - 1)$.

Oleh karena itu, $n^2 - 1$ dan n relatif prima. Andaikan hasil kali tiga bilangan tersebut merupakan bentuk pangkat k sempurna ($k > 1$). Berdasarkan Teorema Dasar Aritmatika, $n^2 - 1$ dan n berbentuk pangkat k sempurna. Akibatnya $n^2 - 1$ dan n^2 merupakan 2 bentuk pangkat k berurutan. Kontradiksi. ♦

Contoh 3

Buktikan bahwa bentuk (ii)

$$m^5 + 3m^4 n - 5m^3 n^2 - 15m^2 n^3 + 4mn^4 + 12n^5$$

Tidak pernah sama dengan 33.

Penyelesaian

Diperhatikan bahwa

$$m^5 + 3m^4 n - 5m^3 n^2 - 15m^2 n^3 + 4mn^4 + 12n^5$$

$= m^4 (m + 3n) – 5m^2n^2 (m + n) + 4n^4 (m + 3n)$

$= (m^4 – 5m^2n^2 + 4n^4)(m + 3n)$

$= (m^2 – n^2)(m^2 –4n^2)(m + 3n)$

$= (m – 2n)(m - n)(m + 3n))(m + n) (m + 2n)$

Lanjutan Contoh 3

Jika $n = 0$, maka bentuk (ii) menjadi m^5 . Tidak ada bilangan bulat m yang mengakibatkan m^5 bernilai 33.

Jika $n \neq 0$, maka bentuk (ii) merupakan hasil kali 5 bilangan bulat yang berbeda. Bentuk (ii) tidak mungkin bernilai 33, karena 33 hanya bisa dinyatakan dengan hasil kali maksimal 4 bilangan bulat yang berbeda, yaitu (-11)3(1)(-1)