MA637430 Analisis Deret Waktu | **Universitas Udayana**
Semester Ganjil 2018/2019 | **Program Studi Matematika**

Kuliah 11: Model Heteroskedastik

Koordinator Tim: I Wayan Sumarjaya (sumarjaya@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching I: I Gusti Ayu Made Srinadi (srinadi@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching II: Made Susilawati (mdsusilawati@unud.ac.id)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah
Mampu mengevaluasi kelayakan model deret waktu heteroskedastik yang sesuai (S5, S9, KU1, KU2, KU9, KK1, KK2, PP1)

Kemampuan Akhir yang Diharapkan
Mahasiswa mampu mengevaluasi kelayakan model deret waktu heteroskedastik (C5, P2, A2)

Indikator

1. Ketepatan mengevaluasi stylized fact data finansial
2. Ketepatan mengevaluasi model ARCH dan GARCH melalui spesifikasi dan estimai model dengan tepat
3. Ketepatan menggunakan R untuk menguji efek ARCH dan GARCH
4. Ketepatan menggunakan R untuk mengevaluasi model heteroskedastik pada data finansial

Bahan Kajian/Materi Ajar

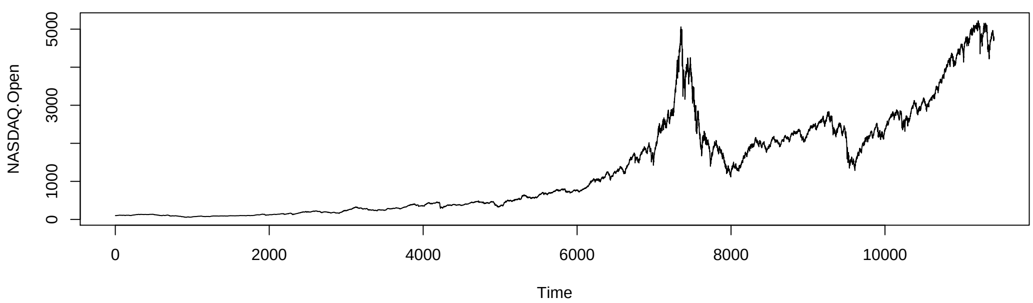
1. Stylized fact data finansial
2. Volatilitas pada data finansial
3. Model ARCH dan GARCH
4. Estimasi model ARCH dan GARCH dengan metode kemungkinan maksimum
5. Menguji efek ARCH dan GARCH
6. Aplikasi pada data finansial

Model deret waktu yang telah kita bicarakan selama ini adalah model deret wawktu yang berhubungan dengan nilai tengah bersyarat (*conditinal mean*) dari struktur deret waktu. Dengan kata lain, model ARIMA yang telah kita pelajari pada bab-bab sebelumnya berhubungan dengan prediksi nilai tengah bersyarat nilai masa depan berdasarkan data sekarang dan masa lalu. Varians bersyarat (*conditional variance*) pada model ARIMA selalu sama dengan varians galat (*noise*) untuk nilai proses sekarang dan masa lalu. Namun, dalam praktiknya varians bersyarat pada mungkin berubah atau bervariasi dengan nilai sekarang dan masa lalu proses. Hal ini berarti varians bersyarat ini adalah proses acak yang disebut proses varians bersyarat (*conditional variance process*). Sebagai contoh *return* harian harga saham sering kali memiliki varians bersyarat yang lebih tinggi pada pergerakan tertentu jika dibandingkan pada periode yang stabil.

Varians bersyarat *return* pada aset finansial biasanya diambil sebagai ukuran risiko aset. Pada pasar yang efisien, nilai harapan *return* seharusnya nol, sehingga deret return seharusnya derau putih *derau putih*. Materi pada Bab ini diadaptasi dari Cryer and Chan (2008).

11.1 Beberapa Ciri Deret Waktu Finansial

Saham biasanya tidak diperdagangkan pada akhir pekan atau hari libur. Dengan kata lain hanya diperdagangkan pada *trading days*, sehingga biasanya saham tidak berubah pada akhir pekan atau hari libur. Untuk mempermudah kita akan menganalisis data dengan menganggap data tersebut memiliki jarak yang sama. Berikut ini adalah plot data harga pembukaan saham NASDAQ periode 5 Februari 1971–15 Mei 2016 (lihat Gambar 11.1). Plot ini memperlihatkan tren global naik.

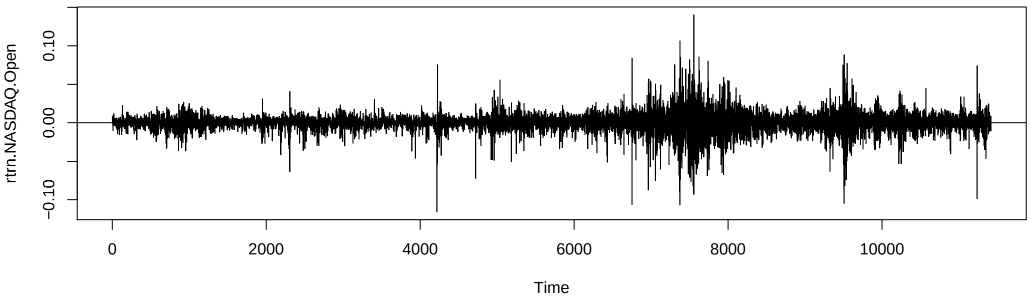


Gambar 11.1: Harga pembukaan saham NASDAQ periode 5 Februari 1971–15 Mei 2016.

Misalkan $\{p_t\}$ adalah deret waktu dari harga harian aset finansial. *Return* (dalam hal ini log return) pada hari ke-t sebagai

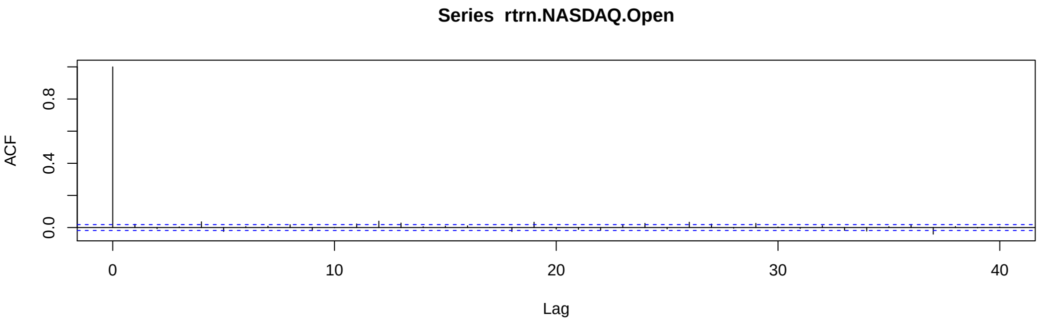
$$r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1}). \tag{11.1}$$

Kadang-kadang *return* dikalikan 100 agar bisa diinterpretasikan sebagai persentase perubahan dalam harga. Selain itu, hal ini juga akan mengurangi kesalahan numerik dari raw return yang bisa menjadi bilangan yang sangat kecil dan juga pembulatan pada beberapa perhitungan. Fungsi autokorelasi



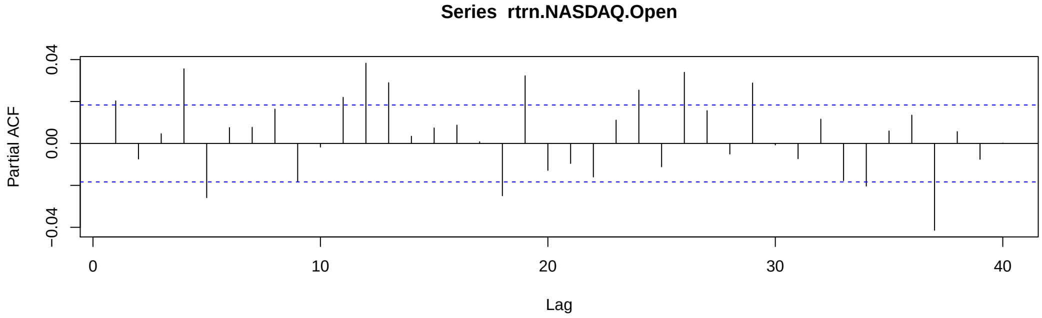
Gambar 11.2: Return NASDAQ.

sampel dan fungsi autokorelasi parsial untuk return NASDAQ dapat dilihat pada Gambar 11.3 dan Gambar 11.4. Fungsi autokorelasi sampel untuk return mutlak dan return kuadrat NASDAQ da-

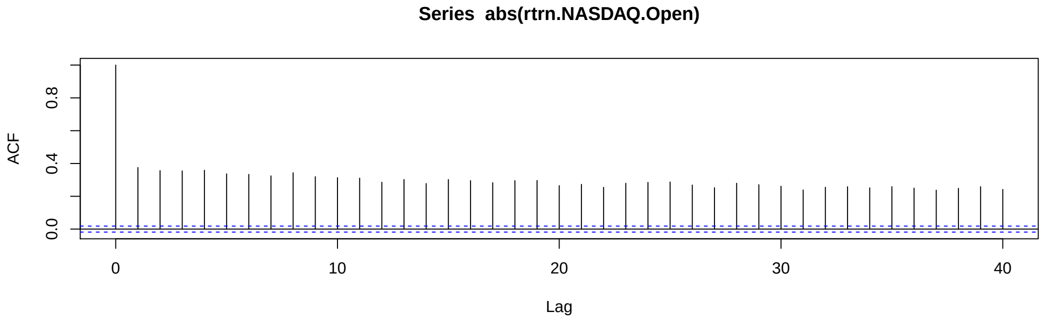


Gambar 11.3: ACF return NASDAQ.

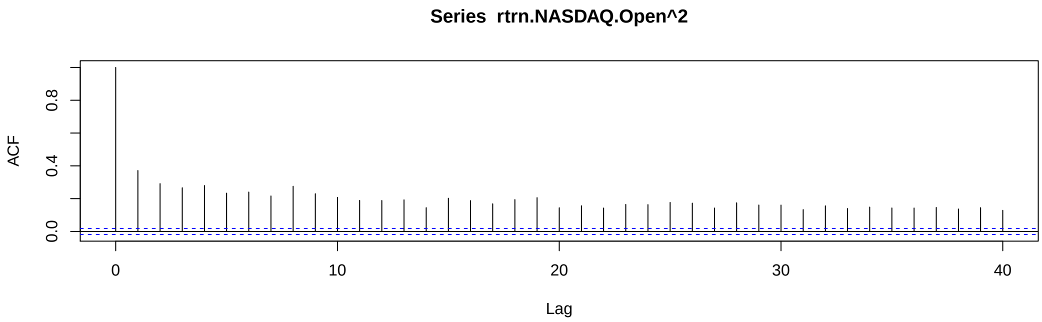
pat dilihat pada Gambar 11.5 dan Gambar 11.6. Apa tujuan kita melakukan hal ini? Pada deret waktu yang telah kita pelajari kita harus bisa membedakan deret waktu yang tidak berkorelasi dan deret waktu yang saling bebas. Jika deret waktu betul-betul saling bebas, transformasi nonlinear seperti logaritma, nilai mutlak, atau mengkuadratkan tidak mengubah sifat saling bebas. Namun, hal ini tidaklah benar untuk korelasi karena korelasi hanya mengukur kebergantungan linear. Struktur kebergantungan serial tingkat-tinggi pada data dapat dieksplorasi dengan mempelajari struktur autokorelasi pada return mutlak atau return kuadrat. Artinya, jika ACF dan PACF sampel dari return mutlak dan return kuadrat. Lihat kembali data NASDAQ. Apa yang dapat Anda simpulkan? Uji formal untuk melihat ada atau tidak autokorelasi pada data return kuadrat berautokeralasi atau tidak adalah uji Box-Ljung dan McLeod Li.



Gambar 11.4: PACF return NASDAQ.



Gambar 11.5: ACF return mutlak NASDAQ.



Gambar 11.6: ACF return kuadrat NASDAQ.

11.1.1 *Stylized Fact*

Ciri khas lain data finansial, terutama saham, disebut *stylized fact* yang memuat informasi tentang kurtosis dan kepencongan (*skewness*). Kepencongan suatu peubah acak X didefinisikan oleh

$$\mathrm{E}(X-\mu)^3/\sigma^3 \tag{11.2}$$

dengan μ adalah nilai tengah X dan σ adalah simpangan baku dari Y. Kepencongan dapat diestimasi menggunakan

$$g_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^3}{n\hat{\sigma}^3} \tag{11.3}$$

dengan $\hat{\sigma}^2 = \sum(X_i-\overline{X})^2/n$. Kemudian, kurtosis didefinisikan sebagai

$$\mathrm{E}(X-\mu)^4/\sigma^4 - 3 \tag{11.4}$$

yang dapat diestimasi menggunakan

$$g_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^4}{n\hat{\sigma}^4} - 3. \tag{11.5}$$

Nilai pada (11.5) disebut kurtosis berlebih (*excess kurtosis*). Jika kurtosis positif, sebaran data disebut *heavy-tailed*; jika kurtosis negatif, sebaran data disebut *light-tailed*. Berikut ini luaran untuk data return saham NASDAQ:

```
> library(fBasics)
> basicStats(rtrn.NASDAQ.Open)
rtrn.NASDAQ.Open
nobs            11417.000000
NAs                 0.000000
Minimum            -0.115694
Maximum             0.140231
1. Quartile        -0.004662
3. Quartile         0.006062
Mean                0.000338
Median              0.001054
Sum                 3.856736
SE Mean             0.000118
LCL Mean            0.000106
UCL Mean            0.000570
Variance            0.000160
Stdev               0.012638
Skewness           -0.450038
Kurtosis           10.715766
```

Terlihat bahwa data return saham mengalami kurtosis berlebih 7,715766 $>$ 0 yang termasuk kategori distribusi ekor gemuk (*heavy-tailed*).

11.2 Model ARCH

Pada bagian sebelumnya telah dijelaskan bahwa data *return* $\{r_t\}$ biasanya memperlihatkan *volatility clustering*. Artinya, varians bersyarat r_t diberikan nilai return sebelumnya tidaklah konstan. Varians bersyarat disebut pula volatilitas bersyarat (*conditional volality*) dari return r_t disimbolkan $\sigma^2_{t|t-1}$. Tika bawah $t-1$ menyatakan bahwa kondisi bersyarat yang dimaksud sampai dengan waktu $t-1$. Apabila r_t ada, nilai r_t^2 merupakan penduga takbias dari $\sigma^2_{t|t-1}$. Pada bagian ini kita akan membicarakan model ARCH(1) yang mengasumsikan deret return $\{r_t\}$ dibangkitkan dari proses berikut:

$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t, \tag{11.6}$$
$$\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \alpha r^2_{t-1} \tag{11.7}$$

dengan α dan ω adalah parameter yang tidak diketahui, $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan berdistribusi saling bebas dan identik dengan nilai tengah nol dan varians satu (disebut juga inovasi) dan ε_t saling bebas dengan r_{t-j}, untuk $j = 1, 2, \ldots$. Inovasi ε_t diasumsikan memiliki varians satu sehingga varians bersyarat r_t sama dengan $\sigma^2_{t|t-1}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(r_t^2|r_{t-j}, j = 1, 2, \ldots) &= \mathrm{E}(\sigma^2_{t|t-1}\varepsilon_t^2|r_{t-j}, j = 1, 2, \ldots) && (11.8)\\ &= \sigma^2_{t|t-1}\mathrm{E}(\varepsilon_t^2|r_{t-j}, j = 1, 2, \ldots) && (11.9)\\ &= \sigma^2_{t|t-1}\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) && (11.10)\\ &= \sigma^2_{t|t-1}. && (11.11) \end{aligned}$$

Pada (11.9) $\sigma_{t|t-1}$ diketahui karena telah diberikan data masa lalu atau sebelumnya. Kemudian pada (11.10) kita tahu bahwa ε_t saling bebas dengan *return* sebelumnya dan pada (11.11) diasumsikan bahwa varians ε_t sama dengan satu.

Lihat kembali model (11.7), meskipun model ARCH seperti model regresi, namun faktanya adalah varians bersyarat tersebut tidak bisa diamati secara langsung (sehingga berupa variabel laten). Hal ini tentu membuat penggunaan model ARCH dalam analisis data menjadi sulit. Misalnya, tidaklah jelas bagaimana mengeksplorasi struktur regresi secara grafis. Oleh karena itu, kita perlu mengganti varians bersyarat dengan dengan sesuatu yang bisa diamati. Misalkan

$$\eta_t = r_t^2 - \sigma^2_{t|t-1}. \tag{11.12}$$

Dapat ditunjukkan bahwa deret $\{\eta_t\}$ adalah deret yang tidak berkorelasi dengan nilai tengah nol. Lebih lanjut, η_t tidak berkorelasi dengan return masa lalu. Substitusikan $\sigma^2_{t|t-1} = r_t^2 - \eta_t$ ke dalam Persamaan (11.7) menghasilkan

$$r_t^2 = \omega + \alpha r^2_{t-1} + \eta_t. \tag{11.13}$$

Dengan demikian, kita melihat bahwa kuadrat *return* memenuhi model AR(1) di bawah asumsi model ARCH(1) untuk deret *return*. Mengingat kuadrat return haruslah taknegatif, maka cukup beralasan kalau kita membatasi parameter ω dan σ taknegatif. Demikian pula, apabila deret return stasioner dengan varians σ^2 maka dengan mengambil ekspektasi pada kedua sisi pada (11.13) kita akan peroleh

$$\sigma^2 = \omega + \alpha\sigma^2. \tag{11.14}$$

Dengan demikian $\sigma^2 = \omega/(1-\alpha)$ sehingga $0 \leq \alpha < 1$. Kondisi $0 \leq \alpha < 1$ merupakan syarat perlu dan cukup untuk stasioner lemah untuk model ARCH(1). Salah satu sifat penting model ARCH(1) adalah bahwa jika inovasi η_t berdistribusi normal, distribusi stasioner model ARCH(1) dengan $0 \leq \alpha < 1$ memiliki ekor gemuk (*fat tails*) dengan kata lain terjadi kurtosis berlebih. Lihat kembali Persamaan (11.6). Apabila kita pangkatkan empat dan ambil ekspektasi, akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(r_t^4) &= \mathrm{E}[\mathrm{E}(\sigma_{t|t-1}^4 \varepsilon_t^4 | r_{t-j}, j = 1,2,\ldots)] &(11.15)\\
&= \mathrm{E}[\sigma_{t|t-1}^4 \mathrm{E}(\varepsilon_t^4 | r_{t-j}, j = 1,2,\ldots)] &(11.16)\\
&= \mathrm{E}[\sigma_{t|t-1}^4 \mathrm{E}(\varepsilon_t^4)] &(11.17)\\
&= 3\mathrm{E}(\sigma_{t|t-1}^4). &(11.18)
\end{aligned}$$

Sekarang misalkan $\mathrm{E}(\sigma_{t|t-1}^4) = \tau$. Kemudian apabila kita kuadratkan dan ambil ekspektasi kedua sisi pada Persamaan (11.7) akan diperoleh

$$\tau = \omega^2 + 2\omega\alpha\sigma^2 + \alpha^2 3\tau \tag{11.19}$$

atau

$$\tau = \frac{\omega^2 + 2\omega\alpha\sigma^2}{1 - 3\alpha^2} \tag{11.20}$$

yang membuat kondisi keberhinggaan untuk τ yakni $0 \leq \alpha < 1/\sqrt{3}$; dalam hal ini ARCH(1) akan memiliki momen keempat berhingga.

Salah satu kegunaan utama model ARCH adalah untuk memprediksi varians bersyarat. Sebagai contoh, kita mungkin tertarik untuk meramalkan ℓ langkah ke depan dari varians bersyarat

$$\sigma_{t+\ell|t}^2 = \mathrm{E}(r_{t+h}^2 | r_t, r_{t-1}, \ldots). \tag{11.21}$$

Untuk $\ell = 1$ akan diperoleh

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \omega + \alpha r_t^2 = (1-\alpha)\sigma^2 + \alpha r_t^2. \tag{11.22}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\sigma_{t+\ell|t}^2 &= \mathrm{E}(r_{t+h}^2 | r_t, r_{t-1}, \ldots) &(11.23)\\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}(\sigma_{t+\ell|t+\ell-1}^2 \varepsilon_{t+\ell}^2 | r_{t+\ell-1}, r_{t+\ell-2}, \ldots) | r_t, r_{t-1}, \ldots] &(11.24)\\
&= \mathrm{E}[\sigma_{t+\ell|t+\ell-1}^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t+\ell}^2) | r_t, r_{t-1}, \ldots]\\
&= \mathrm{E}(\sigma_{t+\ell|t+\ell-t}^2 | r_t, r_{t-1}, \ldots)\\
&= \omega + \alpha \mathrm{E}(r_{t+\ell-1} | r_t, r_{t-1}, \ldots)\\
&= \omega + \alpha\sigma_{t+\ell-1|t}^2 &(11.25)
\end{aligned}$$

dengan $\sigma^2_{t+\ell|t} = r^2_{t+\ell}$ untuk $\ell < 0$.

Model ARCH(1) pada (11.7) dapat dikembangkan menjadi ARCH tingkat q, yakni ARCH(q), dengan bentuk

$$\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \alpha_1 r^2_{t-1} + \alpha_2 r^2_{t-2} + \cdots + \alpha_q r^2_{t-q}. \tag{11.26}$$

11.3 Model GARCH

Pendekatan lain untuk memodelkan varians bersyarat adalah dengan menambahkan p beda kala pada varians bersyarat. Model ini akan menghasilkan model GARCH dengan tingkat p dan q, dinotasikan GARCH(p, q), dengan bentuk

$$\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \beta_1 \sigma^2_{t-1|t-2} + \cdots + \beta_p \sigma^2_{t-p|t-p-1} + \alpha_1 r^2_{t-1} + \cdots + \alpha_q r^2_{t-q}. \tag{11.27}$$

Model (11.27) dapat pula dinyatakan dalam notasi pergeseran mundur (*backshift*) B sebagai

$$(1 - \beta_1 B - \cdots - \beta_p B^p)\sigma^2_{t|t-1} = \omega + (\alpha_1 B + \cdots + \alpha_q B^q) r^2_t. \tag{11.28}$$

Pada bagian sebelumnya kita telah mendefinisikan $\eta_t = r^2_t - \sigma^2_{t|t-1}$ atau $\sigma^2_{t|t-1} = r^2_t - \eta_t$. Kemudian apabila disubstitusikan ke Persamaan (11.27) akan menghasilkan

$$r^2_t = \omega + (\beta_1 + \alpha_1) r^2_{t-1} + \cdots + (\beta_{\max(p,q)} + \alpha_{\max(p,q)}) r^2_{t-\max(p,q)} + \eta_t - \beta_1 \eta_{t-1} - \cdots - \beta_p \eta_{t-p} \tag{11.29}$$

dengan $\beta_k = 0$ untuk semua bilangan bulat $k > p$ dan $\alpha_k = 0$ untuk $k > q$. Ini berarti model GARCH(p, q) untuk deret return berimplikasi bahwa model return kuadrat adalah model ARMA($\max(p, q), p$). Sehingga teknik identifikasi model ARMA untuk deret return kuadrat dapat digunakan untuk mengidentifikasi p dan $\max(p, q)$.

Kondisi kestasioneran untuk model GARCH dapat diperoleh sebagai berikut. Asumsikan untuk sementara bahwa proses return adalah stasioner lemah. Ambil ekspektasi pada kedua sisi pada Persamaan (11.27) akan menghasilkan varians tak bersayarat (*unconditional variance*)

$$\sigma^2 = \omega + \sigma^2 \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\beta_i + \alpha_i) \tag{11.30}$$

atau

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\beta_i + \alpha_i)} \tag{11.31}$$

yang akan berhingga jika

$$\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\beta_i + \alpha_i) < 1. \tag{11.32}$$

Kondisi (11.32) merupakan syarat perlu dan syarat cukup untuk stasioner lemah dari suatu model GARCH(p, q). Peramalan untuk ℓ langkah ke depan, yakni untuk sebarang $\ell > 1$ dinyatakan oleh

$$\sigma^2_{t+\ell|t} = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sigma^2_{t+\ell-i|t} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \hat{\sigma}^2_{t+\ell-i|t+\ell-i-1} \tag{11.33}$$

dengan

$$\sigma^2_{t+\ell|t} = r^2_{t+\ell}, \quad \text{untuk } \ell < 0 \tag{11.34}$$

dan

$$\hat{\sigma}^2_{t+\ell-i|t+\ell-i-1} = \begin{cases} \sigma^2_{t+\ell-i|t}, & \text{untuk } \ell - i - 1 > 0, \\ \sigma^2_{t+\ell-i|t+\ell-i-1}, & \text{untuk } \ell \text{ lainnya.} \end{cases} \tag{11.35}$$

11.4 Pengayaan

Buku-buku seperti Cryer and Chan (2008), Shumway and Stoffer (2011), Brockwell and Davis (2016), Box et al. (2016), dan Tsay (2010) dapat digunakan untuk pengayaan lebih lanjut.

Daftar Pustaka

George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, and Greta M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons, Inc.,, Hoboken, New Jersey, fifth edition, 2016.

Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York, third edition, 2016.

Jonathan D Cryer and Kung-Sik Chan. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, New York, second edition, 2008.

Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, New York, 2011.

Ruey S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, third edition edition, 2010.