Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Matematika Diskret

Mahmud Imrona

Rian Febrian Umbara

Relasi

Relasi Terurut Parsial

Relasi Terurut Parsial

Relasi atas S yang memenuhi sifat refleksif, antisimetri, dan transitif disebut Relasi Terurut Parsial. Himpunan S bersama-sama dengan Relasi Terurut Parsial R disebut Poset (*Partially Ordered Set*), ditulis (S,R).

Contoh 22:

Apakah A = {1, 2, 3, 4} dengan relasi R = {(a, b)| $a \leq b$, a, b $\in$ A } termasuk Relasi Terurut Parsial?

Jawab:

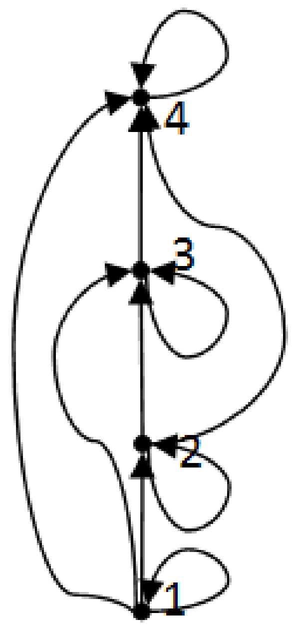
Kita dapatkan matrik zero-one sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c c}
\leq & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Karena pada diagonal utama semua entry bernilai 1, maka R bersifat refleksif

Karena untuk semua entry untuk $i \neq j$ berlaku jika $a_{ij} = 1$, dan $a_{ji} = 0$, berarti relasi R bersifat antisimetri.

Untuk memperlihatkan sifat transitif digunakan diagram digraph:



a≤ b dan b≤c, maka didapat a≤c jadi bersifat transitif.

Terlihat bahwa setiap (a, b) ∈ R dan (b, c) ∈ R, maka selalu ada (a,c) ∈ R, berarti transistif.

Jadi R Relasi Terurut Parsial.

Contoh 23:

Apakah relasi berikut:

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 18\}$ dengan $R = \{(a, b) \mid a$ habis membagi b, dan $a, b \in A\}$

termasuk Relasi Terurut Parsial?

Jawab:

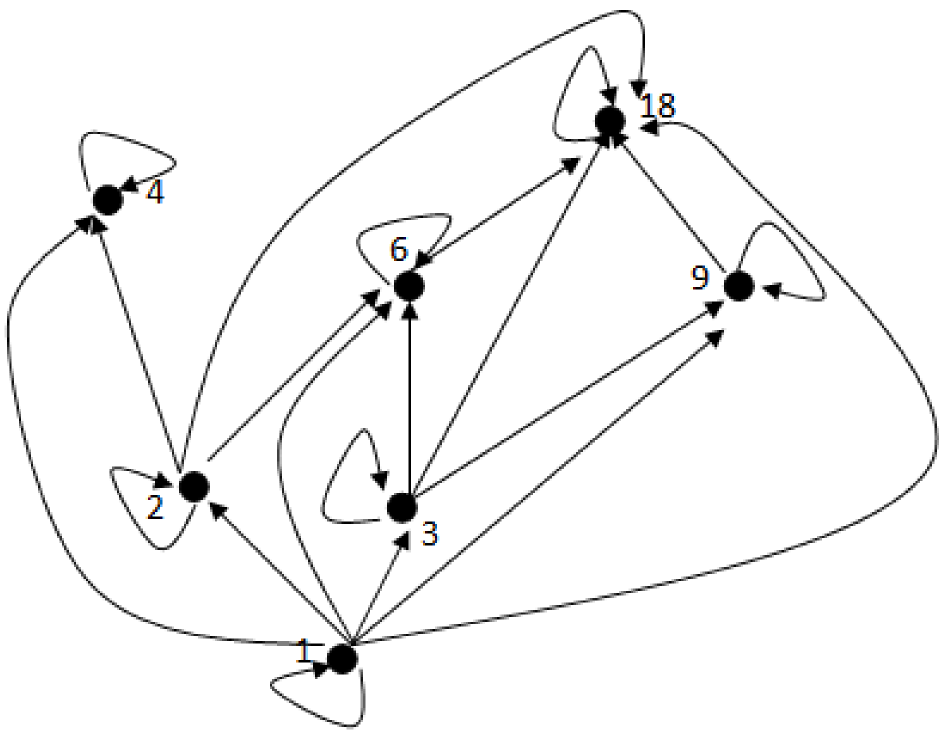
kita dapatkan matrik zero-one sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 & 18 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Terlihat semua entry pada diagonal utama selalu 1, berarti refleksif

Terlihat pula untuk entry a_{ij} yang bernilai 1, maka selalu a_{ji} bernilai 0, dan ketika a_{ij} bernilai 0, maka a_{ji} bernilai 0 juga, berarti antisimetri

Untuk memperlihatkan sifat transitif lebih enak jika menggunakan diagram digraph:



Terlihat bahwa jika ada (a,b)∈R dan (b,c)∈R, maka ada (a,c)∈R, sehingga R transitif.

Jadi R relasi terurut parsial.

Comparable

Pada Poset notasi a $\preccurlyeq$ b, berarti (a, b)$\in$R. Berikutnya dikenal juga istilah *comparable* antara dua anggota Poset, dimana a dan b disebut *comparable* jika a $\preccurlyeq$ b **atau** b $\preccurlyeq$ a. Jika tidak memenuhi disebut *incomparable*.

Contoh 24

Pada poset (Z^+, |) apakah 3 dan 9 *comparable*? Apakah 5 dan 8 *comparable*? Apakah 12 dan 4 *comparable*?

Jawab:

3 dan 9 termasuk *comparable*, karena 9 habis dibagi 3, sekalipun 3 tidak habis dibagi 9.

5 dan 8 termasuk *incomparable*, karena 5 tidak habis dibagi 8 dan juga 8 tidak habis dibagi 5.

12 dan 4 termasuk *comparable*, karena 12 habis dibagi 4, sekalipun 4 tidak habis dibagi 12.

Totally Ordered

Jika (S, $\preccurlyeq$) sebuah poset dan setiap dua elemen yang berbeda dari S *comparable*, maka S disebut *totally ordered* atau *linearly ordered set*, dan relasi $\preccurlyeq$ disebut total order atau linear order. Sebuah *totally ordered set* disebut *chain*.

Contoh 25:

Apakah poset $(Z, \leq)$ termasuk *totally ordered*?

Jawab:

Benar, karena $a \leq b$ atau $b \leq a$, untuk setiap $a,b \in Z$.

Contoh 26:

Apakah poset (Z^+, |) termasuk *totally ordered*?

Jawab:

bukan *totally ordered* karena ada anggota yang *incomparable*, contohnya 5 dan7 (5 tidak habis dibagi 7 dan juga 7 tidak habis dibagi 5).

Diagram Hasse

Pada Relasi Terurut Parsial, digraph dapat disederhanakan sehingga memberikan kemudahan dalam menggambarkannya. Dalam hal ini Hasse telah membuat prosedurnya dan dikenal dengan nama Diagram Hasse.

Prosedur Diagram Hasse

Untuk membentuk Diagram Hasse, lakukan langkah-langkah berikut:

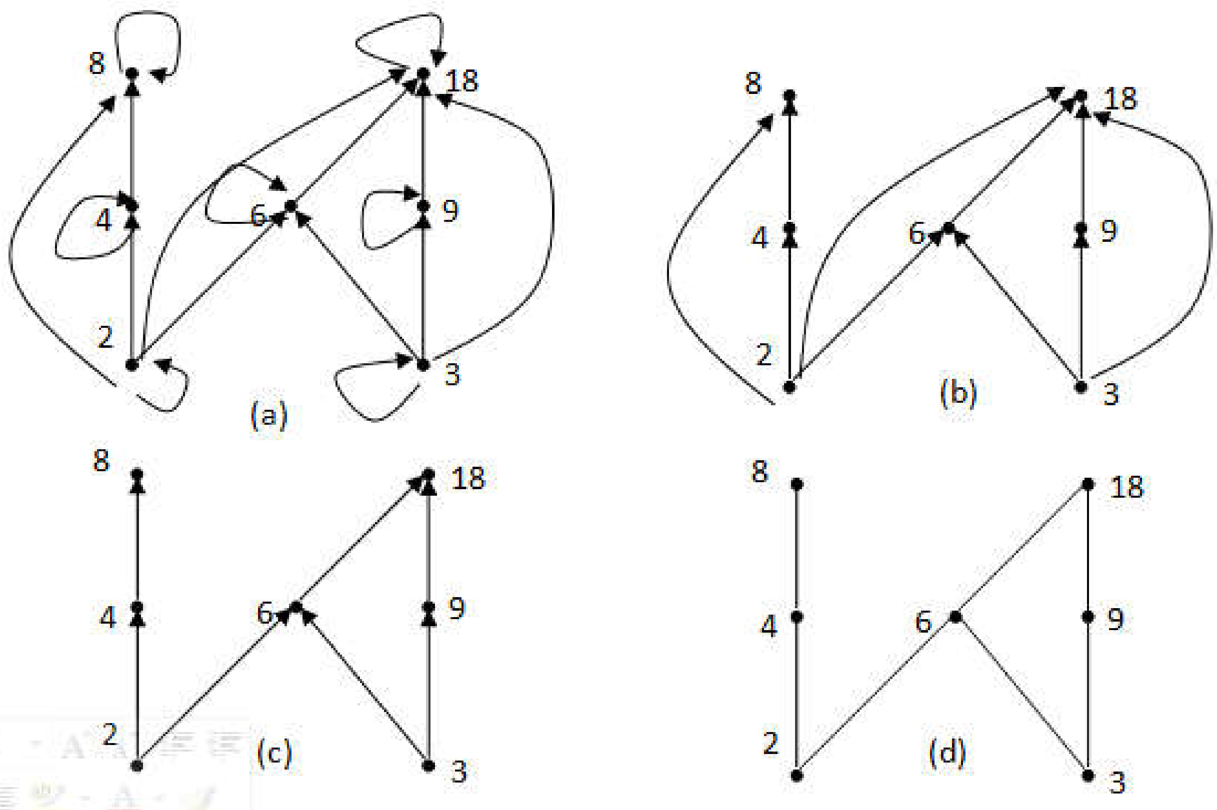
1. Buat digraph-nya
2. Buang semua loop
3. Buang semua busur yang terbentuk dari sifat transitif
4. Gambarkan busur tanpa anak panah
5. Pahamilah bahwa pada semua titik arah panahnya ke atas

Contoh 27:

Gambarkan diagram Hasse untuk Poset (A, R) dengan :

A = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 18} dan R = {(a, b)| a habis membagi b, dan a, b $\in$ A}.

Jawab:



Proses Pembentukan Diagram Hasse dari poset (A, |): (a) digraph, (b) buang loop, (c) buang busur transitif, (d) Diaagram Hasse poset (A, |)

Contoh 28:

Gambarkan diagram Hasse untuk Poset ($\wp$(S), R) dengan :

S={a, b, c}

Jawab:

$\wp$(S)={∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}

R = {(A, B)| A $\subseteq$ B, A, B $\in$ $\wp$(S)}

Jawab:

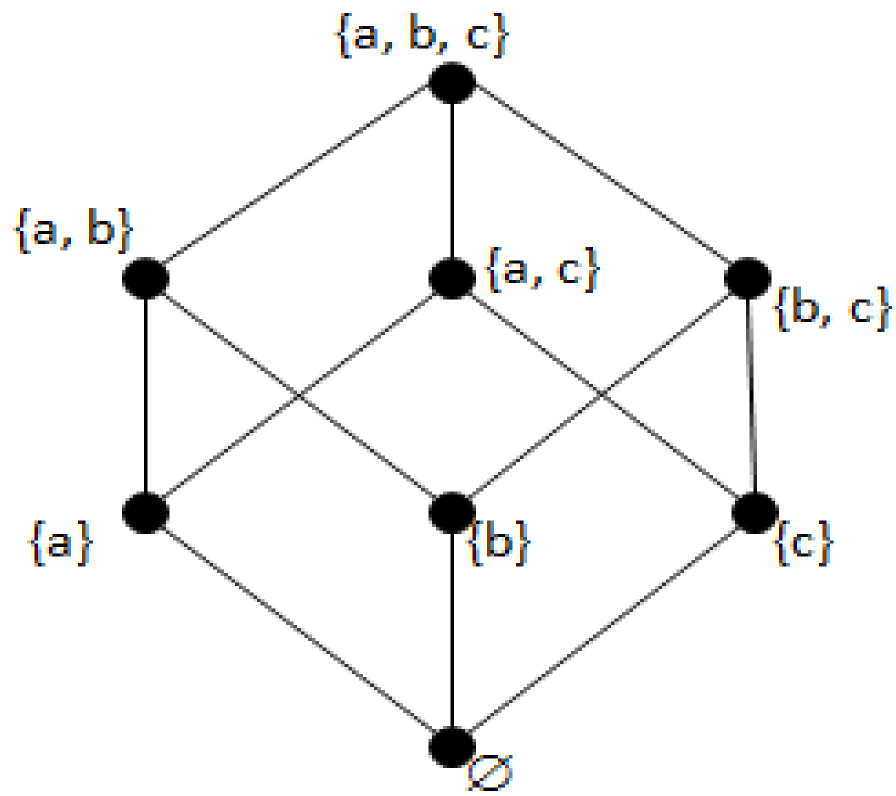


Diagram Hasse dari poset (℘(S), R)

Elemen Maksimal dan Minimal

Elemen a ∈S, disebut **maksimal** pada poset (S, ≼) jika tidak ada b∈S, sehingga a≼ b.

Elemen a ∈S, disebut **minimal** pada poset (S, ≼) jika tidak ada b∈S, sehingga b ≼ a.

Untuk lebih memperjelas maksud dari elemen maksimal dan elemen minimal pada POSET, diberikan beberapa contoh berikut ini:

Contoh 29:

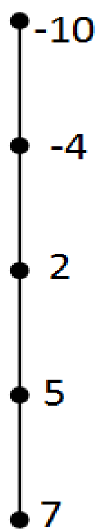
Diberikan:

$S=\{2, -4, 5, 7, -10\}$ dan $R = \{(a, b) \mid a \geq b, a, b \in S\}$

a. Gambarkan diagram Hassenya.

b. Tentukan elemen maksimal dan minimalnya!

a. Diagram Hasse seperti pada Gambar 2-57, (coba jelaskan kenapa 7 paling bawah dibanding dengan anggota A yang lainnya)



Gambar 2-57 Diagram Hasse dari poset (A, ≥)

b. Dengan melihat Diagram Hasse, diperoleh elemen minimal adalah: {7} dan elemen maksimal adalah: {-10}.


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU