

MODUL 6

PENERAPAN DIFERENSIAL I



Mata Kuliah : MATEMATIKA TEKNIK I
Kode / sks : B2220 / 3 sks
Prodi : TEKNIK MESIN
Semester : III (Tiga)

Disusun oleh :

MAFRUDDIN, S.T., M.T

PRODI TEKNIK MESIN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO

Dibiayai Oleh:

Direktorat Pembelajaran Dan Kemahasiswaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset Dan Teknologi
Kemetrician Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi
2023



MODUL 6 PENERAPAN DIFERENSIAL I

1. Pengantar

Assalamu'alaikum wr. Wb.

Kegiatan belajar mengajar untuk mata kuliah Matematika Teknik I dilakukan dengan dua metode yaitu Daring (online) dan Luring (offline). Untuk mempermudah dalam memahami materi yang diberikan dan mencapai kompetensi yang diharapkan maka perlu diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut:

- a. Pelajarilah setiap materi yang terdapat pada modul ini (Modul 6. Penerapan Diferensial I) dengan sungguh-sungguh, apabila terdapat uraian materi atau pokok bahasan yang kurang dipahami atau belum dimengerti segera tanyakan pada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- b. Bacalah dengan teliti dan pahami apa yang menjadi capaian akhir dari setiap materi yang akan dipelajari
- c. Bacalah dengan teliti dan pahami apa saja indikator capaian pembelajaran yang harus dikuasai
- d. Berikan tanda pada bagian-bagian materi yang dianggap penting atau bagian yang belum dimengerti untuk ditanyakan kepada tutor/dosen pengampu mata kuliah.
- e. Buka dan pelajari setiap link materi (video atau dokumen lainnya) yang diberikan oleh tutor/dosen pengampu mata kuliah untuk menambah pemahaman Anda terkait materi yang dipelajari dalam kegiatan belajar pada modul ini
- f. *Download* dan Putarlah video penjelasan yang ada terkait materi atau pokok bahasan agar dapat memahami isi materi pada kegiatan ini secara lebih jelas dan paham serta dapat menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan. Jika diperlukan, putarlah video penjelasan berulang-ulang supaya benar-benar paham
- g. Carilah sumber referensi lainnya untuk menambah materi bahan ajar (baik dalam bentuk materi penjelasan maupun contoh-contoh soal) dan melengkapi tugas pada masing-masing topik perkuliahan serta memperluas wawasan Anda
- h. Pahami tugas yang harus didiskusikan dengan teman-temanmu (tugas kelompok) pada bagian forum diskusi pada topik bahasan tertentu. Gunakan pengetahuan dan pengalaman Anda sebelumnya untuk mendiskusikan penyelesaian masalah yang diberikan dalam forum diskusi tersebut
- i. Bacalah dan pahami pada bagian rangkuman materi untuk lebih meningkatkan pemahaman substansi materi dari materi kegiatan belajar yang telah dipelajari dan diskusikan
- j. Kerjakan tugas dengan semaksimal mungkin dan ikuti panduan yang diberikan serta gunakan rambu-rambu jawaban untuk menilai apakah jawaban Anda sudah memadai atau belum
- k. Kumpulkan tugas sesuai dengan batas waktu yang telah ditetapkan
- l. Kerjakan tugas Anda dengan jujur dan jangan mencontek
- m. Tugas dikumpulkan di SPADA UM METRO.

2. Capaian pembelajaran

Setelah mempelajari keseluruhan materi pada modul ini diharapkan mahasiswa mampu menentukan dan menjelaskan tentang nilai gradien suatu garis lurus, menentukan nilai kurvatur dan radius kurvatur disuatu titik pada kurva dan letak pusat kurvatur. Mampu bertanggungjawab pada pekerjaan sendiri dan bekerja sama dalam tim dan mampu berkomunikasi dengan baik secara lisan maupun tulisan.

3. Indikator Capaian Pembelajaran

Adapun tingkat penguasaan mahasiswa terhadap Capaian Pembelajaran Kegiatan Belajar ini secara rinci akan diukur dari kemampuan mahasiswa dalam:

- Menjelaskan nilai gradien suatu garis lurus
- Menentukan nilai kurvatur dan radius kurvatur disuatu titik pada kurva
- Menentukan letak pusat kurvatur
- Mampu bertanggungjawab pada pekerjaan sendiri dan bekerja sama dalam tim
- Mampu berkomunikasi dengan baik secara lisan maupun tulisan.

4. Alokasi Jam Pembelajaran (JP) per pertemuan

- Total alokasi waktu : 3 x 50 menit
- Mode pembelajaran : Daring (online)
- Pertemuan : 7 (tujuh)

5. Pokok-pokok materi

- Persamaan garis lurus
- Kurvatur

6. Integrasi nilai islam

- Al-quran Qs Al Jinn ;72:28

لَيَعْلَمَنَّ أَن قَدْ أَبْلَغُوا رَسُولَاتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

28. supaya Dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya Rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu.

- Hadist

1. Tirmidzi 2918

سنن الترمذي ٢٩١٨: حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ غَيْلَانَ حَدَّثَنَا وَكَيْعٌ حَدَّثَنَا سُفْيَانُ عَنْ آدَمَ بْنِ سُلَيْمَانَ عَنْ سَعِيدِ بْنِ جُبَيْرٍ عَنْ ابْنِ عَبَّاسٍ قَالَ لَمَّا نَزَلَتْ هَذِهِ الْآيَةُ { إِنْ تُبْدُوا مَا فِي أَنْفُسِكُمْ أَوْ تُخْفُوهُ يُحَاسِبِكُمْ بِهِ اللَّهُ } قَالَ دَخَلَ قُلُوبِهِمْ مِنْهُ شَيْءٌ لَمْ يَدْخُلْ مِنْ شَيْءٍ فَقَالُوا لِلنَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ فَقَالَ قُولُوا سَمِعْنَا وَأَطَعْنَا فَأَلْفَى اللَّهُ الْإِيمَانَ فِي قُلُوبِهِمْ فَأَنْزَلَ اللَّهُ تَبَارَكَ وَتَعَالَى { آمَنَ الرَّسُولُ بِمَا أُنزِلَ إِلَيْهِ مِنْ رَبِّهِ وَالْمُؤْمِنُونَ } الْآيَةَ { لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا } قَالَ قَدْ فَعَلْتُ { رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا } قَالَ قَدْ فَعَلْتُ { رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ وَاعْفُ عَنَّا وَاعْفِرْ لَنَا وَارْحَمْنَا } الْآيَةَ قَالَ قَدْ فَعَلْتُ قَالَ أَبُو عِيسَى هَذَا حَدِيثٌ

حَسَنٌ صَاحِبٌ وَقَدْ رُوِيَ هَذَا مِنْ غَيْرِ هَذَا الْوَجْهِ عَنْ ابْنِ عَبَّاسٍ وَفِي الْبَابِ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ وَأَدَمُ بْنُ سُلَيْمَانَ يُقَالُ هُوَ وَالِدُ يَحْيَى بْنِ آدَمَ.

Sunan Tirmidzi 2918: Telah menceritakan kepada kami Mahmud bin Ghailan telah menceritakan kepada kami Waki' telah menceritakan kepada kami Sufyan dari Adam bin Sulaiman dari Sa'id bin Jubair dari Ibnu Abbas ia berkata: "Saat ayat ini turun Jika kamu melahirkan apa yang ada di dalam hatimu atau kamu menyembunyikan, niscaya Allah akan membuat perhitungan dengan kamu tentang perbuatanmu itu." QS Al-Baqarah: 284. Ibnu Abbas berkata: "Ada sesuatu yang masuk ke hati mereka tidak seperti yang lain, mereka berkata kepada Nabi shallallahu 'alaihi wa sallam, lalu beliau bersabda: "Ucapkan: Kami mendengar dan kami taat." Lalu Allah menyematkan keimanan di hati mereka. Setelah itu Allah Tabaaraka wa Ta'ala menurunkan ayat: Rasul telah beriman kepada Al Qur'an yang diturunkan kepadanya dari Rabbnya, demikian pula orang-orang yang beriman dan seterusnya, Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): 'Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami bersalah. Beliau bersabda: "Aku telah melakukannya. Ya Rabb kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. beliau bersabda: "Aku telah melakukannya. Ya Rabb kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'afilah kami: ampunilah kami: dan rahmatilah kami dan seterusnya, beliau bersabda: "Aku telah melakukannya." Abu Isa berkata: Hadits ini hasan shahih. Hadits ini juga diriwayatkan melalui jalur lain dari Ibnu Abbas. Dalam hal ini, ada hadits serupa dari Abu Hurairah radliallahu 'anhu. Adam bin Sulaiman ada yang mengatakannya putranya Yahya bin Adam.

7. Uraian Materi

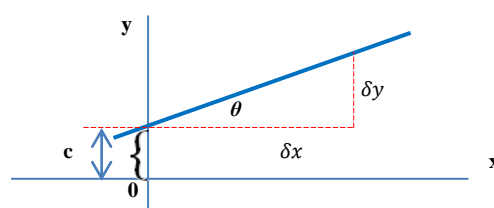
a. Persamaan suatu garis lurus

Persamaan dasar suatu garis lurus yaitu

$$y = mx + c,$$

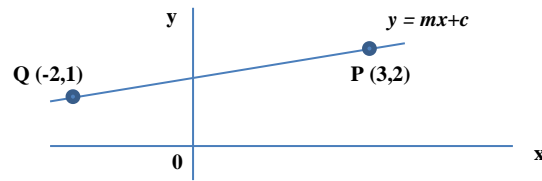
Di mana $m = \text{Gradien} = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$

c = Perpotongan pada sumbu y real.



Seperti dikehui bahwa skala x dan y identik $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$

Sehingga untuk menentukan persamaan garis lurus yang melalui P (3,2) dan Q (-2, 1) dapat dinyatakan sebagai berikut.



Garis yang melalui P
yaitu $x = 3, y = 2 \Rightarrow y = mx + c \Rightarrow 2 = m \cdot 3 + c \dots\dots(\text{pers. 1})$

Garis yang melalui Q
yaitu $x = -2, y = 1 \Rightarrow y = mx + c \Rightarrow 1 = m \cdot -2 + c \dots\dots(\text{pers. 2})$

dengan melakukan eliminasi *pers. 1 dan pers. 2* maka diperoleh
 $m = 1/5$ dan $c = 7/5$

$$\begin{aligned} y = mx + c &\Rightarrow y = 1/5x + 7/5 \\ &= \frac{x+7}{5} \\ 5y &= x + 7 \end{aligned}$$

Untuk menentukan gradien m juga dapat ditentukan menggunakan persamaan berikut:

$$y - y_1 = m (x_1 - x_2)$$

jika m dan m_1 menyatakan gradien dari dua garis yang saling tegak-lurus, maka

$$mm_1 = -1 \text{ atau } m_1 = -\frac{1}{m}$$

Sebagai contoh:

Dua buah garis lurus berikut,
 $2y = 4x - 5$ dan $6y = 2 - 3x$

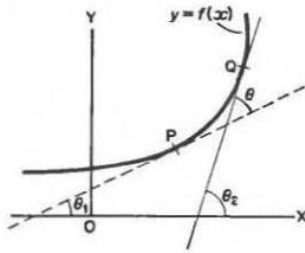
Jika dirubah kedalam bentuk $y = mx + c$
Maka (a) $y = 2x - 5/2$ dan (b) $y = - 1/2x + 1/3$

Sehingga diperoleh gradien $m = 2$ dan $m_1 = -\frac{1}{2}$
Diketahui bahwa $mm_1 = -1$ maka kedua garis tersebut saling tegak lurus.

b. **Kurvatur**

Radius kurvatur atau dalam bahasa Inggris dikenal dengan Radius of Curvature merupakan pusat kelengkungan yang umumnya digunakan pada sebuah lensa atau dalam desain optik. Sebuah lensa bola memiliki pusat

kelengkungan yang terletak di sepanjang dari sumbu optik lokal sistem. Puncak permukaan lensa terletak pada sumbu optik lokal. Jarak dari titik puncak ke pusat kelengkungan adalah jari-jari kelengkungan permukaan.



$$\text{Gradien di } P = \tan \theta_1 = \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_P$$

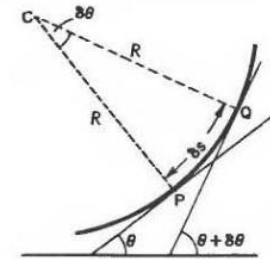
$$\text{Gradien di } Q = \tan \theta_2 = \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_Q$$

$$\text{Busur } PQ = \delta s = R \delta \theta$$

$$\delta s = R \delta \theta \implies \frac{\delta \theta}{\delta s} = \frac{1}{R} \quad \text{kurvatur di } P.$$

Radius kurvatur dapat diketahui yaitu

$$R = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$



Contoh:

Carilah radius kurvatur hiperbola $xy = 4$ pada titik $x = 2$ dan $y = 2$.

$$R = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Untuk menyelesaikannya maka perlu dicari $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ di (2,2).

Diketahui:

$$xy = 4 \implies y = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = -4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}$$

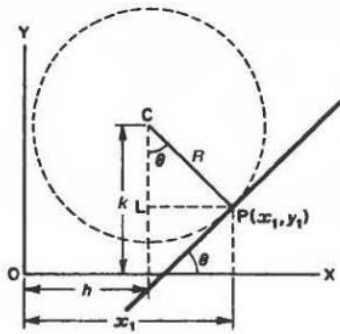
$$\implies \frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cdot -2x^{-2-1} = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$$

$$\text{Di (2,2)} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^2} = \frac{-4}{2^2} = -1$$

$$\implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{x^3} = \frac{8}{2^3} = 1$$

$$\text{Jadi } R = \frac{\left\{ 1 + (-1)^2 \right\}^{3/2}}{1} = \frac{\left\{ 1 + 1 \right\}^{3/2}}{1} = 2^{3/2} = 2,828 \text{ satuan.}$$

Selain radius kurvatur perlu juga diketahui posisi pusat lingkaran kurvatur untuk titik $P(x_1, y_1)$. Jika pusat kurvatur adalah C dan merupakan titik (h, k) , dapat dilihat dari diagram tersebut bahwa:



$h = x_1 - LP = x_1 - R \sin \theta$
 $k = y_1 + LP = y_1 + R \cos \theta$
 dimana x_1 dan y_1 merupakan koordinat P , R merupakan radius kurvatur di P dan θ merupakan sudut miringan di P .

Sehingga, $\tan \theta = \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_P$

Contoh:

Carilah radius kurvatur dan koordinat pusat kurvatur dari kurva

$$y = \frac{11-4x}{3-x} \text{ di titik } (2,3).$$

Bentuk diferensial diatas yaitu $y = \frac{u}{v}$

Diketahui:

$$u = 11 - 4x \quad \implies \frac{du}{dx} = -4$$

$$v = 3 - x \quad \implies \frac{dv}{dx} = -1$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{(3-x) \cdot (-4) - (11-4x) \cdot (-1)}{(3-x)^2} \\ &= \frac{(-12+4x) - (-11+4x)}{(3-x)^2} \\ &= \frac{-12 + 4x + 11 - 4x}{(3-x)^2} \\ &= \frac{-1}{(3-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{-1}{(3-x)^2} \right\} = \frac{d}{dx} \{ -(3-x)^{-2} \} \\ &= 2(3-x)^{-3} \cdot (-1) \\ &= -2(3-x)^{-3} \\ &= \frac{-2}{(3-x)^3} \end{aligned}$$

Di (2,3) maka $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(3-x)^2} = \frac{-1}{(3-2)^2} = -1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{(3-x)^3} = \frac{-2}{(3-2)^3} = -2.$$

$$\text{Jadi } R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\{1 + (-1)^2\}^{3/2}}{-2} = -\sqrt{2}$$

Selanjutnya mencari pusat kurvatur (h, k) perlu diketahui sudut kemiringan θ , dimana,

$$\begin{aligned} \tan \theta = \frac{dy}{dx} & \implies \tan \theta = -1 \\ \text{Sudut } \theta & = \arctan(-1) \\ \text{Sudut } \theta & = -45^\circ \end{aligned}$$

Diperoleh :

$$x_1 = 2$$

$$y_1 = 3$$

$$R = -\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \sin -45 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \cos -45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Maka

$$h = x_1 - R \sin \theta = 2 - (-\sqrt{2}) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - 1 = 1$$

$$k = y_1 + R \cos \theta = 3 + (-\sqrt{2}) \frac{1}{\sqrt{2}} = 3 - 1 = 2$$

Pusat kurvatur C adalah titik (1, 2)

Catatan: jika nilai R negatif, tanda minus harus dimasukkan apabila mensubstitusikan R ke dalam pernyataan untuk h dan k .

8. Rangkuman

- Garis lurus yaitu $y = mx + c$,
- Gradien $m = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$
- Gradien m juga dapat ditentukan menggunakan persamaan $y - y_1 = m(x_1 - x_2)$

d. Radius kurvatur $R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$



- e. Pusat kurvatur C
- 1) $h = x_1 - R \sin \theta$
 - 2) $k = y_1 + R \cos \theta$

9. Tugas

1. Membuat resume dari video penjelasan sesuai dengan topik bahasan dan jawab pertanyaan berikut.
 - a. Jelaskan sampai dimana tingkat pemahaman anda tentang materi yang diberikan
 - b. Jelaskan menurut pendapat anda pentingnya video penjelasan terhadap proses belajar
 - c. Langkah apasaja yang telah anda lakukan untuk lebih meningkatkan pemahaman tentang materi yang diberikan
 - d. Berikan contoh penerapan atau aplikasi tentang diferensial (kurvatur) dalam kehidupan sehari-hari.
2. Membuat makalah (pengembangan materi) tentang kurvatur dari sumber referensi yang relevan dalam bentuk materi atau contoh-contoh soal.
3. Menyelesaikan tugas mandiri sesuai bahan kajian sebagai berikut:
Carilah radius kurvatur dan koordinat pusat kurvatur dari kurva berikut
 - 1) $y = \frac{10-4x}{3-x}$ di titik (2,2)
 - 2) $y = \frac{-4x+5}{-x+4}$ di titik (3,3)
4. Membuat resume Qs Al Jinn ;72:28 dan Hadist Tirmidzi 2918

10. Daftar pustaka

- a. Al-Quran dan As-Sunnah
- b. Erwin Kreyszig, “*Advanced Engineering Mathematics*”, Edisi 6, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
- c. K.A Stroud, “*Matematika Teknik*”. Edisi 5 Jilid 1. Erlangga. 2003.