



Matematika Diskret

Mahmud Imrona

Rian Febrian Umbara



Relasi





Relasi Ekuivalen





Relasi Ekuivalen

Relasi ekuivalen adalah relasi yang memenuhi ketiga sifat sekaligus: refleksif, simetri, dan transitif

Contoh 17

Apakah $R = \{(a, b) \mid a = b \text{ atau } a = -b, a, b \in \mathbb{Z}\}$, bersifat: refleksif, simetri, dan transitif?

Jawab:

Jelas dipenuhi $a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$, berarti $(a, a) \in R$ atau bersifat refleksif.



Untuk sifat simetri, terdapat dua kemungkinan:

Jika $a=b$, berarti $(a, b) \in R, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $b=a$, berarti $(b, a) \in R$

Jika $a=-b$, berarti $(a, b) \in R, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $b=-a$, berarti $(b, a) \in R$,

Sehingga R bersifat simetri.





Untuk sifat transitif, mempunyai empat kemungkinan:

Jika $a=b$, dan $b=c$, maka $a=c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Jika $a=b$, dan $b=-c$, maka $a=-c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Jika $a=-b$, dan $b=c$, maka $a=-c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Jika $a=-b$, dan $b=-c$, maka $a=c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Sehingga R bersifat transitif.

Jadi, R relasi ekuivalen.



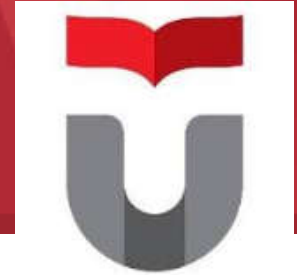
Kelas Ekuivalen dan Partisi

Kelas Ekuivalen

Jika R relasi ekuivalen atas A , dapat didefinisikan kelas ekuivalen dari $a \in A$, yaitu:

$$[a]_R = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$$

dibaca: semua anggota A yang berelasi dengan $a \in A$.



Dua elemen yang direlasikan oleh relasi ekuivalen disebut ekuivalen. Artinya jika $a R b$, maka a ekuivalen dengan b . Hal ini disebabkan oleh relasi ekuivalen bersifat simetri, yang berarti bolak-balik, berarti suatu elemen akan ekuivalen dengan dirinya sendiri. Sedangkan dari sifat transitif, jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka didapat a dan c ekuivalen juga.

Jika dituliskan $b \in [a]_R$, b disebut representative dari class ekuivalen ini.



Contoh 18:

$$A = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$R = \{(a, b) \mid a = b \text{ atau } a = -b, \text{ dan } a, b \in A\}$$

Tentukan semua kelas ekivalen yang terbentuk.

Jawab:

$$R = \{(-2, -2), (-1, -1), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$$

$$[-1]_R = \{-1, 1\} \quad [1]_R = \{-1, 1\}$$

Akibatnya $[1] = [-1]$, berarti 1 dan -1 ekivalen.

$$[0]_R = \{0\} \quad [-2]_R = \{-2\}$$



Contoh 19:

$$A = \{0, 1, 2, 6, 9\}$$

$$R = \{(a, b) \mid 2 \text{ habis membagi } a - b, \text{ dan } a, b \in A\}$$

Tentukan semua kelas ekivalen yang terbentuk.

Jawab:

$$R = \{(0,0), (0,2), (0,6), (1,1), (1,9), (2,0), (2,2), (2,6), (6,0), (6,2), (6,6), (9,1), (9,9)\}$$

$$[0] = [2] = [6] = \{0, 2, 6\} ; [1] = [9] = \{1, 9\}$$



Partisi

Class ekuivalen membentuk partisi dari himpunan A .
Definisi Partisi dari himpunan A adalah sub-sub himpunan A yang mempunyai sifat:

jika $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq A$, maka dipenuhi dua hal sekaligus:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A \quad \{\text{keseluruhan menjadi satu utuh } A\}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ jika } i \neq j, \text{ dan } i, j = 1, 2, \dots, n \quad \{\text{tak ada irisan}\}$$





Contoh 20:

Apakah kelas-kelas ekuivalen pada Contoh 18 memenuhi sifat partisi?

Jawab:

1) $[1] \cup [-2] \cup [0] = A$

2) $[1] \cap [-2] = \emptyset$, $[1] \cap [0] = \emptyset$, dan $[0] \cap [-2] = \emptyset$

Jadi, partisi A terhadap relasi R adalah: $[1]$, $[-2]$, dan $[0]$



Contoh 21:

Jika $A = \{-2, -1, 3, 4, 5, 8\}$ dan relasi
 $R = \{(a, b) \mid 2 \text{ habis membagi } (a-b), a, b \in A\}$.
Tentukan Partisi dari A terhadap relasi R .

Jawab:

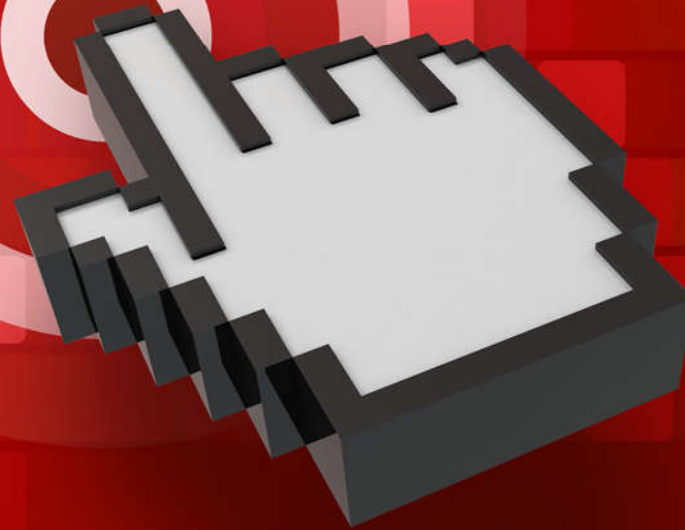
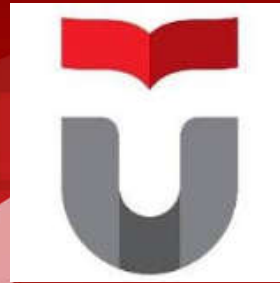
Partisi dari A terhadap relasi R adalah:

$$[-2] = \{-2, 4, 8\}$$

$$[-1] = \{-1, 3, 5\}$$



Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University



THANK YOU

