FUNGSI PEUBAH KOMPLEKS

Oleh:

Ganis Yoga Purnama (1907050027)

TOPIK : FUNGSI ANALITIK DAN FUNGSI HARMONIK

- Ringkasan Topik

Materi fungsi analitik bisa dikatakan sebagai konsep terpenting dalam teori peubah kompleks. Fungsi-fungsi yang memiliki sifat analitik mewarisi suatu struktur dalam yang sangat kokoh dan ini dimanifestasikan ke luar oleh sifat-sifat yang dimiliki oleh fungsi-fungsi yang analitik. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

FUNGSI ANALITIK

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik (disebut juga dengan holomorfik atau regular atau monogenik) pada titik z_0 , asalkan turunannya ada disemua titik pada suatu lingkungan $z_0{}'$.

Dari definisi tersebut terlihat bahwa ada hubungan antara diferensiabilitas dan analitisitas suatu fungsi pada suatu titik. Tetapi tetap ada perbedaan konsep diantara keduanya, analitisitas di z_0 berimplikasi diferensibilitas di z_0 tetapi tidak sebaliknya.

FUNGSI ANALITIK

Diferensibilitas tidak berimplikasi pada pada analitisitas karena secara umum f' boleh ada pada sebarang tipe himpunan bahkan pada titik terasing atau suatu penggal garis. Sedangkan analitisitas berhubungan sangat erat dengan himpunan terbuka, hal ini sesuai dengan definisi analitisitas di z_0 yang menghendaki bahwa f' harus ada pada lingkungan tertentu dari titik tersebut.

CONTOH

Teliti apakah fungsi $f(z) = x^2 - iy^2$ analitik?

- Penyelesaian

Telah diketahui bahwa fungsi diatas memiliki turunan hanya pada titik-titik di sepanjang garis $y = -x$.

Setiap lingkungan bagi setiap titik pada garis itu memuat titik-titik yang berada diluar garis $y = -x$ yang mengakibatkan f' tidak ada. Hal ini mengakibatkan f tidak analitik dimana- mana, karena analitisitas pada suatu titik menurut adanya f' di seluruh lingungan pada titik tersebut.

FUNGSI MENYELURUH

Jika suatu fungsi analitik pada setiap titik dalam suatu himpunan S, maka fungsi tersebut dikatakan analitik pada S.

Suatu fungsi yang analitik pada seluruh bidang kompleks dinamakan fungsi menyeluruh.

Fungsi polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ merupakan fungsi menyeluruh karena $P'(z)$ ada pada semua z.

Suatu fungsi yang terbentuk dari hasil bagi dua fungsi menyeluruh dinamakan **fungsi meromorfik**.

CONTOH

Teliti apakah fungsi

$$f(z) = \frac{z^3 - z + 1}{z^2 + 1}$$

analitik?

- Penyelesaian

Fungsi diatas adalah hasil bagi dua fungsi menyeluruh, karena pembilang dan penyebutnya merupakan polinomial.

Diketahui $f'(z)$ ada untuk semua nilai z, kecuali pada $z = \pm i$ yang tidak terdefinisikan. Maka f analitik pada semua z kecuali di i dan $-i$.

TITIK SINGULAR

Suatu titik z_0 dinamakan singularitas atau titik singular bagi fungsi f jika dan hanya jika f gagal menjadi analitik pada $z_0$dan setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik yang membuat f analitik.

Pada contoh sebelumnya, f analitik kecuali pada z = $\pm i$. Jadi pada fungsi tersebut titik i dan $-i$ merupakan singularitas. Sedangkan fungsi pada contoh sebelumnya tidak memiliki singularitas meskipun fungsi tersebut gagal menjadi analitik pada setiap titik z dalam bidang datar.

Teorema

Andaikan

- $f\ (z)$ dan $g(z)$ analitik pada himpunan S.
- f analitik pada setiap $g(z)$ untuk semua z dalam S

Maka jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi, dan gabungan (komposisi) f dan g juga merupakan fungsi analitik pada setiap titik di S asalkan terdefinisikan.

Teorema

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, Andaikan bahwa

- Fungsi-fungsi u,v dan turunan parsialnya $u_x, v_x, u_y \, dan \, v_y$ kontinu disemua titik didalam suatu lingkungan tertentu N dari titik z_0 .
- Persamaan Cauchy-Riemann $u_x = u_y \, dan \, v_x = -u_y$ berlaku pada setiap titik di N.

Maka $f(z)$ analitik pada z_0

CONTOH

Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = 3z^4$ adalah analitik:

- Jawab :

$$3z^4 = 3(x+iy)^4 = 3(x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4)$$
$$= 3(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 3i(4xy^3 - 4xy^3)$$
$$= (3x^4 - 18x^2y^2 + 3y^4) + i(12x^3y - 12xy^3)$$

Sehingga diperoleh fungsi:

$u(x,y) = (3x^4 - 18x^2y^2 + 3y^4)$ dan
$v(x,y) = (12x^3y - 12xy^3)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^3 - 36xy^2$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -36x^2y + 12y^3$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 36x^2y - 12y^3$ dan $\frac{\partial v}{\partial y} = 12x^3 - 36xy^2$

Jadi $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x},$ dan $\frac{\partial v}{\partial y}$ kontinu di setiap titik (x, y).

CONTOH

Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = 3z^4$ adalah analitik:

- Jawab :

Ternyata memenuhi syarat Cauchy-Riemann (C-R), yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jadi $f(z) = 3z^4$ adalah fungsi analitik

Teorema

Andaikan fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada z_0 . Maka berlaku

$u_x = u_y \; dan \; v_x = -u_y$

Pada setiap titik di suatu lingkungan titik z_0

FUNGSI HARMONIK

Fungsi yang analitik memiliki sifat yang istimewa yaitu jika f analitik pada titik z_0 , maka f' juga analitik.

Dari sifat ini selanjutnya dikembangkan suatu teori yang menjadi penghubung antara teori dan terapan fungsi kompleks.

- Misalkan $f(z) = u + iv$ analitik pada z_0; maka f' juga analitik pada z_0. Selanjutnya karena f'' adalah turunan dari f' maka f'' juga analitik pada z_0 dan demikian pula semua turunan f. Karena fungsi yang diferensiabilitas juga kontinu, maka $f\,'$,$f\,''$,$f\,'''$,... semua kontinu pada z_0 .

FUNGSI HARMONIK

Dari teorema diketahui bahwa turunan fungsi kompleks dapat dinyatakan dalam turunan parsial fungsi-fungsi komponennya.

Selanjutnya, karena $f\,',f\,'',f\,'''$,... kontinu pada z_0 , akibatnya turunan parsial dari fungsi u dan v untuk semua tingkat juga kontinu. Kenyataan ini berakibat bahwa turunan parsial silang tingkat dua adalah sama

- $u_{xy} = u_{yx}\ dan\ v_{xy} = v_{yx}$

FUNGSI HARMONIK

Kenyataan lain menunjukkan bahwa f analitik pada z_0 , akibatnya

- $u_x = v_y \; dan \; v_x = -u_y$

dengan melakukan diferensiasi pada fungsi tersebut diperoleh

- $u_{xx} = y_{yx}$, $v_{xx} = -u_{yx}$, $u_{xy} = v_{yy}$, $v_{xy} = -u_{yy}$

Dengan melakukan substitusi diperoleh

- $u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\; dan \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$

FUNGSI HARMONIK

Persamaan ini dikenal dengan persamaan Laplace.

Sebarang fungsi $f(x, y)$ yang memenuhi persamaan Laplace didalam suatu lingkungan titik $z_0 = (a, b)$ dikatakan harmonik pada z_0 , asal fungsi tersebut memiliki turunan parsial tingkat dua yang kontinu pada titik tersebut.

Jadi, komponen-komponen nyata dan khayal fungsi analitik $f = u + v$ merupakan fungsi harmonik. Pasangan fungsi harmonik ini dinamakan fungsi harmonik sekawan.

FUNGSI HARMONIK

Bila diberikan suatu fungsi harmonik u, maka dapat diperoleh harmonik sekawannya ii dan kemudian membentuk fungsi analitik

$f(z) = u + iv$.

Proses memperoleh harmonik sekawan ini bisa dilihat melalui contoh

CONTOH

Carilah harmonik sekawan dari fungsi $v(x, y) = xy$

- Jawab :

Pertama dicek apakah v harmonik, dan karena $v_{xx} + v_{yy} = 0$ jelas bahwa v harmonik. Selanjutnya akan dicari harmonik sekawannya yaitu $u(x,y)$ sehingga $f(zz) = u + iv$ analitik.

Jika f analitik, maka persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi. Karenanya v_y=x, haruslah u_x= x. Dengan integrasi diperoleh

$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + h(y)$

CONTOH

Dari hasil integrasi ini diperoleh u_y= $h'(y)$. Karena f analitik maka haruslah $u_y = -v_x$. Sedangkan $v(x, y) = xy$, sehingga $v_x = y$. Artinya $h'(y)$ = $-y$.

Dengan integrasi diperoleh

- $h(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c$

Jadi diperoleh $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + c$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} f &= u + iv \\ &= \frac{1}{2}z^2 + c \end{aligned}$$

REFERENSI

- Kadir. (2016). *Fungsi Peubah Kompleks*. UIN Jakarta.
- Kusumawinahyu, W. M. (2017). *Fungsi Kompleks*. Universitas Brawijaya Press.
- Lubab, A. (2015). Fungsi kompleks: buku perkuliahan Program S-1 Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Sunan Ampel Surabaya.