

Kuliah 10: Model ARIMA Musiman

Koordinator Tim: I Wayan Sumarjaya (sumarjaya@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching I: I Gusti Ayu Made Srinadi (srinadi@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching II: Made Susilawati (mdsusilawati@unud.ac.id)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mampu mengevaluasi kelayakan model deret waktu yang sesuai (S5, S9, KU1, KU2, KU9, KK1, KK2, PP1)

Kemampuan Akhir yang Diharapkan

Mahasiswa mampu mengevaluasi kelayakan model deret waktu ARIMA musiman melalui uji diagnostik model yang sesuai (C5, P2, A2)

Indikator

1. Ketepatan mengevaluasi model dengan uji kenormalan sisaan
2. Ketepatan mengevaluasi model dengan QQ plot
3. Ketepatan mengevaluasi model dengan Uji Ljung-Box
4. Ketepatan menggunakan R untuk melakukan diagnostik model

Bahan Kajian/Materi Ajar

1. Uji Kenormalan Sisaan
2. QQ Plot
3. Uji Ljung Box
4. Model SARIMA

Pada bagian sebelumnya kita telah mempelajari model ARIMA untuk data yang tidak mengandung

musiman. Pada beberapa kasus pengaruh musiman terlihat jelas pada data, misalnya data tingkat CO₂ (lihat co2 pada R).

10.1 Model SARIMA

Seperti halnya pembahasan pada model ARIMA, kita akan memulai dengan proses stasioner kemudian dilanjutkan dengan proses nonstasioner. Misalkan s menyatakan periode musiman yang diketahui. Sebagai contoh $s = 12$ untuk deret bulanan dan $s = 4$ untuk deret kuartalan.

10.1.1 Model MA Musiman

Misalkan suatu deret waktu dibangkitkan berdasarkan proses

$$X_t = \varepsilon_t - \Theta \varepsilon_{t-12}. \quad (10.1)$$

Ingat bahwa

$$\text{cov}(X_t, X_{t-1}) = \text{cov}(\varepsilon_t - \Theta \varepsilon_{t-12}, \varepsilon_{t-1} - \Theta \varepsilon_{t-13}) = 0, \quad (10.2)$$

tetapi

$$\text{cov}(X_t, X_{t-12}) = \text{cov}(\varepsilon_t - \Theta \varepsilon_{t-12}, \varepsilon_{t-12} - \Theta \varepsilon_{t-24}) = -\Theta \sigma_\varepsilon^2. \quad (10.3)$$

Apa yang bisa kita amati? Deret itu stasioner dan memiliki autokorelasi taknol hanya pada beda kala (*lag*) 12. Apabila kita generalisasi apa yang telah diperoleh tadi, dapat didefinisikan model musiman tingkat Q dengan periode s , dinotasikan MA(Q), sebagai

$$X_t = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} - \Theta_2 \varepsilon_{t-2s} - \cdots - \Theta_Q \varepsilon_{t-Qs} \quad (10.4)$$

dengan polinom karakteristik MA yang didefinisikan oleh

$$\Theta(x) = 1 - \Theta_1 x^s - \Theta_2 x^{2s} - \cdots - \Theta_Q x^{Qs}. \quad (10.5)$$

Fungsi autokorelasi MA(Q) hanya bernilai taknol pada beda kala $s, 2s, 3s, \dots, Qs$. Lebih lanjut dapat ditunjukkan bahwa

$$\rho(hs) = \frac{-\Theta_h + \Theta_1 \Theta_{h+1} + \Theta_2 \Theta_{h+2} + \cdots + \Theta_{Q-h} \Theta_Q}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \cdots + \Theta_Q^2} \quad (10.6)$$

untuk $k = 1, 2, \dots, Q$. Catatan, model musiman MA dapat dianggap sebagai model nonmusiman MA dengan tingkat $q = Qs$ tetapi dengan semua nilai θ nol kecuali beda kala musiman $s, 2s, 3s, \dots, Qs$.

10.1.2 Model AR Musiman

Model autoregresif musiman juga dapat didefinisikan seperti halnya model MA. Misalkan model

$$X_t = \Phi X_{t-12} + \varepsilon_t \quad (10.7)$$

dengan $|\Phi| < 1$ dan ε_t saling bebas dengan X_{t-1}, X_{t-2}, \dots . Dapat ditunjukkan bahwa $|\Phi| < 1$ menjamin kestasioneran. Mengalikan kedua sisi persamaan (10.7) dengan X_{t-h} dan menghitung nilai harapannya kemudian membagi dengan $\gamma(0)$, akan diperoleh

$$\rho(h) = \Phi \rho(h - 12), \text{ untuk } h \geq 1. \quad (10.8)$$

Jelas bahwa

$$\rho(12) = \Phi \rho(0) = \Phi, \quad (10.9)$$

$$\rho(24) = \Phi \rho(12) = \Phi^2. \quad (10.10)$$

Secara umum

$$\rho(12h) = \Phi^h \text{ untuk } h = 1, 2, \dots. \quad (10.11)$$

Perhatikan bahwa jika kita ambil $h = 1$ dan $h = 11$ pada persamaan (10.8) dan menggunakan sifat $\rho(h) = \rho(-h)$, akan diperoleh

$$\rho(1) = \Phi \rho(11), \quad (10.12)$$

dan

$$\rho(11) = \Phi \rho(1) \quad (10.13)$$

yang berarti $\rho(1) = \rho(11) = 0$. Dengan cara serupa kita dapat menunjukkan bahwa $\rho(h) = 0$ kecuali pada beda kala musiman 12, 24, 36, Menggunakan contoh AR(1) musiman ini, kita sekarang dapat mendefinisikan model AR musiman tingkat P dengan periode musiman s sebagai

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1s} + \Phi_2 X_{t-2s} + \dots + \Phi_P X_{t-Ps} + \varepsilon_t \quad (10.14)$$

dengan polinom karakteristik musiman

$$\Phi(x) = 1 - \Phi_1 x^s - \Phi_2 x^{2s} - \dots - \Phi_P x^{Ps}. \quad (10.15)$$

Ingat bahwa, kita selalu mensyaratkan ε_t dan X_{t-1}, X_{t-2}, \dots saling bebas. Kemudian model AR musiman ini dapat dianggap sebagai model AR(p) dengan tingkat $p = Ps$. Koefisien ϕ bernilai tak nol hanya pada beda kala $s, 2s, 3s, \dots, Ps$.

10.2 Model ARMA Musiman Multiplikatif

Misalkan terdapat model dengan polinom karakteristik MA berbentuk

$$(1 - \theta x)(1 - \Theta x^{12}) \quad (10.16)$$

yang kalau kita kalikan akan menghasilkan

$$1 - \theta x - \Theta x^{12} + \theta \Theta x^{13}. \quad (10.17)$$

Model yang bersesuaian dengan polinom karakteristik ini adalah

$$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} - \Theta \varepsilon_{t-12} + \theta \Theta \varepsilon_{t-13} \quad (10.18)$$

Untuk model (10.18) kita bisa mengecek bahwa fungsi autokorelasi bernilai tak nol hanya pada beda kala 1, 11, 12, dan 13. Kita peroleh

$$\gamma(0) = (1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)\sigma_\varepsilon^2, \quad (10.19)$$

$$\rho(1) = -\frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad (10.20)$$

$$\rho(11) = \rho(13) = \frac{\theta \Theta}{(1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)}, \quad (10.21)$$

$$\rho(12) = -\frac{\Theta}{1 + \Theta^2}. \quad (10.22)$$

Model ARIMA musiman multiplikatif $ARMA(p, q) \times (P, Q)_s$ dengan periode musiman s adalah model dengan polinom karakteristik AR $\phi(x)\Phi(x)$ dan polinom karakteristik MA $\theta(x)\Theta(x)$ dengan

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p, \quad (10.23)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi_1 x^s - \Phi_2 x^{2s} - \dots - \Phi_P x^{Ps}, \quad (10.24)$$

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \dots - \theta_q x^q, \quad (10.25)$$

dan

$$\Theta(x) = 1 - \Theta_1 x^s - \Theta_2 x^{2s} - \dots - \Theta_Q x^{Qs}. \quad (10.26)$$

Sebagai contoh model dengan $P = q = 1$ dan $p = Q = 0$ dengan $s = 12$ yaitu

$$X_t = \Phi X_{t-12} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}. \quad (10.27)$$

Menggunakan teknik-teknik yang telah kita pelajari, kita akan memperoleh

$$\gamma(1) = \Phi \gamma(11) - \theta \sigma_\varepsilon^2, \quad (10.28)$$

$$\gamma(h) = \Phi \gamma(h - 12), \text{ untuk } h \geq 2. \quad (10.29)$$

Setelah pemilihan beberapa nilai h , kita peroleh

$$\gamma(0) = \left(\frac{1 + \theta^2}{1 - \Phi^2} \right) \sigma_\varepsilon^2, \quad (10.30)$$

$$\rho(12h) = \Phi^h, \quad \text{untuk } h \geq 1, \quad (10.31)$$

$$\rho(12h - 1) = \rho(12h + 1) = \left(-\frac{\theta\Theta^h}{1 + \theta^2} \right), \quad \text{untuk } h = 0, 1, 2, \dots \quad (10.32)$$

10.3 Model ARIMA Musiman Nonstasioner

Suatu alat penting dalam memodelkan proses musiman nonstasioner adalah perbedaan musiman (*seasonal difference*). Perbedaan musiman periode s untuk deret waktu $\{X_t\}$ dinotasikan $\nabla_s X_t$ yang didefinisikan oleh

$$\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s}. \quad (10.33)$$

Sebagai contoh untuk deret musiman kita mempertimbangkan perubahan dari Januari ke Januari, Februari ke Februari, dan seterusnya. Untuk deret dengan panjang n , perbedaan musiman akan memiliki panjang $n - s$; dalam hal ini, s adalah nilai data yang hilang karena perbedaan musiman. Sebagai contoh, andaikan perbedaan musiman cocok, misalkan proses yang dibangkitkan menurut proses

$$X_t = S_t + e_t, \quad (10.34)$$

$$S_t = S_{t-s} + \varepsilon_t, \quad (10.35)$$

dengan $\{e_t\}$ dan $\{\varepsilon_t\}$ adalah derau putih (*white noise*) yang saling bebas. Mengingat $\{S_t\}$ nonstasioner, $\{X_t\}$ juga nonstasioner. Namun, jika kita lakukan

$$\nabla_s X_t = S_t - S_{t-s} + e_t - e_{t-s} \quad (10.36)$$

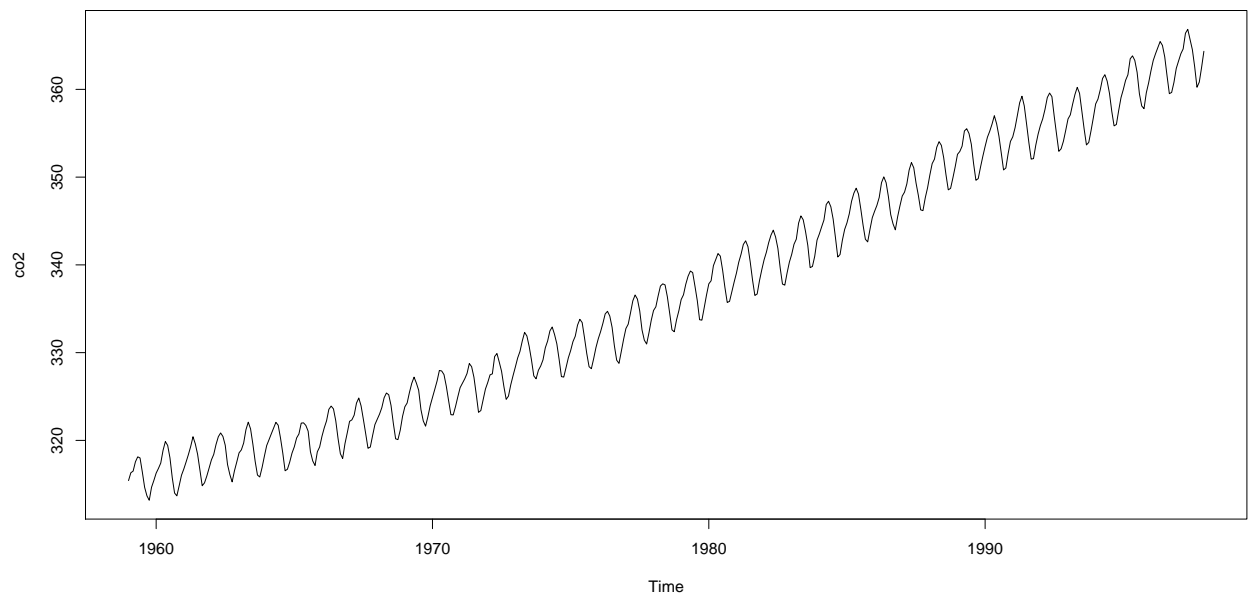
$$= \varepsilon_t + e_t - e_{t-s}. \quad (10.37)$$

Jelas bahwa $\nabla_s X_t$ stasioner dan memiliki fungsi autokorelasi seperti model MA(1) $_s$.

Suatu proses $\{X_t\}$ dikatakan model ARIMA musiman multiplikatif dengan tingkat reguler non-musiman p , d , dan q ; tingkat musiman P , D , dan Q dan periode musiman s jika deret beda

$$W_t = \nabla^d \nabla_s^D X_t \quad (10.38)$$

yang memenuhi model ARMA(p, q) \times (P, Q) $_s$ dengan periode musiman s . Kita katakan bahwa $\{X_t\}$ adalah model ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ dengan periode musiman s .



Gambar 10.1: Data konsentrasi co2 (dalam ppm).

10.4 Contoh Kasus

Lihat kembali data co2 (lihat juga Gambar 10.1). Data memperlihatkan tren naik dan pola musiman. Fungsi autokorelasi sampel untuk data co2 dapat dilihat pada Gambar 10.2. Plot ACF memperlihatkan pengaruh musiman yang kuat, terutama pada beda kala 12, 24, 36, dan seterusnya. Selanjutnya, kita lakukan *differencing* terhadap tren (lihat Gambar 10.3). Tampak bahwa terdapat pengaruh musiman yang kuat pada data yang telah di-*differencing*. Oleh karena itu, kita akan melakukan *differencing* terhadap tren. Plot fungsi autokorelasi untuk data *differencing* terhadap tren dapat dilihat pada Gambar 10.4. Kemudian, kita *differencing* terhadap musiman (lihat Gambar 10.5) dan plot ACF dapat dilihat pada Gambar 10.6. Berdasarkan plot ini kita menganggap model dengan beda kala 1 dan 12 mungkin cocok. Model yang kita cobakan berbentuk $ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ yaitu

$$\nabla_{12}\nabla X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} - \Theta\varepsilon_{t-12} + \theta\Theta\varepsilon_{t-13}. \quad (10.39)$$

Selanjutnya diperoleh luaran sebagai berikut:

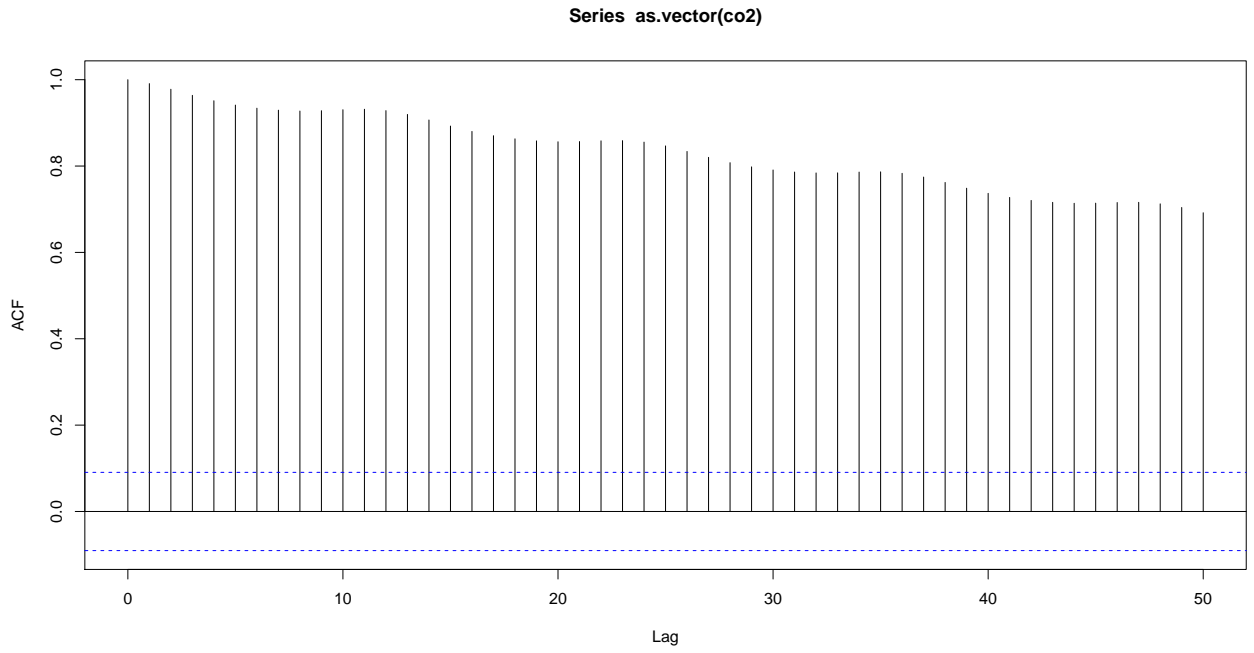
```
> sarima.co2
```

Call:

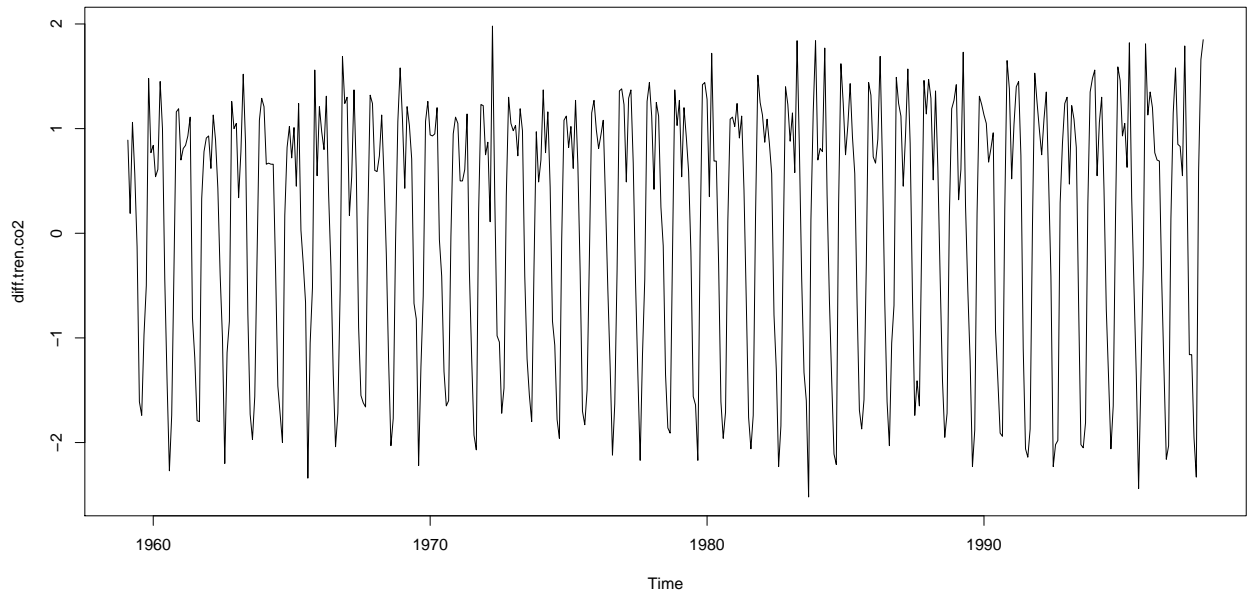
```
arima(x = co2, order = c(0, 1, 1), seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period = 12))
```

Coefficients:

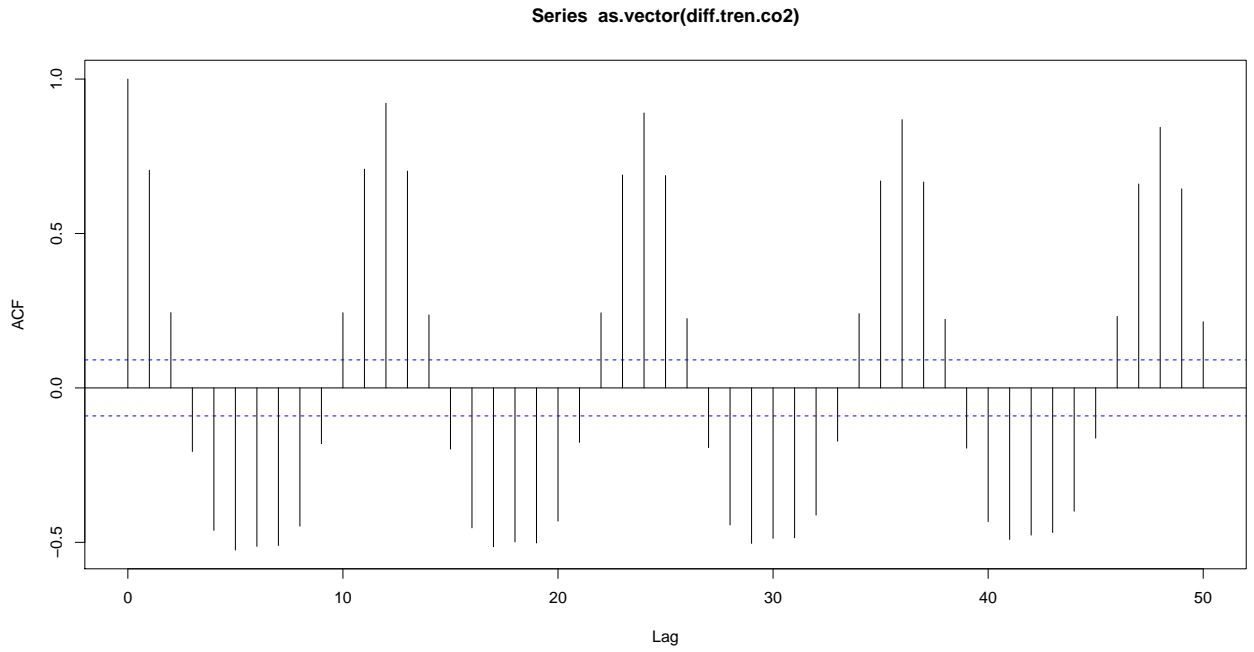
```
ma1      sma1
```



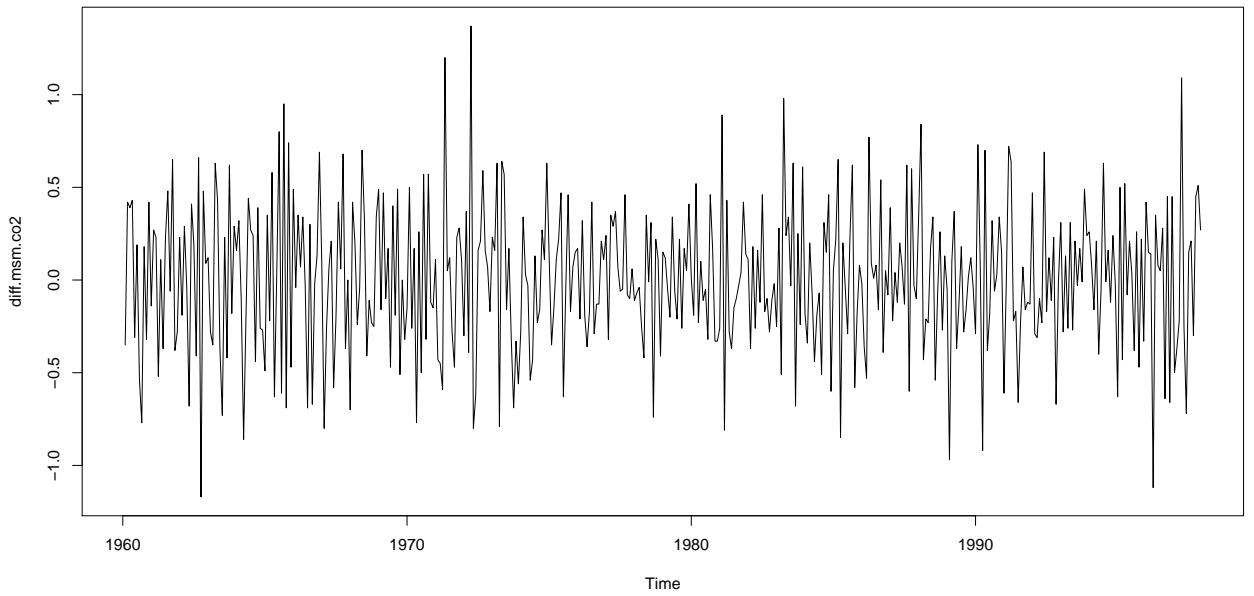
Gambar 10.2: Plot ACF data co2.



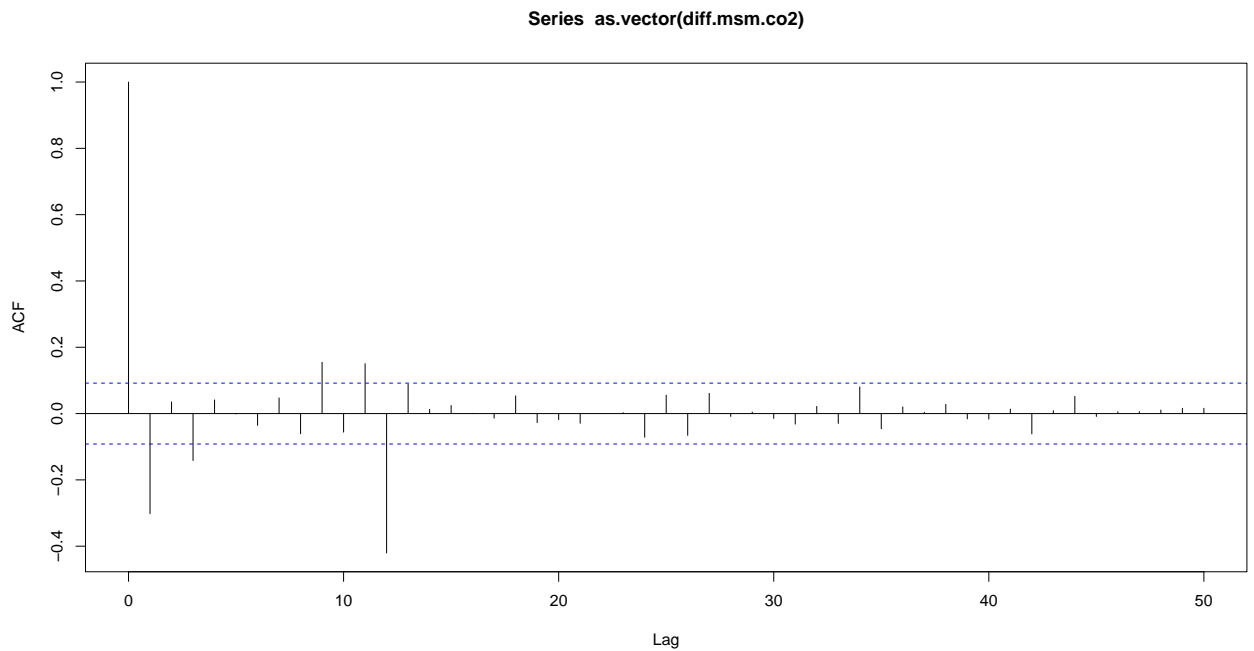
Gambar 10.3: Plot differencing terhadap tren data co2.



Gambar 10.4: Plot ACF *differencing* terhadap tren data co2.



Gambar 10.5: Plot *differencing* terhadap musiman untuk data co2.



Gambar 10.6: Plot ACF *differencing* terhadap musiman untuk data co2.

```
-0.3501  -0.8506
s.e.    0.0496   0.0257
```

```
sigma^2 estimated as 0.0826:  log likelihood = -86.08,  aic = 178.16
```

Dengan demikian kita peroleh $\hat{\theta} = -0,3501$ dan $\hat{\Theta} = -0,8506$.

10.4.1 Pemeriksaan Diagnostik

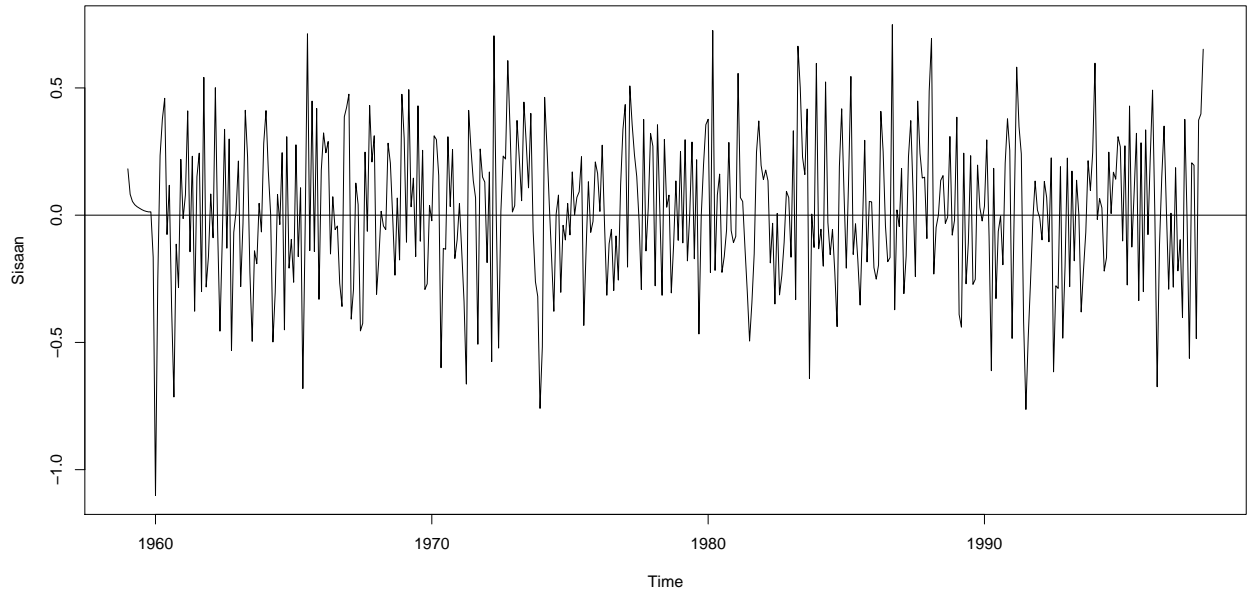
Diagnostik serupa model ARIMA juga dapat dilakukan pada model SARIMA. Plot sisaan dapat dilihat pada Gambar 10.7 dan plot Q-Q dapat dilihat pada Gambar 10.8.

Uji kenormalan dengan uji Shapiro menghasilkan p-value 0,3078. Artinya tidak cukup bukti untuk mengatakan sisaan tidak normal.

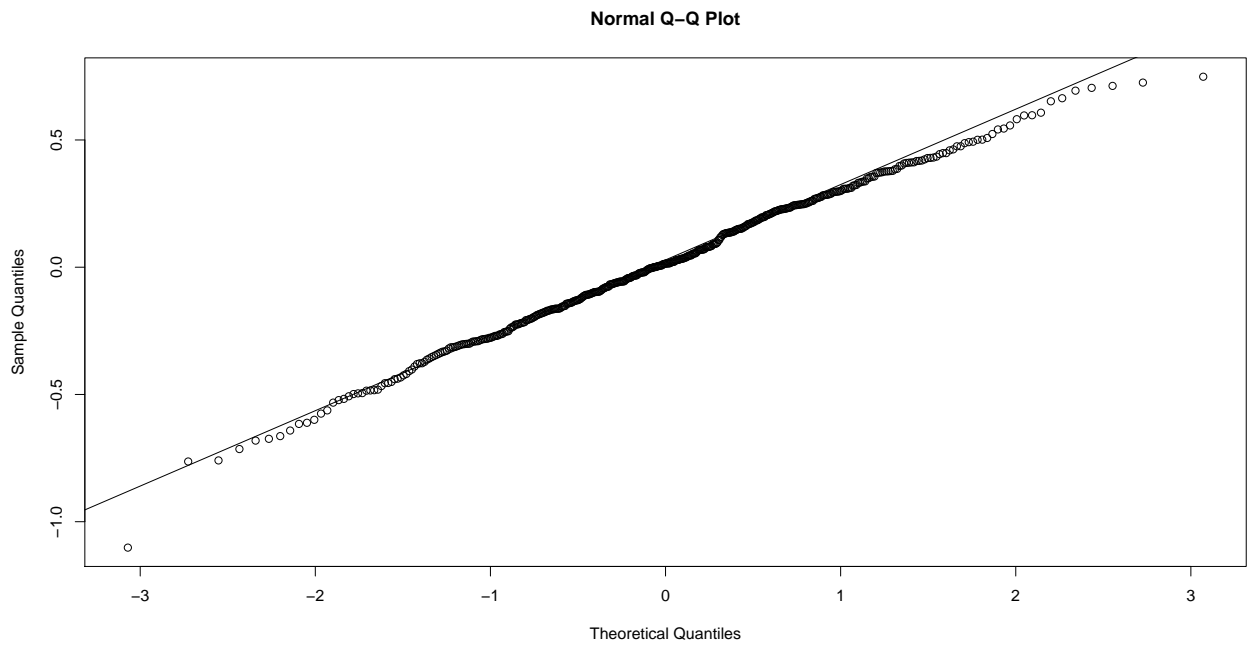
```
> shapiro.test(residuals(sarima.co2))
```

```
Shapiro-Wilk normality test
```

```
data:  residuals(sarima.co2)
W = 0.99611, p-value = 0.3078
```



Gambar 10.7: Plot sisaan model SARIMA untuk data co2.



Gambar 10.8: Plot Q-Q untuk data co2.

10.5 Pengayaan

Buku-buku seperti Cryer and Chan (2008), Shumway and Stoffer (2011), Brockwell and Davis (2016), dan Box et al. (2016) dapat digunakan untuk pengayaan lebih lanjut.

Daftar Pustaka

- George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, and Greta M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, fifth edition, 2016.
- Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York, third edition, 2016.
- Jonathan D Cryer and Kung-Sik Chan. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, New York, second edition, 2008.
- Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, New York, 2011.