

## Kuliah 6: Spesifikasi Model

**Koordinator Tim:** I Wayan Sumarjaya (sumarjaya@unud.ac.id)  
Anggota Tim Teaching I: I Gusti Ayu Made Srinadi (srinadi@unud.ac.id)  
Anggota Tim Teaching II: Made Susilawati (mdsusilawati@unud.ac.id)

### Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mampu memisahkan antara proses stasioner dan proses nonstasioner (S5, S9, KU1, KU2, KU9, KK1, KK2, PP1)

### Kemampuan Akhir yang Diharapkan

Mahasiswa mampu memilih model deret waktu ARIMA yang sesuai melalui spesifikasi dan estimasi model berdasarkan kriteria informasi dan mendemonstrasikan dengan perangkat lunak R (C4, P2, A2)

### Indikator

1. Ketepatan memilih metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood estimator*)
2. Ketepatan menggunakan R untuk mengestimasi parameter menggunakan metode kemungkinan maksimum

### Bahan Kajian/Materi Ajar

1. Ketepatan memilih metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood estimator*)
2. Ketepatan menggunakan R untuk mengestimasi parameter menggunakan metode kemungkinan maksimum

Materi pada bab ini diadaptasi dari Cryer and Chan (2008).

Pada bagian sebelumnya kita telah mempelajari proses stasioner dan nonstasioner yaitu ARMA dan ARIMA. Pada bab ini kita akan mempelajari bagaimana: memilih nilai  $p$ ,  $d$ , dan  $q$  (disebut spe-

sifikasi model); mengestimasi parameter untuk model ARMA( $p, d, q$ ); dan memeriksa kesesuaian model dan memperbaikinya jika diperlukan.

## 6.1 Spesifikasi Model

Pada subbab ini kita akan membahas fungsi autokorelasi sampel, fungsi autokorelasi parsial, uji akar unit Dickey-Fuller, dan kriteria informasi.

### 6.1.1 Sifat-sifat fungsi autokorelasi sampel

Ingat kembali fungsi autokorelasi sampel yang didefinisikan oleh

$$\hat{\rho}(h) = r(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad (6.1)$$

untuk  $h = 1, 2, \dots$ . Tujuan kita adalah mengenali semaksimal mungkin pola  $r(h)$  yang merupakan karakteristik pola  $\rho(h)$  dari model ARMA. Sebagai contoh kita tahu bahwa  $\rho(h) = 0$  untuk  $h > q$  pada model MA( $q$ ). Namun,  $r(h)$  hanyalah estimasi dari  $\rho(h)$ . Kita perlu menyelidiki lebih lanjut sifat-sifat pengambilan sampel untuk membandingkan korelasi dari sampel dan korelasi teoretisnya.

Melihat definisi fungsi autokorelasi sampel  $r(h)$ , jelas bahwa distribusi sampel rasio jumlah kuadrat tersebut tidaklah mudah. Kita tahu bahwa ekspektasi dari rasio bukanlah rasio dari ekspektasi, artinya  $E(X/Y) \neq E(X)/E(Y)$ . Dengan demikian, kita akan menggunakan argumentasi sampel besar untuk membahas sifat-sifat sampel. Hasil dari sifat sampel besar ini telah dipelajari oleh Bartlett. Hasil-hasil tersebut antara lain sebagai berikut. Untuk sebarang  $m$ , distribusi bersama dari

$$\sqrt{n}(r(1) - \rho(1)), \sqrt{n}(r(2) - \rho(2)), \dots, \sqrt{n}(r(m) - \rho(m)) \quad (6.2)$$

sebagaimana  $n \rightarrow \infty$  adalah distribusi normal dengan nilai tengah nol, varians  $c_{jj}$ , dan kovarians  $c_{ij}$  dengan

$$c_{ij} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\rho(h+i)\rho(h+j) + \rho(h-i)\rho(h+j) - 2\rho(i)\rho(j)\rho(h+j) - 2\rho(j)\rho(h)\rho(h+i) + 2\rho(i)\rho(j)\rho^2(h)). \quad (6.3)$$

Untuk  $n$  besar, kita katakan  $r(h)$  mendekati normal dengan nilai tengah  $\rho(h)$  dan varians  $c_{hh}/n$ . Selanjutnya, kita juga peroleh  $\text{cor}(r(h), r(j)) \approx c_{hj} / \sqrt{c_{hh}c_{jj}}$ . Apa yang dapat kita ambil sifat ini? Untuk  $n$  besar, varians  $r(h)$  berbanding terbalik dengan ukuran sampel, tetapi  $\text{cor}(r(h), r(j))$  mendekati konstan untuk  $n$  besar.

**Contoh 6.1.1.** Untuk proses AR(1) dengan  $\rho(h) = \phi^h$  untuk  $h > 0$ , persamaan (6.3) untuk  $i = j$  menghasilkan

$$\text{var}(r(h)) \approx \frac{1}{n} \left[ \frac{(1 + \phi^2)(1 - \phi^{2h})}{1 - \phi^2} - 2h\phi^{2h} \right]. \quad (6.4)$$

Lebih lanjut

$$\text{var}(r(1)) \approx \frac{1 - \phi^2}{n}. \quad (6.5)$$

Demikian pula, setelah melakukan banyak manipulasi aljabar, diperoleh

$$c_{ij} = \frac{(\phi^{j-1} - \phi^{j+i}(1 + \phi^2))}{1 - \phi^2}. \quad (6.6)$$

Kita peroleh, misalnya,

$$\text{cor}(r(1), r(2)) \approx 2\phi \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{1 + 2\phi^2 - 3\phi^4}}. \quad (6.7)$$

Misalkan  $\phi = \pm 0,9$ , diperoleh  $\text{var}(r_1) = 0,44^2/n$  dan  $\text{cor}(r(1), r(2)) = \pm 0,97$ .

**Contoh 6.1.2.** Untuk MA(1) diperoleh  $c_{11} = 1 - 3\rho^2(1) + 4\rho^4(1)$  dan  $c_{hh} = 1 + 2\rho^2(1)$  untuk  $h > 1$  dan  $c_{12} = 2\rho(1)(1 - \rho^2(1))$ . Misalnya untuk  $\theta = \pm 0,9$  diperoleh  $\text{var}(r(1)) = 0,71^2/n$  dan  $\text{cor}(r(1), r(2)) = \mp 0,86$ .

## 6.1.2 Fungsi autokorelasi parsial

Ingat kembali bahwa fungsi autokorelasi untuk MA( $q$ ) adalah nol untuk beda kala (*lag*) selain  $q$ , jadi fungsi autokorelasi sampel merupakan indikator yang bagus untuk tingkat (*order*) dari proses. Namun, fungsi autokorelasi AR( $p$ ) misalnya tidaklah nol setelah beda kala tertentu. Bahkan, beda kala ini melemah (*die off*), bukan terpotong (*cut off*). Ini berarti kita memerlukan informasi lain untuk menentukan tingkat dari model autoregresif. Suatu fungsi yang didefinisikan sebagai korelasi antara  $X_t$  dan  $X_{t-h}$  setelah menghilangkan pengaruh variabel intervensi  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1}$ . Koefisien ini disebut autokorelasi parsial pada beda kala  $h$  dan dinotasikan  $\phi_{hh}$ . Ada beberapa cara untuk mendefinisikan autokorelasi parsial ini. Jika  $X_t$  adalah deret waktu berdistribusi normal, maka

$$\phi_{hh} = \text{cor}(X_t, X_{t-h} | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1}) \quad (6.8)$$

yakni  $\phi_{hh}$  adalah korelasi distribusi bivariat dari  $X_t$  dan  $X_{t-h}$  bersyarat pada  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1}$ .

Metode umum untuk menentukan fungsi autokorelasi parsial untuk proses stasioner adalah dengan menggunakan persamaan Yule-Walker berikut:

$$\begin{aligned} \phi_{h1} + \rho(1)\phi_{h2} + \rho(2)\phi_{h3} + \dots + \rho(h-1)\phi_{hh} &= \rho(1) \\ \rho(1)\phi_{h1} + \phi_{h2} + \rho(1)\phi_{h3} + \dots + \rho(h-2)\phi_{hh} &= \rho(2) \\ &\vdots \\ \rho(h-1)\phi_{h1} + \rho(h-2)\phi_{h2} + \rho(h-3)\phi_{h3} + \dots + \phi_{hh} &= \rho(h) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Levinson (1947) dan Durbin (1960) memberikan metode yang efisien untuk mendapatkan solusi persamaan (6.9) di atas. Secara terpisah mereka menemukan solusi rekursif

$$\phi_{hh} = \frac{\rho(h) - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \rho(h-j)}{1 - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \rho(j)} \quad (6.10)$$

dengan  $\phi_{h,j} = \phi_{h-1,j} - \phi_{hh} \phi_{h-1,h-j}$  untuk  $j = 1, 2, \dots, h-1$ . Sebagai contoh menggunakan  $\phi_{11} = \rho(1)$  kita peroleh

$$\phi_{22} = \frac{\rho(2) - \phi_{11} \rho(1)}{1 - \phi_{11} \rho(1)} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} \quad (6.11)$$

dengan  $\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22} \phi_{11}$  yang diperlukan untuk langkah selanjutnya. Dengan demikian kita peroleh

$$\phi_{33} = \frac{\rho(3) - \phi_{21} \rho(2) - \phi_{22} \rho(1)}{1 - \phi_{21} \rho(1) - \phi_{22} \rho(2)}. \quad (6.12)$$

Kita dapat menghitung nilai numerik untuk  $\phi_{hh}$  baik secara teoretis maupun empiris. Artinya, dengan mengganti  $\rho$  dengan  $r$  kita akan memperoleh dengan fungsi autokorelasi parsial sampel atau estimasinya. Berikut ini adalah tingkah laku fungsi autokorelasi dan autokorelasi parsial untuk model ARMA.

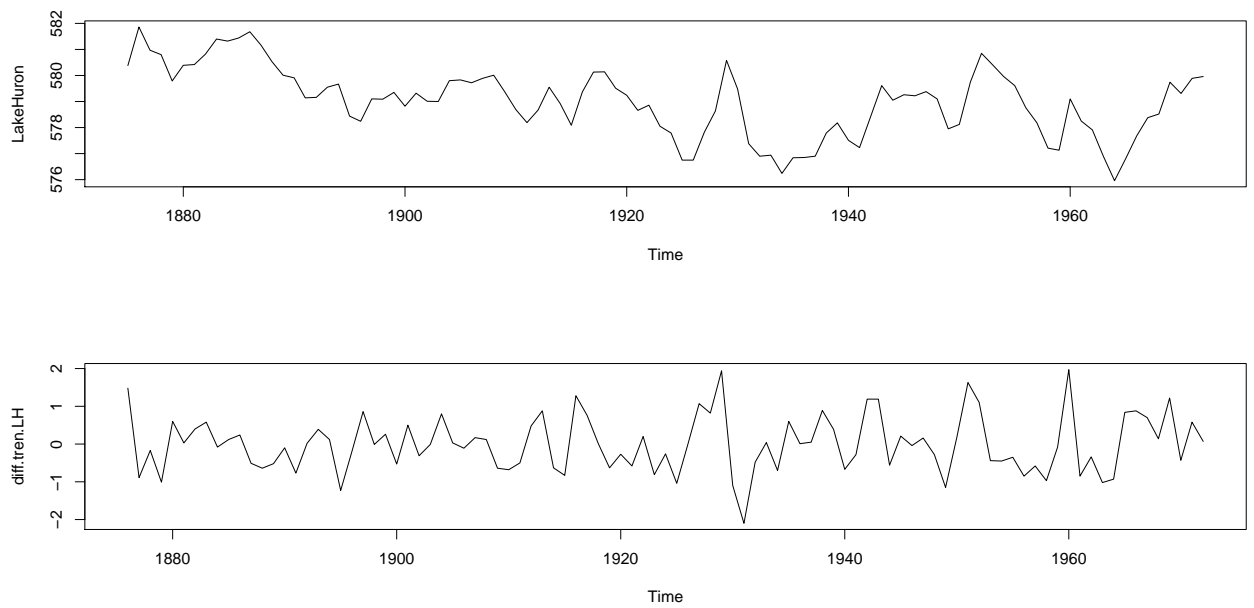
	AR( $p$ )	MA( $q$ )	ARMA( $p, q$ )
ACF	melemah	terpotong setelah beda kala $q$	melemah
PACF	terpotong setelah beda kala $p$	melemah	melemah

**Contoh 6.1.3.** Kita akan mengamati fungsi autokorelasi sampel (ACF) dan fungsi autokorelasi parsial sampel (PACF) dari data LakeHuron. Data ini merupakan data pengukuran ketinggian Danau Huron selama periode 1875–1972 dalam satuan kaki.

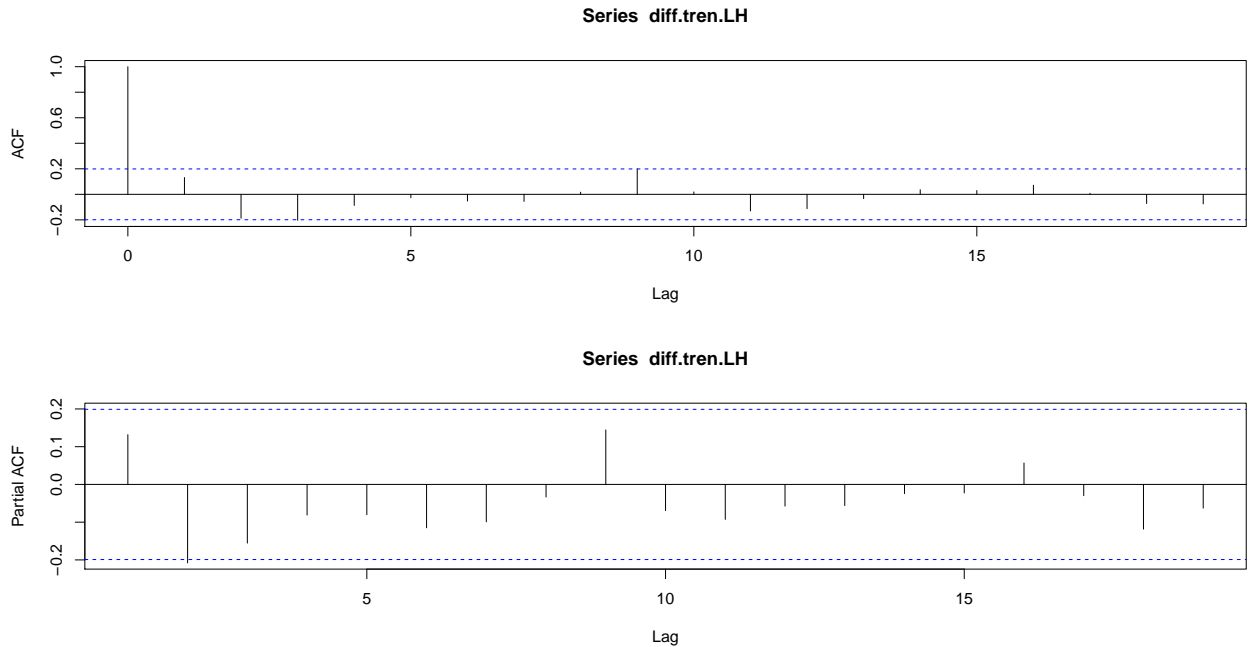
```
> par(mfrow=c(2,1))
> plot(LakeHuron)
> diff.tren.LH <- diff(LakeHuron,lag=1)
> plot(diff.tren.LH)
```

Terlebih dahulu kita plot data. Berdasarkan plot data dapat dilihat bahwa data tidak stasioner hal ini ditunjukkan oleh adanya tren menurun. Sehingga kita akan melakukan *differencing* terhadap tren. Selanjutnya kita akan lihat ACF dan PACF untuk data yang telah di-*differencing* tersebut.

```
> acf(diff.tren.LH)
> acf(diff.tren.LH,type="partial")
```



Gambar 6.1: Plot data Lake Huron dan *differencing* terhadap tren.



Gambar 6.2: Plot ACF dan PACF data Lake Huron dan *differencing* terhadap tren.

Kita peroleh plot ACF dan PACF sebagai berikut: Sebagai catatan garis putus-putus pada gambar diplot pada  $\pm 2/\sqrt{n}$  yang berfungsi sebagai nilai kritis apakah koefisien autokorelasi secara signifikan berbeda dari nol. Melihat ACF, semua beda kala (*lag*) tidak ada yang signifikan. Pada PACF terlihat pada beda kala (*lag*) ke-2 terpotong, sehingga kandidat model setelah data ini di-*differencing* adalah AR(2).

### 6.1.2.1 Fungsi autokorelasi diperluas

Model ARMA memiliki ACF dan PACF yang memiliki tak berhingga banyak nilai tak nol. Hal ini tentu saja menjadikannya susah untuk diidentifikasi kalau hanya menggunakan fungsi autokorelasi sampel dan fungsi autokorelasi parsial sampel. Salah satu fungsi yang bisa digunakan untuk membantu kita dalam mengidentifikasi adalah fungsi autokorelasi parsial yang diperluas (*extended autocorrelation function*, disingkat EACF). Misalkan

$$W_{t,k,j} = X_t - \tilde{\phi}_1 X_{t-1} - \dots - \tilde{\phi}_k X_{t-k} \quad (6.13)$$

adalah sisaan autoregresif yang didefinisikan dengan koefisien AR yang diestimasi secara iteratif dengan mengasumsikan tingkat AR adalah  $k$  dan tingkat MA adalah  $j$ . Autokorelasi sampel  $W_{t,k,j}$  dikatakan autokorelasi sampel yang diperluas (EACF). Fungsi EACF diimplementasikan pada pustaka TSA dalam fungsi `eacf`.

**Contoh 6.1.4.** Lihat kembali data Lake Huron yang telah di-*differencing*. Kita akan melihat EACF untuk data ini.

```
> diff.tren.LH <- diff(LakeHuron, lag=1)
> library(TSA)
> eacf(diff.tren.LH)
AR/MA
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
0 o o o o o o o o o o o o o o
1 x o o o o o o o o o o o o o
2 x o o o o o o o o o o o o o
3 x x o o o o o o o o o o o o
4 x o o x o o o o o o o o o o
5 x x x o o o o o o o o o o o
6 x o o o o o o o o o o o o o
7 x o o x o x o o x o o o o o
```

Untuk melihat tingkat (*order*) yang mungkin dapat dilihat dari daerah segitiga o. Melihat hasil EACF di atas disarankan model ARMA dengan  $p = 0$ ,  $q = 1$  atau MA(1). Kenapa hasil ini berbeda dengan hasil identifikasi kita menggunakan ACF saja? Tentu saja nanti kita bisa menggunakan kedua kandidat model dan memilih menggunakan kriteria informasi AIC dan BIC yang akan kita bicarakan pada bagian berikutnya.

### 6.1.3 Kriteria Informasi

Kriteria informasi yang lazim digunakan dalam memilih model ARIMA adalah Akaike Information Criterion (AIC) dan Bayesian Information Criterion (BIC). AIC didefinisikan sebagai

$$\text{AIC} = -2 \log(\text{maximum likelihood}) + 2k \quad (6.14)$$

dengan  $k = p + q + 1$  jika model berisi intersep atau suku konstan dan  $k = p + q$  jika tidak. Ukuran lain adalah BIC yang didefinisikan oleh

$$\text{BIC} = -2 \log(\text{maximum likelihood}) + k \log n. \quad (6.15)$$

Model dengan nilai AIC dan BIC terkecil adalah kandidat model yang akan terpilih untuk digunakan pada tahap berikutnya seperti pemeriksaan diagnostik dan peramalan.

**Contoh 6.1.5.** Lihat kembali data Lake Huron. Kita telah melakukan *differencing* terhadap tren. Pada bagian ini kita akan melihat nilai AIC dan BIC dari Lake Huron. Ingat, kita akan menerapkan model ARIMA pada data asli.

```
> LakeHuron.ar2 <- arima(LakeHuron,order=c(2,1,0))
> LakeHuron.ar2
```

```
Call:
arima(x = LakeHuron, order = c(2, 1, 0))
```

```
Coefficients:
ar1      ar2
0.1728  -0.2233
s.e.    0.1012   0.1015
```

```
sigma^2 estimated as 0.5188:  log likelihood = -105.87,  aic = 215.74
> LakeHuron.ma1 <- arima(LakeHuron,order=c(0,1,1))
> LakeHuron.ma1
```

```
Call:
arima(x = LakeHuron, order = c(0, 1, 1))
```

```
Coefficients:
ma1
0.2003
s.e.  0.1145
```

```
sigma^2 estimated as 0.5398:  log likelihood = -107.75,  aic = 217.5
>
```

Dari luaran di atas diperoleh AIC untuk model AR(2) = 215,74 dan AIC untuk model MA (1) = 217,5. Jadi berdasarkan kriteria AIC kita akan memilih model AR(2).

## 6.2 Pengayaan

Buku-buku seperti Cryer and Chan (2008), Shumway and Stoffer (2011), Brockwell and Davis (2016), dan Box et al. (2016) dapat digunakan untuk pengayaan lebih lanjut.

### Daftar Pustaka

- George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, and Greta M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, fifth edition, 2016.
- Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York, third edition, 2016.
- Jonathan D Cryer and Kung-Sik Chan. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, New York, second edition, 2008.
- Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, New York, 2011.