Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Matematika Diskret

Mahmud Imrona – Rian Febrian Umbara

KK Pemodelan dan Simulasi

Kombinatorial

Kombinasi

Kombinasi

Kombinasi *r* objek dari *n* objek adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut *r* objek yang diambil dari *n* buah objek.

Kombinasi

$\binom{n}{r}$ menyatakan n kombinasi r ditulis juga sebagai C(n;r)

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Jika pada permutasi urutan penempatan diperhitungkan, maka pada kombinasi urutan penempatan diabaikan.

Contoh 12

Sebuah delegasi yang beranggotakan 5 orang akan dipilih dari sejumlah 25 orang anggota parlemen. Berapa banyak cara membentuk delegasi tersebut?

Jawab:

Pemilihan 5 orang dari sebanyak 25 orang anggota parlemen untuk menjadi anggota delegasi tersebut tidak memperhatikan urutan. Maka banyaknya cara membentuk delegasi tersebut adalah

$C(25,5) = 53130$ cara

Contoh 13:

Badu, Amir, Susi, Intan, dan Bowo adalah lima murid terpandai di SD Sukabelajar. Dari kelima murid tersebut, akan dipilih tiga murid yang akan mewakili sekolah untuk mengikuti lomba Matematika. Berapa banyaknya cara memilih tiga murid dari kelima murid terebut jika:

a. Badu harus selalu termasuk di antara tiga murid yang terpilih
b. Badu tidak boleh termasuk di antara tiga murid yang terpilih
c. Badu harus selalu termasuk di antara tiga murid yang terpilih, tetapi Amir tidak boleh.
d. Setidaknya salah satu dari Badu dan Amir termasuk di antara tiga murid yang terpilih

Jawab:

a. $C(4, 2) = 6$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 3 orang sedemikian sehingga Badu selalu termasuk di dalamnya.

b. $C(4, 3) = 4$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 3 orang sedemikian sehingga Badu tidak boleh termasuk di dalamnya.

c. $C(3, 2) = 3$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 3 orang sedemikian sehingga Badu harus selalu termasuk di dalamnya dan Amir tidak boleh

d. banyaknya cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari Badu atau Amir termasuk di dalamnya = banyaknya cara membentuk perwakilan sehingga Badu termasuk di dalamnya, Amir tidak + banyaknya cara membentuk perwakilan sehingga Amir termasuk di dalamnya, Badu tidak + banyaknya cara membentuk perwakilan sehingga Badu dan Amir termasuk di dalamnya

$$C(3, 2) + C(3, 2) + C(3, 1) = 3 + 3 + 3 = 9$$

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada n pasang kaos kaki yang tidak semuanya memiliki merk yang berbeda (jadi, ada beberapa kaos kaki yang merknya sama -*indistinguishable*).

n_1 pasang kaos kaki diantaranya bermerk 1,

n_2 pasang kaos kaki diantaranya bermerk 2,

……….

n_k pasang kaos kaki diantaranya bermerk k,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah kaos kaki ke dalam kotak sebanyak n ? (tiap kotak maks. 1 pasang kaos kaki)

Jika n pasang kaos kaki itu kita anggap berbeda semuanya, maka banyaknya cara pengaturan n pasang kaos kaki ke dalam n buah kotak adalah

$P(n, n) = n!$.

Dari pengaturan n pasang kaos kaki itu,

ada $n_1!$ cara memasukkan pasangan kaos kaki bermerk 1

ada $n_2!$ cara memasukkan pasangan kaos kaki bermerk 2

....

ada $n_k!$ cara memasukkan pasangan kaos kaki bermerk k

Permutasi n pasang kaos kaki yang mana n_1 diantaranya bermerk 1, n_2 pasang kaos kaki bermerk 2, …, n_k pasang kaos kaki bermerk k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Cara lain:

Ada $C(n, n_1)$ cara untuk menempatkan n_1 pasang kaos kaki yang bermerk 1.

Ada $C(n - n_1, n_2)$ cara untuk menempatkan n_2 pasang kaos kaki bermerk 2.

Ada $C(n - n_1 - n_2, n_3)$ cara untuk menempatkan n_3 pasang kaos kaki bermerk 3.

....

Ada $C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_k\text{-}1, n_k)$ cara untuk menempatkan n_k pasang kaos kaki bermerk k.

Banyaknya cara pengaturan seluruh pasangan kaos kaki kedalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1) \times C(n - n_1, n_2) \times C(n - n_1 - n_2, n_3)$$

$$\times \ldots \times C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \ldots n_k}$$

Kesimpulan

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Contoh 14

Sebanyak 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa banyaknya cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:

n = 18; $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, dan $n_4 = 6$ (*socket* kosong)

Banyaknya cara pengaturan lampu = $\dfrac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$

Kombinasi Dengan Pengulangan

Teorema:

Ada $C(n + r - 1, r)$ r-kombinasi dari satu himpunan dengan n elemen dan pengulangan elemen diperbolehkan

Contoh 15

Sebuah toko kue mempunyai 4 jenis kue yang berbeda. Berapa banyak cara memilih 6 kue yang berbeda? Urutan tidak dipermasalahkan.

Jawab:

Banyak cara memilih 6 kue adalah 6-kombinasi dari satu himpunan yang mempunyai 4 elemen. Maka

$$C(4+6-1, 6) = C(9,6) = \frac{9!}{6!3!} = 12.7 = 84$$

Tabel Kombinasi dan Permutasi dengan dan tanpa pengulangan

Tipe	Pengulangan	Rumus
r-permutasi	Tidak	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
r-kombinasi	Tidak	$\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
r-permutasi	Ya	n^r
r-kombinasi	Ya	$\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU