Definisi 7.1

- Suatu fungsi dari peubah acak yang teramati, $T = \ell(X_1, \dots, X_n)$, yang tidak bergantung pada parameter yang tidak diketahui, disebut statistik.

Pada definisi 1, huruf ℓ adalah fungsi yang diterapkan pada $X_1, \dots, X_n$ untuk mendefinisikan statistic, yang dinotasikan oleh huruf kapital T.

Contoh 7.1

- Misal $X_1, \ldots, X_n$ menyatakan suatu sampel acak dari suatu populasi dengan fungsi densitas peluang $f_X(x)$. Rata-rata sampel merupakan salah satu contoh statistik yang didefinisikan oleh fungsi $\ell(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Statistik ini biasanya dinotasikan oleh :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Apabila suatu sampel acak teramati, maka nilai $\bar{X}$ dihitung dari data yang biasanya dinotasikan oleh $\bar{x}$.

Teorema 7.1

Jika $X_1, \ldots, X_n$ menyatakan suatu sampel acak dari $f_X(x)$ dengan $E(X) = \mu$ dan $\text{var}(X) = \sigma^2$, maka

$$E(\overline{X}) = \mu$$

dan

$$\text{var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

PEMBUKTIAN :

Untuk menunjukkan persamaan $E(\overline{X}) = \mu$,maka akan digunakan sifat-sifat nilai harapan sampel acak.

$$
\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(E(X_1) + \cdots + E(X_n)\right)
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan $\mathrm{var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, digunakan sifat-sifat varians untuk sampel acak , yakni $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, var(X_i)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(\overline{X}) &= \mathrm{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\,\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\,(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\,(X) \\
&= \frac{1}{n^2}\, n\,\mathrm{var}(X) \\
&= \frac{1}{n}\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Contoh 7.2

Fungsi $\ell(x_1, \dots, x_n) = \left[(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right]/(n - 1)$ ketika diterapkan pada data bersesuaian dengan varians sampel. Lebih khusus lagi hal ini dinyatakan sebagai

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}$$

Teorema 7.2

Jika $X_1, \dots, X_n$ menyatakan suatu sampel acak berukuran n dari $f_X(x)$ dengan $E(X) = \mu$ dan var$(X) = \sigma^2$, maka

$$E(S^2) = \sigma^2$$

Dan

$$\operatorname{var}(S^2) = \frac{(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1})\sigma^4}{n}, \qquad n > 1$$

7.2 Distribusi-distribusi Pengambilan Sampel

Statistik juga merupakan suatu peubah acak, distribusi yang bergantung pada distribusi suatu sampel acak dengan bentuk fungsi $\ell(x_1, \ldots, x_n)$. Distribusi dari suatu statistik disebut distribusi turunan (*derived distribution*) atau distribusi pengambilan sampel (*sampling distribution*).

KESIMPULAN :

Distribusi pengambilan sampel : Distribusi dari suatu statistik

7.2.1 Kombinasi Linear Peubah-peubah Normal

Teorema 7.3. Jika $X_i \sim N(\mu_i, {\sigma_i}^2), i = 1, \ldots, n$ menyatakan peubah normal bebas maka

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\, {\sigma_i}^2\right)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i \mu_i t + a_i^2 t^2 \sigma_i^2 / 2) \\ &= \exp\left(t \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 / 2\right), \end{aligned}$$

7.2.2 Distribusi Khi Kuadrat

Misal suatu distribusi Gamma khusus dengan $\theta = 2$ dan $\kappa = v/2$. Peubah acak Y dikatakan berdistribusi khi kuadrat (*chi-square*) dengan derajat kebebasan v jika $Y \sim GAM(2, \frac{v}{2})$, dinotasikan sebagai

$$Y \sim X^2(v)$$

7.2.2 Distribusi Khi Kuadrat

Teorema 7.4. Jika $Y \sim X^2(v)$, maka

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-v/2},$$

$$E(Y^r) = 2^r \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}+r\right)}{\Gamma(v/2)},$$

$$E(Y) = v,$$

dan

$$Var(Y) = 2v$$

Bukti :

Mengingat $Y \sim \text{GAM}(2, v/2)$, Sehingga untuk $\theta = 2$ dan $\kappa = v/2$

$$(1 - \theta t)^{-\kappa} = M_Y(t) = (1 - 2t)^{-v/2}.$$

Jika $X \sim \text{GAM}(\theta, \kappa)$ maka

$$\text{E}(X^r) = \theta^r \frac{\Gamma(\kappa + r)}{\Gamma(\kappa)}.$$

Untuk $\theta = 2$ dan $\kappa = v/2$, ekspektasi ke-r menjadi

$$\text{E}(Y^r) = 2^r \frac{\Gamma(v/2 + r)}{\Gamma(v/2)}.$$

$\text{E}(X) = \theta\kappa$. Dengan demikian,

$$\text{E}(Y) = 2(v/2) = v.$$

$\text{var}(X) = \theta^2\kappa$. Sehingga, untuk $\theta = 2$ dan $\kappa = v/2$

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= 2^2(v/2) \\ &= 4(v/2) \\ &= 2v. \end{aligned}$$

Teorema 7.5. Jika $Y \sim GAM(\theta, \kappa)$, maka $Y = \frac{2X}{\theta} \sim x^2(2\kappa)$

Bukti :

Akan digunakan teknik fungsi pembangkit momen untuk menentukan distribusi dari $Y = 2X/\theta$.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{2X/\theta}(t) \\ &= M_X(2t/\theta) \\ &= (1-2t)^{-2\kappa/2}, \end{aligned}$$

Teorema 7.6. Jika $Y \sim {x_{v_i}}^2$; $i = 1, \dots, n$ adalah peubah-peubah acak khi kuadrat yang bebas, maka

$$V = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim x^2 \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right)$$

Bukti :

Akan digunakan teknik fungsi pembangkit momen untuk menentukan distribusi dari V.

$$\begin{aligned} M_V(t) &= M_{\sum_{i=1}^n Y_i}(t) \\ &= (1-2t)^{-v_1/2}\cdots(1-2t)^{-v_n/2} \\ &= (1-2t)^{-\sum_{i=1}^n v_i/2}, \end{aligned}$$

yang merupakan fungsi pembangkit momen dari $\chi^2\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)$.

Teorema 7.7. Jika Z $\sim N(0,1)$, maka $Z^2 \sim x^2(1)$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
M_{Z^2}(t) &= E(e^{tZ^2}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tz^2 - z^2/2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2(1-2t)/2}\, dz \\
&= (1-2t)^{-1/2},
\end{aligned}
$$

yang merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi khi kuadrat dengan derajat kebebasan satu, yakni $\chi^2(1)$.

Korolari 2. Jika $X_1, \ldots, X_n$ menyatakan suatu sampel acak dari $N(\mu, \sigma^2)$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim x^2(n),$$

dan

$$\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim x^2(1)$$

Teorema 7.8. Jika $X_1, \ldots, X_n$ menyatakan suatu sampel acak dari $N(\mu, \sigma^2)$, maka

1. Statistik $\bar{X}$ dan suku-suku $X_i - \bar{X}\ ; i = 1, \ldots, n$ addalah saling bebas.
2. Statistik $\bar{X}$ dan S^2 saling bebas.
3. Kuantitas $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim x^2(n-1)$.

DISTRIBUSI t

Distribusi *student t*

- Untuk sampel n ukuran n $\geq$ 3, taksiran σ^2 dapat diperoleh dengan menghitung nilai S2. Bila n $\geq$ 30, maka S^2 memberikan taksiran σ^2 yang baik dan tidak berubah dan distribusi statistik $(\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ masih secara hampiran, berdistribusi sama dengan peubah normal baku z.

- Bila ukuran sampel ($n < 30$), nilai S^2 berubah cukup besar dari sampel ke sampel dan distribusi peubah acak $(\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ tidak lagi distribusi normal baku.

Dalam hal ini didapatkan distribusi statistik yang disebut T

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

- Distribusi sampel T di dapat dari anggapan bahwa sampel acak berasal dari populasi normal.

$$T = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V(n-1)}}$$

Dengan ,

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Berdistribusi normal baku,dan

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

- Misalkan Z peubah acak normal baku dan V peubah acak khi-kuadrat dengan derajat kebebasan v. Bila z dan v bebas, maka distribusi peubah acak T, bila

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/v}}$$

Diberikan oleh,

$$h(t) = \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{\Gamma(v/2)\sqrt{\pi v}}\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}$$

Ini di kenal dengan nama distribusi t dengan derajat kebebasan v

Jika $T \sim t(v)$, maka untuk $v > 2r$,

$$E(T^{2r}) \qquad = \frac{\Gamma(\frac{2r+1}{2})\Gamma(\frac{v-2r}{2})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\frac{v}{2})} v^r$$

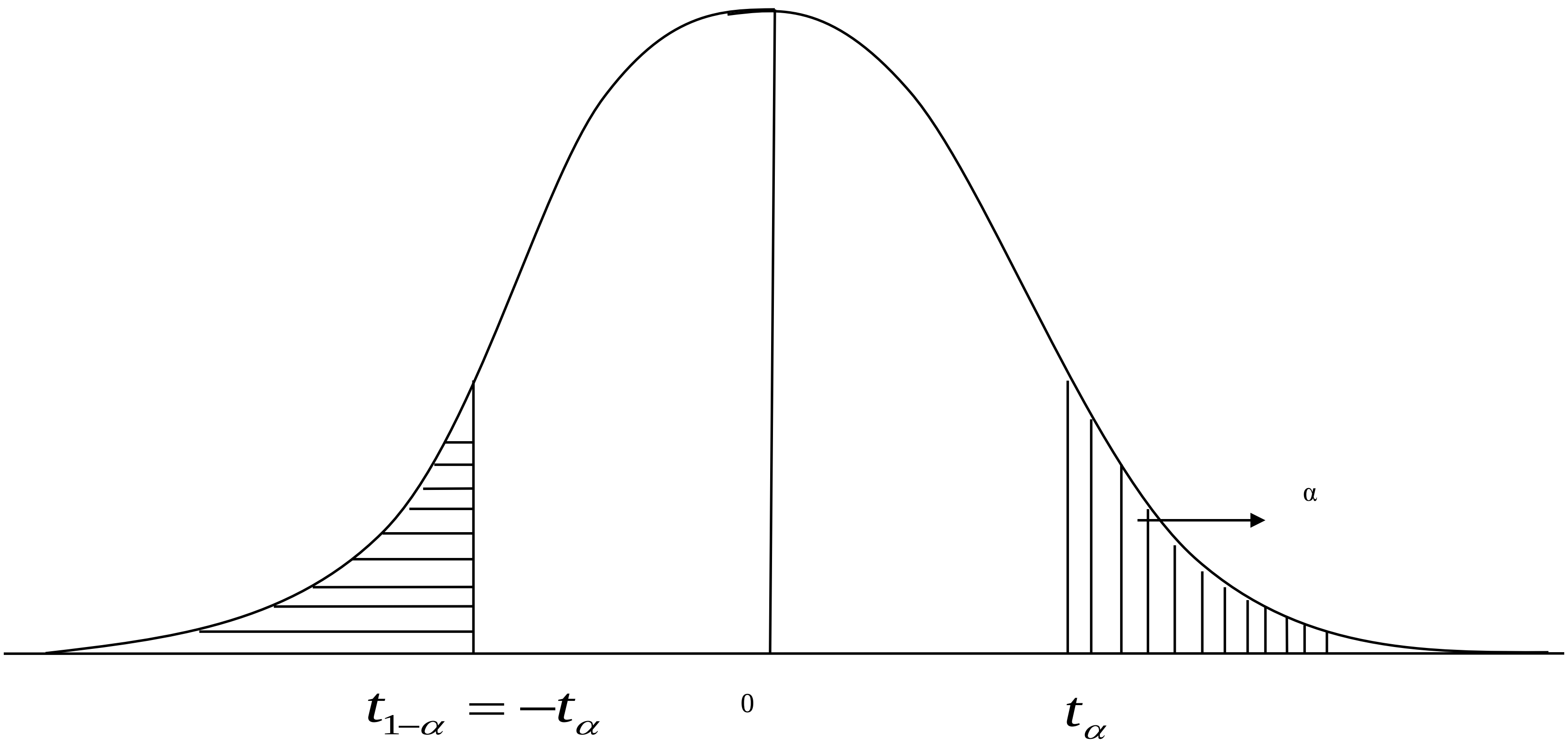
$$E(T^{2r-1}) = 0, \qquad r = 1,2, \dots;$$

$$var(T) = \frac{v}{v-2}, \qquad 2 < v$$

Jika $X_1, \dots, X_n$ menyatakan sampel acak dari $N(\mu, \sigma^2)$, maka

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

- Distribusi Z dan T berbeda karena variansi T bergantung pada ukuran sampel n dan variansi ini selalu lebih besar dari 1. Hanya bila ukuran sampel $n \to \infty$ kedua distribusi menjadi sama. Pada gambar dibawah diperlihatkan hubungan antara distribusi normal baku $(v = \infty)$ dan distribusi t untuk derajat kebebasan 2 dan 5


α
$t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$
0
t_{α}

- Karena distribusi t setangkup terhadap rataan nol, maka $t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$;

yaitu, nilai t yang luas sebelah kanannya $1 - \alpha$, atau luas sebelah kirinya α, sama dengan minus nilai t yang luas bagian kanannya α.

Panjang selang nilai t yang dapat diterima tergantung pada bagaimana pentingnya μ. Bila μ ingin ditaksir dengan ketelitian yang tinggi, sebaiknya digunakan selang yang lebih pendek seperti $-t_{0,05}$ sampai $t_{0,05}$.

Contoh soal

Suatu pabrik bola lampu yakin bahwa bola lampunya akan tahan menyala rata – rata selama 500 jam. Untuk mempertahankan nilai tersebut, tiap bulan diuji 25 bola lampu. Bila nilai t yang dihitung terletak antara $-t_{0,05}$ dan $t_{0,05}$ maka pengusahan pabrik tadi akan mempertahankan kenyakinannya. Kesimpulan apa yang seharusnya dia ambil dari sampel dengan rataan $\bar{x} = 518$ jam dan simpangan baku s = 40 jam? Anggap bahwa distribusi waktu menyala, secara hampiran, noramal.

Penyelesaian:

Dari tabel 5 diperoleh $t_{0,05} = 1{,}711$ untuk derajat kebebasan 24. Jadi pengusaha tadi akan puas dengan keyakinananya bila sampel 25 bola lampu memberikan nilai t antara -1,711 dan 1,711. Bila memang $\mu = 500$, maka

$$t = \frac{518 - 500}{40/\sqrt{25}} = 2{,}25$$

- Suatu nilai yang cukup jauh di atas 1,711. Peluang mendapat nilai t, dengan derajat kebebasan v = 24, sama atau lebih besar dari 2,25, secara hampiran adalah 0,02. Bila $\mu > 500$, nilai t yang di hitung dari sampel akan lebih wajar. Jadi pengusaha tali kemungkinan besar akan menyimpilkan bahwa produksinya lebih nbaik daripada yang diduganya semula

Distribusi Snedecor F

Definisi

- **Salah satu distribusi yang terpenting dalam statistika terapan adalah distribusi F. Distribusi probabilitas Snedecor F diturunkan dari distribusi probabilitas normal baku melalui distribusi khi-kuadrat. Distribusi probabilitas Snedecor F merupakan perbandingan dua distribusi khi-kudrat yang bebas dalam bentuk**

$$\boxed{F = \frac{\dfrac{\chi^2_{\nu_A}}{\nu_A}}{\dfrac{\chi^2_{\nu_B}}{\nu_B}}}$$

Teorema

- Jika peubah-peubah acak dan saling bebas maka distribusi peubah acak

$$\boxed{F = \frac{\dfrac{\chi^2_{\nu_A}}{\nu_A}}{\dfrac{\chi^2_{\nu_B}}{\nu_B}}}$$

- Berdistribusi Snedecor F dengan derajat kebebasan V_A dan V_B, dinotasikan $F(V_A, V_B)$, dengan fungsi densitas peluang untuk $x > 0$

$$\boxed{f(F) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_A}{2} + \dfrac{\nu_B}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_A}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_B}{2}\right)} \nu_A^{\frac{\nu_A}{2}} \nu_B^{\frac{\nu_B}{2}} \frac{F^{\frac{\nu_A}{2}-1}}{(\nu_A F + \nu_B)^{\frac{\nu_A}{2}+\frac{\nu_B}{2}}}}$$

Bukti Teorema

$$v = \begin{vmatrix} \left({}^{v_a}\!/\!{}_{v_b} \right) w & \left({}^{v_a}\!/\!{}_{v_b} \right) f \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{v_a}{v_b} w$$

Transformasi ini satu - satu. Memetakan titik ke himpunan . Dengan menggunakan teorema 6.4 diperoleh distribusi peluang gabungan F dan W.

Lanjutan Bukti

$$g(f,w)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{(v_a+v_b)/2}\Gamma\left(v_a/2\right)\Gamma\left(v_b/2\right)}\left(\dfrac{v_a fw}{v_b}\right)^{v_a/2-1} w^{v_b/2-1}e^{-\left(w/2\right)\left(\left(v_a f/v_b\right)+1\right)\frac{v_a w}{v_b}}, & 0<f<\infty, 0<w<\infty\\ 0, lainya \end{cases}$$

- Distribusi F kemudian diperoleh dengan mengambil distribusi pias.

$$h(f)=\int_0^\infty g(f,w)dw$$

$$=\frac{\left(v_a/v_b\right)^{v_a/2} f^{v_a/2-1}}{2^{(v_a+v_b)/2}\Gamma\left(v_a/2\right)\Gamma\left(v_b/2\right)}\int_0^\infty w\left(\left(v_a+v_b\right)/2\right)^{-1}e^{-\left(w/2\right)\left(v_a f/v_b\right)^{+1}}dw$$

$$= \frac{\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{\frac{v_a}{2}} f^{\frac{v_a}{2}-1}}{2^{(v_a+v_b)/2}\Gamma\left(\frac{v_a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_b}{2}\right)} \int_0^{\infty} w\left(\left(v_a+v_b\right)/2\right)^{-1} e^{-\left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{v_a f}{v_b}\right)^{+1}} dw$$

- bila

$$z = \left(\frac{w}{2}\right)\left(\left(\frac{v_a f}{v_b}\right)+1\right)$$

$$dw = \left(\left(\frac{2}{(v_a f / v_b)}+1\right)\right) dz$$

Teorema

- Jika X ~ F(V_A, V_B), maka

$$E(X^r) = \frac{\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^r \Gamma\left(\frac{\nu_A}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{V_B}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_A}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_B}{2}\right)}, V_B > 2r$$

$$E(X) = \frac{V_B}{V_B - 2}, 2 < V_B$$

$$Var(X) = \frac{2\nu_B^2(\nu_A+\nu_B-2)}{\nu_A(\nu_B-2)^2(\nu_B-4)} \quad untuk \quad \nu_B > 4$$

- Persentil $X \sim F(V_A, V_B)$, yakni $f_\gamma\,(V_A, V_B)$ adalah suatu nilai yang didefinisikan sebagai

$$P(X \leq f_\gamma\,(V_A, V_B)) = \gamma$$

- Jika X ~ F(V_A, V_B), maka Y = 1/X ~ F(V_A, V_B). Dengan demikian

$$1-\gamma = P(X < f_{1-\gamma}(V_A, V_B))$$

$$= 1 - P\left(Y \le \frac{1}{f_{1-\gamma}(V_A, V_B)}\right)$$

$$= P\left(Y > \frac{1}{f_{1-\gamma}(V_A, V_B)}\right)$$

$$g(f,w)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{(v_a+v_b)/2}\Gamma\left(\frac{v_a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_b}{2}\right)}\left(\dfrac{v_a fw}{v_b}\right)^{\frac{v_a}{2}-1} w^{\frac{v_b}{2}-1} e^{-\left(\frac{w}{2}\right)\left(\left(\frac{v_a f}{v_b}\right)+1\right)\frac{v_a w}{v_b}}, & \\ 0, lainya & 0<f<\infty, 0<w<\infty\end{cases}$$

Distribusi F kemudian diperoleh dengan mengambil distribusi bias.

- Sehingga diperoleh

$$\frac{1}{f_{1-\gamma}(V_A, V_B)} = f_\gamma(V_B, V_A)$$

$$f_{1-\gamma}(V_A, V_B) = \frac{1}{f_\gamma(V_B, V_A)}$$

DISTRIBUSI BETA

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi Beta dengan parameter a dan b, jika fungsi kepadatanya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases} \tag{2.18}$$

di mana $B(a,b)$ merupakan fungsi Beta yang didefinisikan sebagai

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \qquad a > 0, b > 0. \tag{2.19}$$

Fungsi Beta dihubungkan dengan fungsi Gamma oleh

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+\ b)}. \qquad (2.20)$$

Sehingga distribusi Beta juga dapat didefinisikan oleh fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+\ b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & 0 < \ x < \ 1 \\ 0 & \text{yang lainya} \end{cases} \qquad (2.21)$$

Mean dan variansi dari distribusi Beta dengan parameter a dan b masing-masing adalah

$$\mu = \frac{a}{a+b} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2},$$

BUKTI

Menghitung momen dari distribusi Beta bisa dilakukan dengan metode sebagai berikut

$$EX^n = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^n x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{(a+n)-1} (1-x)^{b-1} dx \qquad (2.22)$$

maka juga dapat diperoleh persamaan

$$EX^n = \frac{B(a+n,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a)}. \qquad (2.23)$$

Berdasarkan persamaan (2.22) dan persamaan (2.23), maka untuk memperoleh mean $(E(X))$ dan

var(X) = $E(X^2) - [E(X)]^2$ adalah dengan mensubsitusikan n= 1 dan n= 2 ke persamaan (2.23),

maka

$$Mean(\mathrm{X}) = EX^1 = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a)}$$

$$= \frac{a\,\Gamma(a)\Gamma(a+b)}{(\alpha+b)\Gamma(a+b)\Gamma(a)}$$

$$= \frac{a}{(\alpha+b)}\,*$$

dan

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Karena

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(a+\ b)}{\Gamma(a+\ b+2)\Gamma(a)}$$

$$= \frac{(a+1)a\,\Gamma(a)\,\Gamma(a+\ b)}{(a+\ b+1)(a+\ b)\Gamma(a+\ b)\Gamma(a)}$$

$$= \frac{(a+1)a}{(a+\ b+1)(a+\ b)},$$

maka

$$Var(X) = \frac{(a+1)a}{(\alpha+\ b+1)(a+\ b)} - \left(\frac{a}{a+\ b}\right)^2$$

$$= \frac{(a+1)a}{(a+\ b+1)(a+\ b)} - \frac{a^2}{(a+\ b)^2}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2+a) - a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}*$$

7.3 Pendekatan-Pendekatan Sampel Besar

Teorema 7.15

Jika $Y_v \sim \chi^2(v)$, maka

$$Z_v = \frac{Y_v - v}{\sqrt{2v}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Sebagaimana $v \to \infty$.

<u>Bukti:</u>

Pada teorema limit pusat, Y_v merupakan suatu barisan peubah acak dan v merupakan rata-rata serta $2v$ merupakan varians. Pada pendekatan-pendekatan sampel besar nilai $v \to \infty$ tidak diperhitungkan karena nilainya yang sangat besar, sehingga yang seharusnya nilai ragamnya:

$$Y_v \sim \chi^2(v, 2v/\sqrt{v}) \text{ menjadi } Y_v \sim \chi^2(v, \sqrt{2v})$$

Jadi, nilai

$$Z_v = \frac{Y_v - v}{2v/\sqrt{v}} \quad \text{menjadi} \quad Z_v = \frac{Y_v - v}{\sqrt{2v}}$$

Sebagaimana $v \to \infty$. Y_v dikatakan memiliki distribusi normal dengan rata-rata v dan variansi $2v$.