MA637430 Analisis Deret Waktu **Universitas Udayana**
Semester Ganjil 2018/2019 **Program Studi Matematika**

Kuliah 9: Diagnostik dan Peramalan Model ARIMA

Koordinator Tim: I Wayan Sumarjaya (sumarjaya@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching I: I Gusti Ayu Made Srinadi (srinadi@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching II: Made Susilawati (mdsusilawati@unud.ac.id)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah
Mampu mengevaluasi kelayakan model deret waktu yang sesuai (S5, S9, KU1, KU2, KU9, KK1, KK2, PP1)

Kemampuan Akhir yang Diharapkan
Mahasiswa mampu mengevaluasi kelayakan model deret waktu ARIMA musiman melalui uji diagnostik model yang sesuai (C5, P2, A2)

Indikator

1. Ketepatan mengevaluasi model dengan uji kenormalan sisaan
2. Ketepatan mengevaluasi model dengan QQ plot
3. Ketepatan mengevalusi model dengan Uji Ljung-Box
4. Ketepatan menggunakan R untuk melakukan diagnostik model

Bahan Kajian/Materi Ajar

1. Uji Kenormalan Sisaan
2. QQ Plot
3. Uji Ljung Box
4. Model SARIMA

9.1 Peramalan

Salah satu tujuan dari analisis deret waktu adalah peramalan. Yang tidak kalah pentingnya adalah penilaian tentang ketepatan peramalan tersebut. Pada bagian ini kita akan membahas peramalan dengan galat kuadrat rata-rata (*minimum square error*, disingkat MSE) minimum. Sebelum membahas MSE, kita akan meninjau kembali sifat-sifat harapan bersyarat dan prediksi MSE minimum. Subbagian ini diadaptasi dari Cryer dan Chan (2010).

9.1.1 Harapan bersyarat

Jika X dan Y memiliki fungsi densitas peluang bersama $f(x, y)$ dan fungsi densitas peluang marginal X dinyatakan sebagai $f(x)$, maka fungsi densitas peluang bersyarat (*conditional probability density function*) Y diketahui $X = x$ diberikan oleh

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \tag{9.1}$$

dan nilai harapan bersyarat Y diketahui $X = x$ didefinisikan oleh

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)\,\mathrm{d}y. \tag{9.2}$$

Beberapa sifat penting harapan bersyarat adalah sebagai berikut:

1. $\mathrm{E}(aY + bZ + c|X = x) = a\mathrm{E}(Y|X = x) + b\mathrm{E}(Z|X = x) + c$,
2. $\mathrm{E}[h(Y)|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f(y|x)\,\mathrm{d}x$,
3. $\mathrm{E}[h(X)|X = x] = h(x)$,
4. $\mathrm{E}[h(X, Y)|X = x] = \mathrm{E}[h(x, Y)|X = x]$,
5. Jika $\mathrm{E}(Y|X = x) = g(x)$, maka $g(X)$ adalah peubah acak dan dapat dibuktikan $\mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}(Y)$ atau $\mathrm{E}[\mathrm{E}(Y|X)] = \mathrm{E}(Y)$,
6. Jika X dan Y saling bebas, maka $\mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y)$.

9.1.2 Prediksi MSE minimum

Misalkan Y adalah peubah acak dengan nilai tengah μ_Y dan varians σ_Y^2. Jika tujuan kita adalah memprediksi Y hanya menggunakan konstanta c, apakah pilihan terbaik untuk c? Tentu saja kita harus mendefinisikan apa yang dimaksud dengan terbaik. Kriteria yang umum digunakan adalah memilih nilai c yang meminimalkan MSE, yaitu, meminimalkan

$$g(c) = \mathrm{E}[(Y - c)^2] = \mathrm{E}(Y^2) - 2c\mathrm{E}(Y) + c^2. \tag{9.3}$$

Karena $g(c)$ adalah fungsi kuadratik dalam c, menyelesaikan $g'(c) = 0$ akan menghasilkan nilai minimum yang diinginkan. Kita peroleh

$$g'(c) = -2\mathrm{E}(Y) + 2c \tag{9.4}$$

sehingga nilai c yang optimal adalah

$$c = \mathrm{E}(Y) = \mu. \tag{9.5}$$

Ingat pula bahwa

$$\min_{-\infty<c<\infty} g(c) = \mathrm{E}(Y - \mu)^2 = \sigma_Y^2. \tag{9.6}$$

Sekarang misalkan kita memiliki peubah acak kedua X dan ingin menggunakan nilai amatan X untuk memprediksi Y. Andaikan fungsi linear $a + bX$ dapat digunakan untuk prediksi. Misalkan pula $\rho_{XY} = \mathrm{cor}(X, Y)$. MSE diberikan oleh

$$g(a, b) = \mathrm{E}(Y - a - bX)^2 \tag{9.7}$$

dan ekspansikan $g(a, b)$ sehinga diperoleh

$$g(a, b) = \mathrm{E}(Y^2) + a^2 + b^2\mathrm{E}(X^2) - 2a\mathrm{E}(Y) + 2ab\mathrm{E}(X) - 2b\mathrm{E}(XY). \tag{9.8}$$

Selanjutnya menurunkan parsial terhadap a dan b diperoleh

$$\frac{\partial g(a, b)}{\partial a} = 2a - 2\mathrm{E}(Y) + 2b\mathrm{E}(X), \tag{9.9}$$

$$\frac{\partial g(a, b)}{\partial b} = 2b\mathrm{E}(X^2) + 2a\mathrm{E}(X) - 2\mathrm{E}(XY). \tag{9.10}$$

Kemudian menyamakan kedua turunan parsial dengan nol akan diperoleh solusi

$$b = \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathrm{var}(X)} = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \tag{9.11}$$

$$a = \mathrm{E}(Y) - b\mathrm{E}(X) = \mu_Y - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X. \tag{9.12}$$

Jika $\hat{Y}$ adalah prediksi MSE minimum dari Y berdasarkan fungsi linear X, maka dapat kita tuliskan

$$\hat{Y} = \left[\mu_Y - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X\right] + \left[\rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right]X \tag{9.13}$$

atau

$$\left[\frac{\hat{Y}-\mu_Y}{\sigma_Y}\right]=\rho_{XY}\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right] \tag{9.14}$$

atau bisa dituliskan sebagai bentuk

$$\hat{Y}^*=\rho_{XY}X^* \tag{9.15}$$

dengan $\hat{Y}^*$ dan X^* adalah peubah yang distandarkan (*standardized variables*).

Sekarang kita rampatkan masalah dalam memprediksi Y dengan fungsi sebarang dari X. Kita perlu memilih fungsi $h(X)$ yang meminimalkan

$$\mathrm{E}[Y-h(X)]^2 \tag{9.16}$$

atau dapat pula kita tulis sebagai

$$\mathrm{E}[Y-h(X)]^2=\mathrm{E}[\mathrm{E}(Y-h(X))^2|X]. \tag{9.17}$$

Lebih lanjut dapat pula kita tulis sebagai

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(Y-h(X))^2|X=x]=\mathrm{E}[(Y-h(x))^2|X=x]. \tag{9.18}$$

Untuk setiap nilai x, $h(x)$ adalah suatu konstanta. Kita dapat menggunakan sifat-sifat nilai harapan bersyarat. Dengan demikian, untuk setiap x, pilihan terbaik $h(x)$ adalah

$$h(x)=\mathrm{E}(Y|X=x). \tag{9.19}$$

Jadi $h(X)=\mathrm{E}(Y|X)$ adalah prediktor terbaik untuk Y dari semua fungsi X. Demikian pula apabila Y akan diprediksi oleh fungsi dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ maka prediktor MSE minimum diberikan oleh

$$E(Y|X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{9.20}$$

9.1.3 Peramalan model ARIMA

Pada bagian sebelumnya telah dijelaskan bagaimana menghitung prediktor MSE minimum. Berdasarkan data historis sampai waktu t, katakanlah $X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}, X_t$ kita akan meramalkan nilai $X_{t+\ell}$ yang akan terjadi ℓ unit waktu ke depan. Kita sebut waktu t sebagai awal ramalan (*forecast origin*) dan ℓ sebagai masa tenggang (*lead time*). Kita notasikan ramalan itu sendiri sebagai $\hat{X}_t(\ell)$. Secara umum kuadrat rata-rata galat (MSE) minimum untuk ramalan diberikan oleh persamaan berikut

$$\hat{X}_t(\ell)=\mathrm{E}(X_{t+\ell}|X_1, X_2, \ldots, X_t). \tag{9.21}$$

Pada sub-subbagian berikut kita akan membahas peramalan untuk beberapa model ARIMA.

9.1.3.1 Model AR(1)

Misalkan terdapat proses AR(1) dengan nilai tengah taknol memenuhi

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t. \tag{9.22}$$

Misalkan kita akan meramalkan satu unit waktu ke depan. Mengganti t dengan $t + 1$ pada (9.22), akan diperoleh

$$X_{t+1} - \mu = \phi(X_t - \mu) + \varepsilon_{t+1}. \tag{9.23}$$

Diberikan $X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}, X_t$, akan diambil harapan bersyarat kedua sisi pada persamaan (9.23) akan diperoleh

$$\hat{X}_t(1) - \mu = \phi[\mathrm{E}(X_t|X_1, X_2, \ldots, X_t) - \mu] + \mathrm{E}[\varepsilon_{t+1}|X_1, X_2, \ldots, X_t]. \tag{9.24}$$

Berdasarkan sifat-sifat nilai harapan kita peroleh

$$\mathrm{E}(X_t|X_1, X_2, \ldots, X_t) = X_t. \tag{9.25}$$

Kemudian kita juga tahu bahwa ε_{t+1} saling bebas dengan $X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}, X_t$ sehingga kita peroleh

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{t+1}|X_1, X_2, \ldots, X_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1}) = 0. \tag{9.26}$$

Sehingga persamaan (9.24) dapat ditulis sebagai

$$\hat{X}_t(1) = \mu + \phi(X_t - u). \tag{9.27}$$

Sekarang, apabila kita ganti t dengan $t + \ell$ pada (9.22) dan ambil harapan bersyarat pada kedua sisi akan dihasilkan

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + \phi[\hat{X}_t(\ell - 1) - \mu], \quad \text{untuk } \ell \geq 1 \tag{9.28}$$

karena $\mathrm{E}(X_{t+\ell-1}|X_1, X_2, \ldots, X_t) = \hat{X}_t(\ell - 1)$ dan untuk setiap $\ell \geq 1$, $\varepsilon_{t+\ell}$ saling bebas dengan $X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}, X_t$. Bentuk (9.28) disebut bentuk persamaan beda (*difference equation form*) dari peramalan. Apabila dilakukan iterasi mundur pada (9.28) kita akan memperoleh

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + \phi^\ell(X_t - \mu). \tag{9.29}$$

Coba Anda verifikasi persamaan (9.29)!

Contoh 9.1.1. Misalkan diperoleh estimasi $\phi = 0{,}575$ dan $\mu = 74{,}3293$, dan $X_t = 67$. Kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(1) = 74{,}3293 + (0{,}5705)(67 - 74{,}3293) = 70{,}14793. \tag{9.30}$$

Dengan cara serupa kita akan memperoleh $\hat{X}_t(2) = 71{,}94383$ dan $\hat{X}_t(10) = 74{,}30253$.

Galat peramalan satu langkah ke depan (*one-step-ahead forecast error*) $\varepsilon_t(1)$ diperoleh dari

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t(1) &= X_{t+1} - \hat{X}_t(1) \\
&= [\phi(X_t - \mu) + \mu + \varepsilon_{t+1}] - [\phi(X_t - \mu) + \mu] \\
&= \varepsilon_{t+1}.
\end{aligned} \tag{9.31}$$

Kemudian variansnya adalah $\mathrm{var}(\varepsilon_t(1)) = \sigma_\varepsilon^2$.

9.1.3.2 MA(1)

Misalkan model MA(1) dengan nilai tengah taknol berbentuk

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}. \tag{9.32}$$

Seperti langkah pada subbagian sebelumnya, ganti t dengan $t+1$ dan hitung harapan bersyarat pada kedua sisi sehingga diperoleh

$$\hat{X}_t(1) = \mu - \theta \mathrm{E}(\varepsilon_t | X_1, X_2, \ldots, X_t). \tag{9.33}$$

Untuk model yang dapat dibalik (*invertible*), ε_t adalah fungsi dari $X_1, X_2, \ldots, X_t$ akan diperoleh

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t | X_1, X_2, \ldots, X_t) = \varepsilon_t. \tag{9.34}$$

Dengan demikian kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(1) = \mu - \theta\varepsilon_t. \tag{9.35}$$

Glat peramalan satu langkah ke depan dapat dihitung sebagai berikut

$$\varepsilon_t(1) = X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}(1) = (\mu + \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t) - (\mu - \theta\varepsilon_t) = \varepsilon_{t+1}. \tag{9.36}$$

Untuk waktu tenggang yang lebih lama kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + \mathrm{E}(\varepsilon_{t+\ell} | X_1, X_2, \ldots, X_t) - \theta \mathrm{E}(\varepsilon_{t+\ell-1} | X_1, X_2, \ldots, X_t). \tag{9.37}$$

Namun, untuk $\ell > 1$, $\varepsilon_{t+\ell}$ dan $\varepsilon_{t+\ell-1}$ saling bebas dengan $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Sehingga harapan bersyarat keduanya adalah nol. Jadi

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu \quad \text{untuk semua } \ell > 1. \tag{9.38}$$

9.1.3.3 ARMA(p, q)

Persamaan beda (*difference equation*) pada model stasioner ARMA(p, q) diberikan oleh

$$\begin{aligned}\hat{X}_t(\ell) = {} & \phi_1 \hat{X}_t(\ell-1) + \phi_2 \hat{X}_t(\ell-2) + \cdots + \phi_p \hat{X}_t(\ell-p) + \theta_0 \\ & - \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t+\ell-1} | X_1, X_2, \ldots, X_t) - \theta_2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t+\ell-2} | X_1, X_2, \ldots, X_t) \\ & - \cdots - \theta_q \mathrm{E}(\varepsilon_{t+\ell-q} | X_1, X_2, \ldots, X_t)\end{aligned} \tag{9.39}$$

dengan

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{t+j} | X_1, X_2, \ldots, X_t) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j > 0; \\ \varepsilon_{t+j}, & \text{jika } j \leq 0. \end{cases} \tag{9.40}$$

Contoh 9.1.2. Misalkan untuk model ARMA(1,1) kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(1) = \phi X_t + \theta_0 - \theta\varepsilon_t \tag{9.41}$$

dan

$$\hat{X}_t(2) = \phi \hat{X}_t(1) + \theta_0. \tag{9.42}$$

Secara umum, kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(\ell) = \phi \hat{X}_t(\ell - 1) + \theta_0, \quad \text{untuk } \ell > 2. \tag{9.43}$$

Dengan melakukan iterasi bentuk ini dapat ditulis sebagai

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + \phi^{\ell}(X_t - \mu) - \phi^{\ell-1}\theta\varepsilon_t, \quad \text{untuk } \ell \geq 1. \tag{9.44}$$

9.1.3.4 ARIMA(p, d, q)

Peramalan model nonstationer ARIMA serupa dengan peramalan model ARMA. Sebagai contoh model ARIMA$(p, 1, q)$ yang dapat dituliskan sebagai model nonstasioner ARMA$(p+1, q)$. Model ARIMA ini dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} X_t &= \xi_1 X_{t-1} + \cdots + \xi_p X_{t-p} + \xi_{p+1} X_{t-p-1} \\ &\quad + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned} \tag{9.45}$$

dengan $\xi_1 = 1 + \phi_1$, $\xi_j = \phi_j - \phi_{j-1}$, untuk $j = 1, 2, \ldots, p$ dan $\xi_{p+1} = -\phi_p$.

Contoh 9.1.3. Model ARIMA(1,1,1) dengan bentuk

$$X_t = (1 + \phi)X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \theta_0 + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}. \tag{9.46}$$

Kita akan peroleh

$$\begin{aligned} \hat{X}_t(1) &= (1 + \phi)X_t - \phi X_{t-1} + \theta_0 - \theta\varepsilon_t \\ \hat{X}_t(2) &= (1 + \phi)\hat{X}_t(1) - \phi X_t + \theta_0 \end{aligned}$$

dan secara umum

$$\hat{X}_t(\ell) = (1 + \phi)\hat{X}_t(\ell - 1) - \phi \hat{X}_t(\ell - 2) + \theta_0. \tag{9.47}$$

9.1.4 Implementasi pada R

Peramalan model ARIMA dapat dilakukan dengan fungsi `predict` pada R. Misalkan kita akan meramalkan data Lake Huron untuk enam tahun ke depan.

```
> predict(LakeHuron.ar2,6)
$pred
Time Series:
Start = 1973
End = 1978
Frequency = 1
[1] 579.8426 579.8067 579.8267 579.8382 579.8357 579.8327
$se
Time Series:
Start = 1973
End = 1978
Frequency = 1
[1] 0.7202803 1.1101254 1.3152876 1.4687093 1.6166856 1.7582081
>
```

Diperoleh hasil ramalan untuk enam tahun ke depan sebagai berikut: 579,8426; 579,8067; 579,8267; 579,8382; 579,8357;579,8327.

9.2 Pengayaan

Buku-buku seperti Cryer and Chan (2008), Shumway and Stoffer (2011), Brockwell and Davis (2016), dan Box et al. (2016) dapat digunakan untuk pengayaan lebih lanjut.

Daftar Pustaka

George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, and Greta M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons, Inc.,, Hoboken, New Jersey, fifth edition, 2016.

Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York, third edition, 2016.

Jonathan D Cryer and Kung-Sik Chan. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, New York, second edition, 2008.

Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, New York, 2011.