Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3

Pertemuan 09 : Pemodelan sinyal dengan teknik Prony

Oleh : Koredianto Usman

Versi : Juni 2020

Pemodelan sinyal

1. Yang dimaksud dengan pemodelan sinyal adalah bagaimana suatu sinyal dinyatakan atau direpresentasikan dengan parameter yang diperlukan untuk membangkitkan sinyal tersebut
2. Pemodelan sinyal adalah salah satu aspek penting dalam pengolahan sinyal
3. Pemodelan sinyal memungkin untuk merepresentasikan sinyal dalam jumlah parameter yang sedikit
4. Parameter yang lebih sedikit ini menguntungkan dalam hal transmisi dan penyimpanan karena menghemat bandwidth dan space penyimpanan.
5. Pada slide 8 dan 9 ini akan bahas teknik pemodelan sinyal dengan metode Pade dan Prony
6. Jika pada slide 8 ssudah dibahas tentang metode Pade, maka pada Slide 9 ini kita akan bahas terkait teknik Prony

Metode Prony

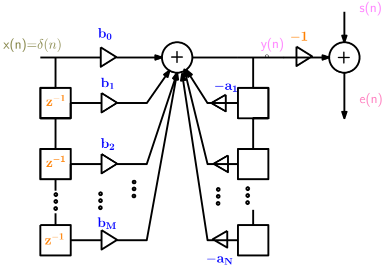
1. Metode Prony diusulkan oleh Gaspard Clair François Marie Riche de Prony (22 July 1755 – 29 July 1839)
2. Prony adalah ilmuan dari Perancis

Gaspard Prony

3. Seperti halnya metode Pade, metode Prony memerlukan sinyal referensi yang akan dimodelkan $s(n)$
4. Berbeda dengan metode Pade yang hanya dapat memodelkan sepanjang M+N+1
5. Maka metode Prony dapat digunakan untuk memodelkan sinyal yang lebih panjang. Secara teori, panjangnya sinyal yang dapat dimodelkan tidak terbatas.

Metode Prony

1. Untuk realisasi, Metode Prony dapat direalisasikan dengan filter ARMA(N,M) dengan struktur di bawah.
2. Input filter berupa sinyal impulse $x(n) = \delta(n)$
3. Tinjau struktur ARMA(N,M) berikut:



4. Koefisien MA (b_0 sampai b_M) serta koefisien AR (a_1 sampai a_N) perlu dicari agar keluaran filter y(n) sedekat mungkin dengan sinyal referensi $s(n)$

Pemilihan Orde Filter

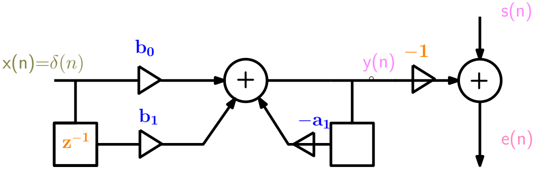
1. Jika panjang dari sinyal yang akan dimodelkan $s(n)$ adalah P (dari s(0) sampai s(p-1))
2. Jika digunakan ARMA(N,M), maka jumlah koefisien filter adalah N+M+1
3. Pada model Prony, panjang filter P adalah lebih besar dibandingkan dengan derajat kebebasan filter :

$$N + M + 1 < P$$

4. Pada realisasinya, metode Prony melakukan fitting least square pada bagian AR dengan pencarian koefisien AR (a_1 dan seterusnya) dilakukan dengan metode Least Square.

Pemodelan Prony

1. Pemodelan Pade dimulai dengan menjabarkan keluaran filter 1 per satu berdasarkan prinsip konvolusi.
2. Tinjau filter ARMA(1,1) seperti contoh gambar berikut:



3. Terdapat 3 derajat kebebasan pada filter ini yakni b_0, b_1, dan a_1
4. Misal panjang sinyal adalah 4 : yaitu $\mathbf{s} = [s_0 \ s_1 \ s_2 \ s_3]$

Pemodelan Pade

1. Dengan menggunakan prinsip konvolusi diperoleh keluaran sebagai berikut:
2. $y(0) = b_0$
3. $y(1) = b_1 - b_0 a_1$
4. $y(2) = -a_1(b_1 - b_0 a_1) = -a_1 b_1 + b_0 a_1^2$
5. Oleh karena sinyal keluaran ini harus sama dengan sinyal referensi **s**, maka diperoleh:
6. $s_0 = y(0) = b_0$
7. $s_1 = y(1) = b_1 - b_0 a_1 = b_1 - s_0 a_1$
8. $s_2 = y(2) = -a_1(b_1 - b_0 a_1) = -a_1 s_1$
9. $s_3 = y(3) = -a_1 [(-a_1(b_1 - b_0 a_1)] = -a_1 s_2$

Pemodelan Prony

Susun ulang persamaan sebelumnya dalam **b**, **a**, dan **s**:

1. $s_0 = b_0$
2. $s_1 = b_1 - s_0 a_1$
3. $s_2 = -a_1 s_1$
4. $s_3 = -a_1 s_2$

Susun ulang sekali lagi sehingga ruas kanan hanya ada komponen b saja dan ruas kiri ada komponen s dan a, kita peroleh :

1. $s_0 = b_0$
2. $s_1 + s_0 a_1 = b_1$
3. $s_2 + a_1 s_1 = 0$
4. $s_3 + a_1 s_2 = 0$

Pemodelan Prony

Set persamaan terakhir:

1. $s_0 = b_0$
2. $s_1 + s_0 a_1 = b_1$
3. $s_2 + a_1 s_1 = 0$
4. $s_3 + a_1 s_2 = 0$

Disebut juga dengan Set Persamaan Prony.
Secara matriks dapat ditulis menjadi:

$$\begin{bmatrix} s_0 & 0 \\ s_1 & s_0 \\ s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sekilas, set persamaan Prony ini adalah sama dengan set persamaan Pade. Perbedaannya terletak pada jumlah baris yang lebih banyak karena panjang sinyal **s** lebih besar.

Pemodelan Prony

1. Dalam menyelesaikan set persamaan Prony untuk kasus yang dibicarakan:

$$\begin{bmatrix} s_0 & 0 \\ s_1 & s_0 \\ s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Maka kita bagi persamaan tersebut menjadi bagian AR dan MA
3. Bagian AR adalah baris 3 dan baris 4 (yang mengandung nilai 0 dan 0 pada ruas kanan)
4. Pisahkan baris 3 dan 4 tersebut kita peroleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pemodelan Prony

1. Atau: $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_2 \\ -s_3 \end{bmatrix}$
2. Kalikan kedua ruas dengan $\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix}$ (penyelesaian secara Least Square)
3. diperoleh: $(s_1^2 + s_2^2)a_1 = -s_1 s_2 - s_2 s_3$
4. Atau: $a_1 = \frac{-s_1 s_2 - s_2 s_3}{s_1^2 + s_2^2}$
5. Setelah a_1 diperoleh, maka nilai b_0 dapat dicari dengan menggunakan baris 1 dari set persamaan Prony
6. dan b_1 diperoleh dari baris 2.
7. Untuk lebih jelasnya, maka kita lihat ilustrasi dengan soal pada slide berikut:

Ilustrasi

1. Misalkan sinyal referensi adalah $s(n) = [1\ 5\ 3\ 2]$, akan dimodelkan dengan Pade ARMA(1,1)
2. Tuliskan set persamaan Prony!
3. Cari koefisien filter ARMA(1,1) tersebut!

Jawab:

1. Dengan ARMA(1,1) dan panjang sinyal 4 maka set persamaan Prony menjadi
2. $$\begin{bmatrix} s_0 & 0 \\ s_1 & s_0 \\ s_2 & s1 \\ s_3 & s2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jawab - lanjutan1

1. Dengan memasukkan nilai-nilai **s** kita peroleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Selesaikan **baris 3** dan **baris 4**:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   diperoleh

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. setelah kedua ruas dikalikan dengan [5 3] diperoleh:
   $a_1 = \frac{-21}{34}$

Jawab - lanjutan2

1. Dari baris pertama set persamaan prony kita peroleh: $b_0 = 1$
2. dari baris kedua, diperoleh: $5 + a_1 = b_1 \rightarrow b_1 = 5 - \frac{21}{34} = 4\frac{13}{34}$
3. Dengan demikian koefisien berdasarkan model Prony ini adalah: $a_1 = -\frac{21}{34}$, $b_0 = 1$, dan $b_1 = 4\frac{13}{34}$

Latihan 01

1. Sinyal $s(n) = [4 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 2]$, akan dimodelkan dengan Prony ARMA(1,1)
2. Tuliskan set persamaan Prony!
3. Cari koefisien filter ARMA(1,1) tersebut!

Jawab:

Sistem ARMA(2,1)

1. Set Persamaan Prony dapat pula diterapkan pada sistem ARMA(2,1) dan ARMA(N,M) dengan N$>$M
2. Unutk ARMA(2,1) derajat kebebasan filter adalah 4 dengan 4 koefisien filter yaitu: a_1, a_2, serta b_0 dan b_1
3. Panjang sinyal **s** yang dapat dimodelkan dapat lebih besar dari 4, misal 5 yaitu $\mathbf{s} = [s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ \ s_4]$
4. Set Persamaan Untuk ARMA(2,1) adalah:

$$\begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_0 & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_4 & s_3 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, maka dimulai dari penyelesaian baris 3, 4 dan 5 untuk memperoleh a_1 dan a_2

Sistem ARMA(1,2)

1. Set Persamaan Pade dapat pula diterapkan pada sistem ARMA(1,2) dan ARMA(N,M) dengan N$<$M
2. Untuk ARMA(1,2) derajat kebebasan filter adalah 4 dengan 4 koefisien filter yaitu: a_1, serta b_0, b_1 dan b_2
3. Panjang sinyal **s** yang dapat dimodelkan lebih dari 4, misal 5 yaitu $\mathbf{s} = [s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ \ s_4]$
4. Set Persamaan Untuk ARMA(1,2) adalah:

$$\begin{bmatrix} s_0 & 0 \\ s_1 & s_0 \\ s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \\ s_4 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, maka dimulai dari penyelesaian baris 3, 4 dan 5 untuk memperoleh a_1 dan a_2

Latihan Soal

1. Sinyal $s(n) = [4\ 4\ 2\ 1\ 1]$, akan dimodelkan dengan Prony ARMA(2,1)
2. Tuliskan set persamaan Prony!
3. Cari koefisien filter ARMA(2,1) tersebut!
4. Sama dengan dengan soal di atas namun realisasikan dnegan ARMA(1,2). Carilah koefisien dari ARMA(1,2) tersebut!