

MODUL 9

DIFERENSIAL PARSIAL II



Mata Kuliah : MATEMATIKA TEKNIK I
Kode / sks : B2220 / 3 sks
Prodi : TEKNIK MESIN
Semester : III (Tiga)

Disusun oleh :

MAFRUDDIN, S.T., M.T

PRODI TEKNIK MESIN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO

Dibiayai Oleh:

Direktorat Pembelajaran Dan Kemahasiswaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset Dan Teknologi
Kemetrician Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi
2023



MODUL 9 DIFERENSIAL PARSIAL II

1. Pengantar

Assalamu'alaikum wr. Wb.

Kegiatan belajar mengajar untuk mata kuliah Matematika Teknik I dilakukan dengan dua metode yaitu Daring (online) dan Luring (offline). Untuk mempermudah dalam memahami materi yang diberikan dan mencapai kompetensi yang diharapkan maka perlu diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut:

- a. Pelajarilah setiap materi yang terdapat pada modul ini (Modul 9. Diferensial Parsial II) dengan sungguh-sungguh, apabila terdapat uraian materi atau pokok bahasan yang kurang dipahami atau belum dimengerti segera tanyakan pada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- b. Bacalah dengan teliti dan pahami apa yang menjadi capaian akhir dari setiap materi yang akan dipelajari
- c. Bacalah dengan teliti dan pahami apa saja indikator capaian pembelajaran yang harus dikuasai
- d. Berikan tanda pada bagian-bagian materi yang dianggap penting atau bagian yang belum dimengerti untuk ditanyakan kepada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- e. Buka dan pelajari setiap link materi (video atau dokumen lainnya) yang diberikan oleh tutor/dosen pengampu mata kuliah untuk menambah pemahaman Anda terkait materi yang dipelajari dalam kegiatan belajar pada modul ini
- f. *Download* dan Putarlah video penjelasan yang ada terkait materi atau pokok bahasan agar dapat memahami isi materi pada kegiatan ini secara lebih jelas dan paham serta dapat menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan. Jika diperlukan, putarlah video penjelasan berulang-ulang supaya benar-benar paham
- g. Carilah sumber referensi lainnya untuk menambah materi bahan ajar (baik dalam bentuk materi penjelasan maupun contoh-contoh soal) dan melengkapi tugas pada masing-masing topik perkuliahan serta memperluas wawasan Anda
- h. Pahami tugas yang harus didiskusikan dengan teman-temanmu (tugas kelompok) pada bagian forum diskusi pada topik bahasan tertentu. Gunakan pengetahuan dan pengalaman Anda sebelumnya untuk mendiskusikan penyelesaian masalah yang diberikan dalam forum diskusi tersebut
- i. Bacalah dan pahami pada bagian rangkuman materi untuk lebih meningkatkan pemahaman substansi materi dari materi kegiatan belajar yang telah dipelajari dan diskusikan
- j. Kerjakan tugas dengan semaksimal mungkin dan ikuti panduan yang diberikan serta gunakan rambu-rambu jawaban untuk menilai apakah jawaban Anda sudah memadai atau belum
- k. Kumpulkan tugas sesuai dengan batas waktu yang telah ditetapkan
- l. Kerjakan tugas Anda dengan jujur dan jangan mencontek
- m. Tugas dikumpulkan di SPADA UM METRO.

2. Capaian pembelajaran

Setelah mempelajari keseluruhan materi pada modul ini diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan dan menerapkan diferensial parsial untuk soal laju perubahan dan perubahan variabel. Mampu bertanggungjawab pada pekerjaan sendiri dan bekerja sama dalam tim dan mampu berkomunikasi dengan baik secara lisan maupun tulisan.

3. Indikator Capaian Pembelajaran

Adapun tingkat penguasaan mahasiswa terhadap Capaian Pembelajaran Kegiatan Belajar ini secara rinci akan diukur dari kemampuan mahasiswa dalam:

- Menjelaskan tentang diferensial parsial untuk soal laju perubahan
- Menjelaskan tentang diferensial parsial untuk perubahan variabel
- Mampu bertanggungjawab pada pekerjaan sendiri dan bekerja sama dalam tim
- Mampu berkomunikasi dengan baik secara lisan maupun tulisan.

4. Alokasi Jam Pembelajaran (JP) per pertemuan

- Total alokasi waktu : 3 x 50 menit
- Mode pembelajaran : Daring (online)
- Pertemuan : 11 (sebelas)

5. Pokok-pokok materi

- Diferensial parsial II
- Laju perubahan
- Fungsi implisit
- Perubahan variabel

6. Integrasi nilai islam

- Al-Quran Qs Al Jinn ;72:28

لِيَعْلَمَ أَنْ قَدْ أَبْلَغُوا رَسُولَاتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

28. supaya Dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya Rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu.

- Hadist Tirmidzi 3089

سنن الترمذي ٣٠٨٩: حَدَّثَنَا مُجَاهِدُ بْنُ مُوسَى الْبَغْدَادِيُّ وَالْفَضْلُ بْنُ سَهْلٍ الْأَعْرَجِيُّ وَغَيْرُ وَاحِدٍ قَالُوا حَدَّثَنَا عَبْدُ الرَّحْمَنِ بْنُ غَزْوَانَ أَبُو نُوحٍ حَدَّثَنَا اللَّيْثُ بْنُ سَعْدٍ عَنْ مَالِكِ بْنِ أَنَسٍ عَنِ الزُّهْرِيِّ عَنْ عُرْوَةَ عَنْ عَائِشَةَ أَنَّ رَجُلًا قَعَدَ بَيْنَ يَدَيْ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ فَقَالَ يَا رَسُولَ اللَّهِ إِنَّ لِي مَمْلُوكَيْنِ يُكْذِبُونَنِي وَيَخُونُونَنِي وَيَعْصُونَنِي وَأَسْتَمُهُمْ وَأَضْرِبُهُمْ فَكَيْفَ أَنَا مِنْهُمْ قَالَ يُحْسَبُ مَا خَانُوكَ وَعَصَوُوكَ وَكَذَّبُوكَ وَعَقَابُكَ إِيَّاهُمْ فَإِنْ كَانَ عِقَابُكَ إِيَّاهُمْ بِقَدْرِ ذُنُوبِهِمْ كَانَ كَفَافًا لَا لَكَ وَلَا عَلَيْكَ وَإِنْ كَانَ عِقَابُكَ إِيَّاهُمْ دُونَ ذُنُوبِهِمْ كَانَ فَضْلًا لَكَ وَإِنْ كَانَ عِقَابُكَ إِيَّاهُمْ فَوْقَ ذُنُوبِهِمْ اقْتَصَرَ لَهُمْ مِنْكَ الْفَضْلُ قَالَ فَتَنَحَّى الرَّجُلُ فَجَعَلَ يَبْكِي وَيَهْتَفُ فَقَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَمَا تَقْرَأُ كِتَابَ اللَّهِ { وَنَضَعُ الْمَوَازِينَ

الْقِسْطَ لِيَوْمِ الْقِيَامَةِ فَلَا تُظْلَمُ نَفْسٌ شَيْئًا وَإِنْ كَانَ مِثْقَالَ حَبِّ خَيْرٍ مِنْ مُفَارَقَتِهِمْ أَشْهَدُكُمْ أَنَّهُمْ أَحْرَارٌ كُلُّهُمْ قَالَ أَبُو عِيْسَى هَذَا حَدِيثٌ غَرِيبٌ لَا نَعْرِفُهُ إِلَّا مِنْ حَدِيثِ عَبْدِ الرَّحْمَنِ بْنِ عَزْوَانَ وَقَدْ رَوَى أَحْمَدُ بْنُ حَنْبَلٍ عَنْ عَبْدِ الرَّحْمَنِ بْنِ عَزْوَانَ هَذَا الْحَدِيثَ.

Sunan Tirmidzi 3089: Telah menceritakan kepada kami Mujahid bin Musa Al Baghdadi dan Al Fadll bin Sahal Al A'raj Baghdadi dan lainnya, mereka berkata: Telah menceritakan kepada kami Abdurrahman bin Ghazwan Abu Nuh telah menceritakan kepada kami Al Laits bin Sa'ad dari Malik bin Anas dari Az Zuhri dari Urwah dari Aisyah bahwa seseorang duduk di depan Nabi Shallallahu 'alaihi wa Salam lalu berkata: Wahai Rasulullah, sesungguhnya saya memiliki dua orang budak mereka mendustai dan mengkhianati saya, mereka juga membangkang terhadap (perintah) saya, lalu saya umpat dan saya pukul mereka apakah saya berdosa kepada mereka? beliau menjawab "Pengkhianatan, pembangkangan, dan kedustaan mereka terhadapmu, juga hukumanmu atas mereka, semua itu ada perhitungannya. Jika hukumanmu sebanding dengan kesalahan mereka, maka impaslah urusanmu dengannya. Tapi jika hukumanmu lebih ringan dibanding kesalahan mereka, maka kamu mendapat keutamaan. Namun jika hukuman yang kamu timpakan kepada mereka lebih berat dibanding kesalahan mereka, maka merekalah yang akan mendapat keutamaan darimu sebagai qishash." ia berkata: lalu menyesallah lelaki itu kemudian ia menangis dan berteriak lalu Rasulullah Shallallahu 'alaihi wa Salam bersabda: "Tidakkah engkau membaca kitab Allah: 'Kami akan memasang timbangan yang tepat pada hari kiamat, maka tiadalah seseorang dirugikan barang sedikitpun.'" (Al Anbiyaa` : 47) lelaki itu berkata: Wahai Rasulullah, demi Allah, tidak ada sesuatu yang lebih baik bagi saya kecuali dengan memerdekakan mereka. Karena itu saksikanlah bahwa mereka semua saya merdekakan." Abu Isa mengatakan bahwa hadits ini gharib, kami hanya mengetahuinya dari hadits Abdurrahman bin Ghazwan. Ahmad bin Hambal meriwayatkan hadits ini dari Abdurrahman bin Ghazwan.

7. Uraian Materi

a. Pengantar Diferensial Parsial II

Pada pertemuan sebelumnya telah dipelajari mengenai diferensial parsial. Perlu diingat bahwa untuk menentukan turunan atau diferensial suatu fungsi dengan dua variabel independen maka salah satu variabel independen dianggap konstanta. Sebagai contoh jika z merupakan fungsi dari dua variabel independen x dan y , yakni jika $z = f(x,y)$ maka

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y.$$

Dalam persoalan ini diketahui bahwa untuk mendiferensiasi fungsi z terhadap x maka variabel independen selain x diasumsikan konstan. Begitu juga untuk mendiferensiasi fungsi z terhadap y maka variabel independen selain y diasumsikan konstan.

Contoh 1:

$$\text{Jika } z = x^3 + x^2y + y^2$$

Maka turunan dari z terhadap x yaitu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^{3-1} + 2x^{2-1}y + 0 = 3x^2 + 2xy \quad (y \text{ merupakan konstanta})$$

Maka turunan dari z terhadap y yaitu

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + x^2 + 2y^{2-1} = x^2 + 2y \quad (x \text{ merupakan konstanta})$$

Contoh 2:

Diketahui fungsi $z = x \sin y$

- Deferensiasi z terhadap x maka $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y$
- Deferensiasi z terhadap y maka $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y$
- Deferensiasi *kedua* z terhadap x maka $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$
- Deferensiasi *kedua* z terhadap y maka $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin y$
- Deferensiasi *kedua* z terhadap x dan y maka $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y$
- Deferensiasi *kedua* z terhadap y dan x maka $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y$

b. Laju perubahan

Pada pertemuan yang sebelumnya telah dipelajari mengenai perubahan volume sebuah silinder. Seperti yang diketahui bahwa volume silinder dinyatakan dalam persamaan $V = \pi r^2 h$.

Diferensial parsial V terhadap r yaitu:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r.h$$

Diferensial parsial V terhadap h yaitu:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

Persamaan volume silinder $V = \pi r^2 h$ sehingga V merupakan fungsi r dan h maka,

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial r} \delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \delta h$$

pada persamaan tersebut perubahan variabel independen yang terjadi tanpa dipertimbangkan perubahan terhadap waktu. Sedangkan untuk laju perubahan

perlu dipertimbangkan perubahan terhadap waktu dan disimbolkan dengan δt . Sehingga persamaan untuk mencari laju perubahan volume terhadap waktu yaitu dengan mensubstitusi δt ke dalam persamaan perubahan volume.

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial r} \delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \delta h$$

Menjadi,

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\delta r}{\delta t} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\delta h}{\delta t}$$

Pada kondisi δt mendekati 0 maka $\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{dV}{dt}$, $\frac{\delta r}{\delta t} = \frac{dr}{dt}$ dan $\frac{\delta h}{\delta t} = \frac{dh}{dt}$, sedangkan variabel yang tidak terdapat δt tidak mengalami perubahan, sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Contoh 3:

Jari-jari atau radius sebuah silinder mengalami perubahan terhadap waktu yaitu meningkat dengan laju 2 cm/detik, sementara tinggi silinder tersebut mengalami penurunan dengan laju 1 cm/detik. Tentukan laju perubahan volume pada saat $r = 10$ cm dan $h = 15$ cm.

Jawab:

Diketahui bahwa persamaan untuk menghitung volume silinder yaitu:

$$V = \pi r^2 h$$

Dimana : ($r = 10$ cm dan $h = 15$ cm)

Catatan: r dan h merupakan nilai sesaat karena sedang mengalami perubahan.

Laju perubahan volume dapat diketahui dengan persamaan berikut:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Dimana:

$$\begin{aligned} V = \pi r^2 \cdot h & \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2 = 3,14 \cdot (10 \text{ cm})^2 = 314 \text{ cm}^2 \\ & \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 942 \text{ cm}^2 \\ & \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 2 \text{ cm/detik} \\ & \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -1 \text{ cm/detik ("-" karena } h \text{ menurun)} \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 942 \text{ cm}^2 \cdot 2 \frac{\text{cm}}{\text{detik}} + 314 \text{ cm}^2 \cdot -1 \text{ cm/detik}$$

$$\frac{dV}{dt} = 1884 \frac{\text{cm}^3}{\text{detik}} - 314 \frac{\text{cm}^3}{\text{detik}}$$

$$\frac{dV}{dt} = 1750 \frac{\text{cm}^3}{\text{detik}}$$

c. Fungsi implisit

Selain untuk menentukan laju perubahan volume silinder, diferensial parsial juga dapat digunakan dalam fungsi implisit. Sebagai contoh persamaan berikut merupakan fungsi implisit.

$$x^2 + 2xy + y^3 = 0$$

Tentukan diferensial dy/dx dari persamaan tersebut.

Untuk menyelesaikannya perlu diingat kembali bahwa persamaan diferensial parsial z merupakan fungsi x dan y . Untuk itu perlu diasumsikan z merupakan fungsi x dan y maka persamaanya akan menjadi,

$$z = x^2 + 2xy + y^3$$

seperti yang diketahui bahwa persamaan diferensial parsial $z = f(x,y)$ adalah

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y$$

untuk menentukan diferensial parsial z terhadap x maka perlu membagi persamaan tersebut dengan δx , sehingga diperoleh:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta x}$$

Pada kondisi δx mendekati 0 maka $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{dz}{dx}$ dan $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$ sedangkan variabel yang tidak terdapat δt tidak mengalami perubahan, sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Pada contoh ini $z = x^2 + 2xy + y^3$, sehingga *diferensial parsial z terhadap x dan diferensial z terhadap y yaitu*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 3y^2$$

Diperoleh hasil,

$$\frac{dz}{dx} = (2x + 2y) + (2x + 3y^2) \frac{dy}{dx}$$

Pada soal ini yang dicari adalah nilai dari turunan y terhadap x ($\frac{dy}{dx}$), sedangkan dari persamaan diatas ada dua variabel yang belum diketahui yaitu $\frac{dz}{dx}$ dan $\frac{dy}{dx}$. Dengan meninjau kembali awal soal diketahui bahwa z merupakan fungsi untuk $x^2 + 2xy + y^3$. Dimana $x^2 + 2xy + y^3 = 0$ sehingga dapat di tarik kesimpulan bahwa $z = 0$ yang berarti z merupakan konstanta dan nilai dari $\frac{dz}{dx} = 0$.

$$0 = (2x + 2y) + (2x + 3y^2) \frac{dy}{dx}$$

Atau

$$(2x - 2y) + (2x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

Untuk mendapat nilai $\frac{dy}{dx}$ maka perlu melakukan pemindahan variabel ke ruas sebelah kanan, sehingga diperoleh :

$$(2x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = -(2x + 2y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+2y)}{(2x+3y^2)}$$

Untuk lebih memahami materi tentang diferensial, maka dengan soal yang sama, diselesaikan dengan metode turunan implisit maka diperoleh:

$$x^2 + 2xy + y^3 = 0$$

$$2x + 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} + 2x \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = -2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} (2x + 3y^2) = -(2x + 2y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+2y)}{(2x+3y^2)} \quad \text{(diperoleh hasil yang sama)}$$

Pada contoh yang lain, jika f merupakan fungsi x dan y atau di tuliskan dengan $f(x, y) = 0$. Carilah diferensial y terhadap x (dy/dx).

Seperti pada penjelasan sebelumnya, maka diasumsikan $z = f(x, y)$ maka

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y$$

dengan cara yang sama pada penjelasan sebelumnya untuk menentukan dy/dx maka perlu membagi dengan δx dan buatlah $\delta x \rightarrow 0$ sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Seperti diketahui bahwa $z = 0$ (konstanta) maka $\frac{dz}{dx} = 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

Untuk lebih mudah mengingat dapat ditulis dengan,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \left\{ \frac{dz}{dx} = 0 \right\}$$

d. Perubahan variabel

Pada pokok bahasan persamaan diferensial parsial tentang perubahan variabel, merupakan persamaan yang lebih rumit lagi yaitu fungsi didalam fungsi. Dimana z merupakan fungsi x dan y atau dituliskan dengan $f(x, y)$ dan x serta y merupakan fungsi dari dua variabel lainnya yaitu u dan v . Dengan demikian z secara otomatis juga merupakan fungsi u dan v . Maka dari itu perlu dicari diferensial parsial z terhadap u ($\frac{\partial z}{\partial u}$) dan diferensial parsial z terhadap v ($\frac{\partial z}{\partial v}$).

$$z = f(x, y)$$

maka diferensial parsialnya

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y$$

untuk mencari diferensial z terhadap u maka persamaan diatas perlu dibagi dengan δu , sehingga diperoleh.

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta u}$$

Jika variabel v dipertahankan konstan, pada kondisi $\delta u \rightarrow 0$ maka $\frac{\delta x}{\delta u}$ menjadi $\frac{\partial x}{\partial u}$ dan $\frac{\delta y}{\delta u}$ berubah menjadi $\frac{\partial y}{\partial u}$.
Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Dengan cara yang sama, untuk mencari diferensial z terhadap v maka persamaan diatas perlu dibagi dengan δv , sehingga diperoleh.

$$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta v}$$

Jika variabel u dipertahankan konstan, pada kondisi $\delta v \rightarrow 0$ maka $\frac{\delta x}{\delta v}$ menjadi $\frac{\partial x}{\partial v}$ dan $\frac{\delta y}{\delta v}$ berubah menjadi $\frac{\partial y}{\partial v}$. Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Sebagai contoh untuk persamaan diatas sebagai berikut:

Jika $z = x^3 + y^3$, dimana $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, carilah $\frac{\partial z}{\partial r}$ dan $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

Jawab:

$$\begin{aligned} 1) \quad z = x^3 + y^3 \text{ maka} & \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \\ & \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \end{aligned}$$

$$x = r \cos \theta \text{ maka} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \text{ maka} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= 3x^2 \cos \theta + 3y^2 \sin \theta \\ &= 3(x^2 \cos \theta + y^2 \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad z = x^3 + y^3 \text{ maka} \quad & \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \\ & \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = r \cos \theta \text{ maka} \quad & \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \theta} = v \frac{du}{d\theta} + u \frac{dv}{d\theta} \text{ bentuk perkalian (u.v)} \\ & \text{sehingga diperoleh} \\ & \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \theta} = \cos \theta \cdot 0 + r(-\sin \theta) \\ & \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = r \sin \theta \text{ maka} \quad & \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \theta} = v \frac{du}{d\theta} + u \frac{dv}{d\theta} \text{ bentuk perkalian (u.v)} \\ & \text{sehingga diperoleh} \\ & \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \theta} = \sin \theta \cdot 0 + r \cdot \cos \theta \\ & \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= 3x^2(-r \cdot \sin \theta) + 3y^2 \cdot r \cdot \cos \theta \\ &= -3r x^2 \cdot \sin \theta + 3r y^2 \cdot \cos \theta \\ &= -3r(x^2 \sin \theta - y^2 \cos \theta) \end{aligned}$$

8. Rangkuman

a. Diketahui fungsi $z = x \sin y$

$$\text{Deferensiasi } z \text{ terhadap } x \text{ maka } \frac{\partial z}{\partial x} = \sin y$$

$$\text{Deferensiasi } z \text{ terhadap } y \text{ maka } \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y$$

$$\text{Deferensiasi } \textit{kedua} \text{ } z \text{ terhadap } x \text{ maka } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{Deferensiasi } \textit{kedua} \text{ } z \text{ terhadap } y \text{ maka } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin y$$

$$\text{Deferensiasi } z \text{ terhadap } x \text{ dan } y \text{ maka } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y$$

$$\text{Deferensiasi } z \text{ terhadap } y \text{ dan } x \text{ maka } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y$$

b. Laju perubahan $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial v}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$

c. Fungsi implisit $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \left\{ \frac{dz}{dx} = 0 \right\}$

d. Perubahan variabel

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

9. Tugas

- Membuat resume dari video penjelasan sesuai dengan topik bahasan dan jawab pertanyaan berikut.
 - Jelaskan sampai dimana tingkat pemahaman anda tentang materi yang diberikan
 - Jelaskan menurut pendapat anda pentingnya video penjelasan terhadap proses belajar
 - Langkah apasaja yang telah anda lakukan untuk lebih meningkatkan pemahaman tentang materi yang diberikan
 - Berikan contoh penerapan atau aplikasi tentang diferensial parsial II dalam kehidupan sehari-hari.
- Membuat makalah (pengembangan materi) tentang diferensial parsial II dari sumber referensi yang relevan dalam bentuk materi atau contoh-contoh soal.
- Menyelesaikan tugas mandiri sesuai bahan kajian sebagai berikut:
 - Tentukan dy/dx dari pernyataan berikut
 $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0$
dengan menggunakan diferensial parsial dan turunan implisit. Kemudian cocokkan hasil keduanya.
 - Sebuah kompresor torak digunakan untuk mengisi udara sebuah ban mobil dengan waktu yang cukup lama sehingga menimbulkan naiknya temperatur silinder tersebut dan menyebabkan silinder torak mengalami pemuaian hingga radius silinder meningkat dengan laju 0,001 cm/detik. Selain itu, *head* silinder torak juga mengalami pemuaian yang menyebabkan penurunan panjang langkah dengan laju 0,002 cm/detik. carilah laju perubahan volume pada saat radius 10 cm dan panjang langkah 15 cm.
 - Jika $z = x^4 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$ dan $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$. Carilah $\frac{\partial z}{\partial r}$ dan $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ dalam bentuk yang paling sederhana.
- Membuat resume Qs Al Jinn ;72:28, Hadist: Tirmidzi 3089

10. Daftar pustaka

- Al-Quran dan As-Sunnah
- Erwin Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", Edisi 6, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
- K.A Stroud, "Matematika Teknik". Edisi 5 Jilid 1. Erlangga. 2003.