

# **MODUL 10**

## **LIMIT**



**Mata Kuliah** : MATEMATIKA TEKNIK I  
**Kode / sks** : B2220 / 3 sks  
**Prodi** : TEKNIK MESIN  
**Semester** : III (Tiga)

Disusun oleh :

**MAFRUDDIN, S.T., M.T**

**PRODI TEKNIK MESIN**  
**FAKULTAS TEKNIK**  
**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO**

**Dibiayai Oleh:**

**Direktorat Pembelajaran Dan Kemahasiswaan**  
**Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset Dan Teknologi**  
**Kemetrician Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi**  
**2023**



## MODUL 10

### LIMIT

#### 1. Pengantar

Assalamu'alaikum wr. Wb.

Kegiatan belajar mengajar untuk mata kuliah Matematika Teknik I dilakukan dengan dua metode yaitu Daring (online) dan Luring (offline). Untuk mempermudah dalam memahami materi yang diberikan dan mencapai kompetensi yang diharapkan maka perlu diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut:

- a. Pelajarilah setiap materi yang terdapat pada modul ini (Modul 10. Limit) dengan sungguh-sungguh, apabila terdapat uraian materi atau pokok bahasan yang kurang dipahami atau belum dimengerti segera tanyakan pada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- b. Bacalah dengan teliti dan pahami apa yang menjadi capaian akhir dari setiap materi yang akan dipelajari
- c. Bacalah dengan teliti dan pahami apa saja indikator capaian pembelajaran yang harus dikuasai
- d. Berikan tanda pada bagian-bagian materi yang dianggap penting atau bagian yang belum dimengerti untuk ditanyakan kepada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- e. Buka dan pelajari setiap link materi (video atau dokumen lainnya) yang diberikan oleh tutor/dosen pengampu mata kuliah untuk menambah pemahaman Anda terkait materi yang dipelajari dalam kegiatan belajar pada modul ini
- f. *Download* dan Putarlah video penjelasan yang ada terkait materi atau pokok bahasan agar dapat memahami isi materi pada kegiatan ini secara lebih jelas dan paham serta dapat menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan. Jika diperlukan, putarlah video penjelasan berulang-ulang supaya benar-benar paham
- g. Carilah sumber referensi lainnya untuk menambah materi bahan ajar (baik dalam bentuk materi penjelasan maupun contoh-contoh soal) dan melengkapi tugas pada masing-masing topik perkuliahan serta memperluas wawasan Anda
- h. Pahami tugas yang harus didiskusikan dengan teman-temanmu (tugas kelompok) pada bagian forum diskusi pada topik bahasan tertentu. Gunakan pengetahuan dan pengalaman Anda sebelumnya untuk mendiskusikan penyelesaian masalah yang diberikan dalam forum diskusi tersebut
- i. Bacalah dan pahami pada bagian rangkuman materi untuk lebih meningkatkan pemahaman substansi materi dari materi kegiatan belajar yang telah dipelajari dan diskusikan
- j. Kerjakan tugas dengan semaksimal mungkin dan ikuti panduan yang diberikan serta gunakan rambu-rambu jawaban untuk menilai apakah jawaban Anda sudah memadai atau belum
- k. Kumpulkan tugas sesuai dengan batas waktu yang telah ditetapkan
- l. Kerjakan tugas Anda dengan jujur dan jangan mencontek
- m. Tugas dikumpulkan di SPADA UM METRO.

## 2. Capaian pembelajaran

Setelah mempelajari keseluruhan materi pada modul ini diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan tentang sifat-sifat limit dan rumus-rumus limit serta mampu menentukan nilai dari suatu persamaan limit. Memiliki moral, etika dan kepribadian yang baik di dalam menyelesaikan tugasnya.

## 3. Indikator Capaian Pembelajaran

Adapun tingkat penguasaan mahasiswa terhadap Capaian Pembelajaran Kegiatan Belajar ini secara rinci akan diukur dari kemampuan mahasiswa dalam:

- Menjelaskan tentang sifat-sifat limit dan rumus-rumus limit
- Mampu menentukan nilai dari suatu persamaan limit.
- Memiliki moral, etika dan kepribadian yang baik di dalam menyelesaikan tugasnya

## 4. Alokasi Jam Pembelajaran (JP) per pertemuan

- Total alokasi waktu : 3 x 50 menit
- Mode pembelajaran : Daring (online)
- Pertemuan : 12 (dua belas)

## 5. Pokok-pokok materi

- Pengantar limit
- Teorema limit
- Limit trigonometri
- Limit tak hingga
- Kekontinuan fungsi

## 6. Integrasi nilai islam

- Al-quran Qs Ath Thariiq;13-14

إِنَّهُ لَقَوْلُ فَصْلٍ ﴿١٣﴾ وَمَا هُوَ بِأَهْزَلٍ ﴿١٤﴾

13. Sesungguhnya Al Quran itu benar-benar firman yang memisahkan antara yang hak dan yang bathil.

14. dan sekali-kali bukanlah Dia senda gurau.

### b. Hadist

#### 1. Abu Daud 1342

سنن أبي داود ١٣٤٢: حَدَّثَنَا عَبْدُ اللَّهِ بْنُ مُحَمَّدٍ النَّفِيلِيُّ حَدَّثَنَا زُهَيْرٌ حَدَّثَنَا أَبُو إِسْحَقَ عَنْ عَاصِمِ بْنِ ضَمْرَةَ وَعَنْ الْحَارِثِ الْأَعْوَرِ عَنْ عَلِيِّ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ قَالَ زُهَيْرٌ أَحْسِبُهُ عَنْ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَنَّهُ قَالَ هَاتُوا رُبْعَ الْعُشُورِ مِنْ كُلِّ أَرْبَعِينَ دِرْهَمًا دِرْهَمٌ وَلَيْسَ عَلَيْكُمْ شَيْءٌ حَتَّى تَبْنِي مَائِنَتِي دِرْهَمٌ فَإِذَا كَانَتْ مَائِنَتِي دِرْهَمٍ فَوَيْهَا خَمْسَةُ دَرَاهِمٍ فَمَا زَادَ فَعَلَى حِسَابِ ذَلِكَ وَفِي الْعَنَمِ فِي أَرْبَعِينَ شَاةً شَاةً فَإِنْ لَمْ يَكُنْ إِلَّا تِسْعٌ وَثَلَاثُونَ فَلَيْسَ عَلَيْكَ فِيهَا شَيْءٌ وَسَاقَ صَدَقَةَ الْعَنَمِ مِثْلَ الزُّهْرِيِّ قَالَ وَفِي الْبَقْرِ فِي كُلِّ ثَلَاثِينَ تَبِيعٌ وَفِي الْأَرْبَعِينَ مُسِنَّةٌ وَلَيْسَ عَلَى الْعَوَامِلِ شَيْءٌ وَفِي الْإِبِلِ فَذَكَرَ صَدَقَتَهَا كَمَا ذَكَرَ الزُّهْرِيُّ

قَالَ وَفِي خَمْسٍ وَعِشْرِينَ خَمْسَةً مِنَ الْعَنَمِ فَإِذَا زَادَتْ وَاحِدَةً فَبَيْعُهَا ابْنَةُ مَخَاضٍ فَإِنْ لَمْ تَكُنْ بِنْتُ مَخَاضٍ فَبِنْتُ لُبُونٍ ذَكَرَ إِلَى خَمْسٍ وَثَلَاثِينَ فَإِذَا زَادَتْ وَاحِدَةً فَبَيْعُهَا بِنْتُ لُبُونٍ إِلَى خَمْسٍ وَأَرْبَعِينَ فَإِذَا زَادَتْ وَاحِدَةً فَبَيْعُهَا حَقَّةً طُرُوقَهُ الْجَمَلِ إِلَى سِتِّينَ ثُمَّ سَاقَ مِثْلَ حَدِيثِ الزُّهْرِيِّ قَالَ فَإِذَا زَادَتْ وَاحِدَةً يَعْنِي وَاحِدَةً وَتِسْعِينَ فَبَيْعُهَا جِذَانِ طُرُوقَهُ الْجَمَلِ إِلَى عِشْرِينَ وَمِائَةٍ فَإِنْ كَانَتْ الْإِبِلُ أَكْثَرَ مِنْ ذَلِكَ فَفِي كُلِّ خَمْسِينَ حَقَّةً وَلَا يَفْرُقُ بَيْنَ مُجْتَمِعٍ وَلَا يُجْمَعُ بَيْنَ مُفْتَرَقٍ حَشِيَّةِ الصَّدَقَةِ وَلَا تُؤْخَذُ فِي الصَّدَقَةِ هَرْمَةٌ وَلَا دَاتٌ عَوَارٌ وَلَا تَيْسٌ إِلَّا أَنْ يَشَاءَ الْمُصَدِّقُ وَفِي النَّبَاتِ مَا سَقَتْهُ الْأَنْهَارُ أَوْ سَقَتْ السَّمَاءُ الْعُشْرُ وَمَا سَقَى الْعَرَبُ فِيهِ نِصْفُ الْعُشْرِ وَفِي حَدِيثِ عَاصِمِ وَالْحَارِثِ الصَّدَقَةُ فِي كُلِّ عَامٍ قَالَ زُهَيْرٌ أَحْسَبُهُ قَالَ مَرَّةً وَفِي حَدِيثِ عَاصِمٍ إِذَا لَمْ يَكُنْ فِي الْإِبِلِ ابْنَةُ مَخَاضٍ وَلَا ابْنُ لُبُونٍ فَعِشْرَةُ دَرَاهِمٍ أَوْ سِتَاتَانِ حَدَّثَنَا سُلَيْمَانُ بْنُ دَاوُدَ الْمَهْرِيُّ أَخْبَرَنَا ابْنُ وَهْبٍ أَخْبَرَنِي جَرِيرُ بْنُ حَازِمٍ وَسَمَى آخَرَ عَنْ أَبِي إِسْحَاقَ عَنْ عَاصِمِ بْنِ ضَمْرَةَ وَالْحَارِثِ الْأَعْوَرِ عَنْ عَلِيِّ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ بِبَعْضِ أَوَّلِ هَذَا الْحَدِيثِ قَالَ فَإِذَا كَانَتْ لَكَ مِائَتَا دَرَاهِمٍ وَحَالَ عَلَيْهَا الْحَوْلُ فَبَيْعُهَا خَمْسَةَ دَرَاهِمٍ وَلَيْسَ عَلَيْكَ شَيْءٌ يَعْنِي فِي الدَّهَبِ حَتَّى يَكُونَ لَكَ عِشْرُونَ دِينَارًا فَإِذَا كَانَ لَكَ عِشْرُونَ دِينَارًا وَحَالَ عَلَيْهَا الْحَوْلُ فَبَيْعُهَا نِصْفَ دِينَارٍ فَمَا زَادَ فَبِحِسَابِ ذَلِكَ قَالَ فَلَا أُدْرِي أَعْلَى يَقُولُ فَبِحِسَابِ ذَلِكَ أَوْ رَفَعَهُ إِلَى النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ وَلَيْسَ فِي مَالٍ زَكَاةٌ حَتَّى يَحُولَ عَلَيْهِ الْحَوْلُ إِلَّا أَنْ جَرِيرًا قَالَ ابْنُ وَهْبٍ يَرِيدُ فِي الْحَدِيثِ عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ لَيْسَ فِي مَالٍ زَكَاةٌ حَتَّى يَحُولَ عَلَيْهِ الْحَوْلُ

Sunan Abu Daud 1342: Telah menceritakan kepada Kami Abdullah bin Muhammad An Nufaili, telah menceritakan kepada Kami Zuhair, telah menceritakan kepada Kami Abu Ishaq dari 'Ashim bin Dhamrah dan Al Harits Al A'war dari Ali radliallahu 'anhu, Zuhair berkata: Aku mengiranya dari Nabi shallallahu 'alaihi wa sallam bahwa beliau bersabda: "Berikan seper empat puluh, dari setiap empat puluh dirham satu dirham. Dan tidak ada kewajiban sedikitpun atas kalian hingga sempurna seratus dirham. Maka apabila telah berjumlah dua ratus dirham maka padanya terdapat zakat lima dirham, kemudian selebihnya sesuai perhitungan tersebut. Pada kambing, untuk jumlah empat puluh kambing zakat satu kambing, maka apabila hanya berjumlah tiga puluh sembilan maka tidak ada kewajiban sedikitpun atas kalian." Dan ia menyebutkan zakat kambing seperti yang disebutkan Az Zuhri. Ia berkata: Dan mengenai sapi pada setiap tiga puluh ekor terdapat seekor tabi', pada jumlah empat puluh terdapat satu musinnah, sapi yang digunakan untuk kerja tidak ada kewajiban sedikitpun, pada unta... Kemudian ia menyebutkan zakatnya seperti yang telah disebutkan Az Zuhri. Ia berkata: Dan pada jumlah dua puluh lima terdapat zakat lima kambing, kemudian apabila lebih satu ekor maka padanya terdapat zakat satu ekor bintu makhadh, kemudian apabila tidak ada bintu makhadh maka ibnu labun jantan, hingga tiga puluh lima. Kemudian apabila lebih satu ekor maka padanya zakat satu ekor bintu labun, hingga empat puluh lima. Kemudian apabila lebih satu ekor maka padanya terdapat zakat satu ekor hiqqah yang siap hamil, hingga enam puluh. Kemudian ia menyebutkan seperti hadits Az Zuhri. Ia berkata: kemudian apabila lebih satu ekor yaitu sembilan puluh satu ekor maka padanya terdapat zakat dua hiqqah yang siap untuk hamil, hingga seratus dua puluh. Kemudian apabila unta tersebut lebih banyak dari itu maka pada setiap lima puluh terdapat zakat satu hiqqah, dan tidak dipisahkan antara unta yang digabungkan, dan tidak digabungkan antara unta yang dipisahkan karena khawatir wajib mengeluarkan zakat. Dan tidak diambil

dalam zakat unta yang tua dan telah tanggal giginya, serta yang memiliki aib, dan unta pejantan, kecuali petugas zakat menghendaknya. Dan dalam tumbuh-tumbuhan yang diairi sungai atau disirami air hujan terdapat zakat sepersepuluh, dan yang disirami dengan ember maka padanya terdapat seperdua puluh. Dan dalam hadits 'Ashim serta Al Harits disebutkan: zakat pada setiap tahun. Zuhair berkata: aku mengira ia berkata lagi: Dan dalam hadits 'Ashim disebutkan: Apabila diantara unta tersebut tidak ada bintu makhadh dan juga ibnu labun maka diganti sepuluh dirham atau dua ekor kambing. Telah menceritakan kepada Kami Sulaiman bin Daud Al Mahri, telah mengabarkan kepada Kami Ibnu Wahb, telah mengabarkan kepadaku Jarir bin Hazim dan ia menyebutkan orang yang lain, dari Abu Ishaq, dari 'Ashim bin Dhamrah serta Al Harits Al A'war dari Ali radliallahu 'anhu dari Nabi shallallahu 'alaihi wa sallam dengan sebagian permulaan hadits ini berkata: "Kemudian apabila engkau memiliki dua ratus dirham, dan telah mencapai haul maka padanya terdapat zakat lima dirham, dan engkau tidak berkewajiban apapun yaitu pada emas hingga engkau memiliki dua puluh dinar. Maka apabila engkau memiliki uang dua puluh dinar dan telah mencapai haul maka padanya zakat setengah dinar, kemudian selebihnya sesuai dengan perhitungan tersebut." Zuhair berkata: aku tidak tahu apakah Ali mengatakan: sesuai dengan perhitungan tersebut atau ia merafa'kannya (menisbatkan perkataan) kepada Nabi shallallahu 'alaihi wa sallam. Dan tidak ada zakat pada harta hingga masuk satu haul. Hanya saja Jarir berkata: Ibnu Wahb menambahkan dalam hadits tersebut dari Nabi shallallahu 'alaihi wa sallam: "Tidak ada zakat pada harta hingga masuk satu haul."

## 2. Abu Daud 1414

سنن أبي داود ١٤١٤: حَدَّثَنَا مُوسَى بْنُ إِسْمَاعِيلَ حَدَّثَنَا حَمَّادٌ عَنْ سُهَيْلِ بْنِ أَبِي صَالِحٍ عَنْ أَبِيهِ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ مَا مِنْ صَاحِبٍ كُنْزٍ لَا يُؤَدِّي حَقَّهُ إِلَّا جَعَلَهُ اللَّهُ يَوْمَ الْقِيَامَةِ يُحْمَى عَلَيْهَا فِي نَارِ جَهَنَّمَ فَتُكْوَى بِهَا جَبْهُهُ وَجَنْبُهُ وَظَهْرُهُ حَتَّى يَفْضِي اللَّهُ تَعَالَى بَيْنَ عِبَادِهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ خَمْسِينَ أَلْفَ سَنَةٍ مِمَّا تُعْدُونَ ثُمَّ يَرَى سَبِيلَهُ إِمَّا إِلَى الْجَنَّةِ وَإِمَّا إِلَى النَّارِ وَمَا مِنْ صَاحِبٍ غَنِمٍ لَا يُؤَدِّي حَقَّهَا إِلَّا جَاءَتْ يَوْمَ الْقِيَامَةِ أَوْقَرَ مَا كَانَتْ فَيُطَبَّحُ لَهَا بِقَاعٍ قَرَقَرٍ فَتَنْطَحُ بِرُؤْسِهَا وَتَطْوُهُ بِأُظْلَافِهَا لَيْسَ فِيهَا عَقْصَاءٌ وَلَا جَلْحَاءٌ كُلَّمَا مَضَتْ أَخْرَاهَا رُدَّتْ عَلَيْهِ أَوْلَاهَا حَتَّى يَحْكُمَ اللَّهُ بَيْنَ عِبَادِهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ خَمْسِينَ أَلْفَ سَنَةٍ مِمَّا تُعْدُونَ ثُمَّ يَرَى سَبِيلَهُ إِمَّا إِلَى الْجَنَّةِ وَإِمَّا إِلَى النَّارِ وَمَا مِنْ صَاحِبٍ إِبِلٍ لَا يُؤَدِّي حَقَّهَا إِلَّا جَاءَتْ يَوْمَ الْقِيَامَةِ أَوْقَرَ مَا كَانَتْ فَيُطَبَّحُ لَهَا بِقَاعٍ قَرَقَرٍ فَتَنْطَوُّ بِأَخْفَافِهَا كُلَّمَا مَضَتْ عَلَيْهِ أَخْرَاهَا رُدَّتْ عَلَيْهِ أَوْلَاهَا حَتَّى يَحْكُمَ اللَّهُ تَعَالَى بَيْنَ عِبَادِهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ خَمْسِينَ أَلْفَ سَنَةٍ مِمَّا تُعْدُونَ ثُمَّ يَرَى سَبِيلَهُ إِمَّا إِلَى الْجَنَّةِ وَإِمَّا إِلَى النَّارِ حَدَّثَنَا جَعْفَرُ بْنُ مُسَافِرٍ حَدَّثَنَا ابْنُ أَبِي فُدَيْكٍ عَنْ هِشَامِ بْنِ سَعْدٍ عَنْ زَيْدِ بْنِ أَسْلَمَ عَنْ أَبِي صَالِحٍ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ نَحْوَهُ قَالَ فِي قِصَّةِ الْإِبِلِ بَعْدَ قَوْلِهِ لَا يُؤَدِّي حَقَّهَا قَالَ وَمِنْ حَقِّهَا حَلْبُهَا يَوْمَ وَرَدَهَا حَدَّثَنَا الْحَسَنُ بْنُ عَلِيٍّ حَدَّثَنَا يَزِيدُ بْنُ هَارُونَ أَخْبَرَنَا شُعْبَةُ عَنْ قَتَادَةَ عَنْ أَبِي عُمَرَ الْعَدَنِيِّ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ قَالَ سَمِعْتُ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ نَحْوَ هَذِهِ الْقِصَّةِ فَقَالَ لَهُ بَعْضُ الْأَبِي هُرَيْرَةَ فَمَا حَقُّ الْإِبِلِ قَالَ تُعْطَى الْكَرِيمَةَ وَتَمْنَحُ الْعَزِيرَةَ وَتُفْقَرُ الظَّهْرُ وَتُطْرَقُ الْفَحْلُ وَتَسْقَى اللَّبَنَ حَدَّثَنَا يَحْيَى بْنُ خَلْفٍ حَدَّثَنَا أَبُو عَاصِمٍ عَنْ ابْنِ جُرَيْجٍ قَالَ قَالَ أَبُو الزُّبَيْرِ سَمِعْتُ عُبَيْدَ بْنَ عَمِيرٍ قَالَ قَالَ رَجُلٌ يَا رَسُولَ اللَّهِ مَا حَقُّ الْإِبِلِ فَذَكَرَ نَحْوَهُ زَادَ وَإِعَارَةُ دَلْوِهَا

Sunan Abu Daud 1414: Telah menceritakan kepada Kami Musa bin Isma'il, telah menceritakan kepada Kami Hammad dari Suhail bin Abu Shalih, dari



ayahnya dari Abu Hurairah bahwa Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam bersabda: "Tidaklah pemilik barang simpanan yang tidak menunaikan haknya kecuali Allah menjadikannya pada Hari Kiamat dipanaskan barang simpanan tersebut dalam neraka jahannam, lalu dibakar dengannya dahinya, lambung dan punggungnya, hingga Allah memberikan keputusan diantara para hambaNya pada hari yang kadarnya adalah lima puluh ribu tahun menurut perhitungan kalian, kemudian ia akan melihat jalannya, ke Surga atau ke Neraka. Dan tidaklah pemilik kambing yang tidak menunaikan haknya melainkan kambing tersebut akan datang pada Hari Kiamat lebih banyak daripada dahulunya dan pemiliknya di dudukkan di hadapannya pada tanah terbuka yang datar, kambing tersebut menanduknya dengan tanduknya dan menginjaknya dengan sepatu-sepatunya, tidak ada padanya kambing yang bertanduk bengkok serta yang tidak bertanduk. Setiap kali kambing yang terakhir selesai maka kambing yang pertama dikembalikan lagi, hingga Allah memberikan keputusan diantara para hambaNya pada hari yang kadarnya adalah lima puluh ribu tahun menurut perhitungan kalian. Kemudian ia akan melihat jalannya, ke Surga atau ke Neraka. Dan tidaklah pemilik unta yang tidak menunaikan haknya melainkan unta tersebut akan datang pada Hari Kiamat lebih banyak daripada dahulunya dan orang tersebut didudukkan di hadapannya pada tanah terbuka yang datar, unta tersebut menginjaknya dengan sepatunya. Setiap kali unta yang terakhir selesai maka unta yang pertama dikembalikan kepadanya hingga Allah ta'ala memberikan keputusan diantara para hambaNya pada hari kadarnya adalah lima puluh ribu tahun menurut perhitungan kalian. Kemudian ia akan melihat jalannya, ke Surga atau ke Neraka." Telah menceritakan kepada Kami Ja'far bin Musafir, telah menceritakan kepada Kami Ibnu Abu Fudaik dari Hisyam bin Sa'd dari Zaid bin Aslam dari Abu Shalih dari Abu Hurairah dari Nabi shallallahu 'alaihi wa sallam seperti itu. Ia berkata dalam kisah unta, setelah sabdanya: "Tidak menunaikan haknya..." Beliau bersabda: "Dan diantara haknya adalah memerahnya pada hari kedatangannya ke air." Telah menceritakan kepada Kami Al Hasan bin Ali, telah menceritakan kepada Kami Yazid bin Harun, telah mengabarkan kepada Kami Syu'bah dari Qatadah dari Abu Umar Al Ghudani, dari Abu Hurairah, ia berkata: saya mendengar Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam seperti kisah ini. Kemudian Abu Umar berkata kepada Abu Hurairah: "Apakah hak unta?" Ia berkata: "Engkau memberikan yang berharga, memberikan susunya yang deras, meminjamkan untuk dikendarai, mengawinkan pejantan, dan memberi minum susu." Telah menceritakan kepada Kami Yahya bin Khalaf, telah menceritakan kepada Kami Abu 'Ashim dari Ibnu Juraij, ia berkata: Abu Az Zubair berkata: saya mendengar 'Ubaid bin 'Umair berkata: Seorang laki-laki berkata: "Wahai Rasulullah, apakah hak unta?" Kemudian 'Ubaid menyebutkan hadits seperti itu dan menambahkan: "Dan meminjamkan embernnya."

**7. Uraian Materi****a. Pengantar limit**

Secara umum Limit dapat diartikan sebagai suatu batasan. Batas yang menggunakan konsep pendekatan fungsi saat suatu titik mendekati nilai tertentu. Suatu fungsi yang memiliki limit antara kiri dan limit kanan dengan besaran nilai yang sama maka fungsi tersebut dapat dikatakan memiliki limit. Dalam kehidupan sehari-hari limit memiliki banyak manfaat di beberapa bidang seperti di bidang kimia yaitu untuk mengetahui tanggal kadaluarsa suatu makanan, kemudian dibidang ekonomi berperan untuk menghitung biaya rata-rata dan bunga. Selain itu, limit juga berfungsi untuk menghitung kecepatan kendaraan dalam bidang fisika dan masih banyak bidang lainnya yang menerapkan fungsi limit.

**b. Teorema limit**

Untuk menyelesaikan perhitungan limit maka perlu dipahami mengenai sifat-sifat limit. Limit memiliki bentuk umum seperti berikut:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ dimana } x \neq c$$

Limit diatas dibaca “limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $c$  adalah  $L$ ”.

Sebuah fungsi punya limit dititik  $c$ , jika limit kiri dan limit kanan bernilai sama di titik  $c$ . Dan dapat ditulis dengan:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Sebagai contoh sebuah fungsi punya limit sama (limit kiri dan kanan sama). Maka limit tersebut memiliki nilai limit kiri dan kanannya sama, maka dapat disimpulkan:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Misalkan  $f(x)$  dan  $g(x)$  merupakan fungsi yang mempunyai limit di  $x \rightarrow c$  dengan  $k$  dan  $c$  merupakan bilangan real, dan  $n$  merupakan bilangan bulat positif maka berlaku sifat-sifat limit fungsi sebagai berikut.

- $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k[\lim_{x \rightarrow c} f(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] \pm [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]$



- e.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] \cdot [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]$
- f.  $\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[ \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \right]$  dengan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
- g.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n$
- h.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

Untuk menentukan nilai limit ada beberapa metode yang dapat digunakan yaitu:

## 1) Substitusi

Metode atau cara penyelesaian substitusi merupakan cara yang paling dasar dalam menentukan nilai limit. Apabila dengan metode substitusi mendapatkan hasil yang tidak valid maka harus digunakan dengan metode yang lain. Sebagai contoh:

- a. Tentukan limit dari:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

- b. Tentukan limit dari:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2(2x^2 + 2x + 1) = 2(2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1) = 10$$

- c. Tentukan limit dari:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1)} = \frac{(1-1)}{(1^2-1)} = \frac{(0)}{(0)} = 0 \text{ (maka harus digunakan metode yang lain)}$$

## 2) Faktorisasi

Metode faktorisasi atau memfaktorkan merupakan cara penyelesaian limit dengan memfaktorkan suatu fungsi. Metode ini digunakan apabila diselesaikan dengan substitusi tidak ditemukan nilainya. Sebagai contoh:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1)} = \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}$$

## 3) Perkalian Sekawan atau Merasionalkan Penyebut

Metode ini merupakan pilihan ketiga ketika limit tidak dapat diselesaikan dengan substitusi maupun faktorisasi. Sebagai contoh:

Tentukan limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9-x}}{x}$$



Langkah pertama digunakan cara substitusi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9-x}}{x} = \frac{3 - \sqrt{9-0}}{0} = \frac{0}{0} = 0 \text{ (coba cara lain)}$$

Menggunakan metode perkalian sekawan:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9-x}}{x} \cdot \frac{3 + \sqrt{9+x}}{3 + \sqrt{9+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^2 - 3\sqrt{9-x} + 3\sqrt{9-x} - (\sqrt{9-x})^2}{x(3 + \sqrt{9-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 - (9-x)}{x(3 + \sqrt{9-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 - 9 + x}{x(3 + \sqrt{9-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(3 + \sqrt{9-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(3 + \sqrt{9-x})} \\ &= \frac{1}{(3 + \sqrt{9-0})} \\ &= \frac{1}{(3+3)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

### c. Limit Trigonometri

Limit trigonometri digunakan untuk menentukan suatu fungsi trigonometri. limit trigonometri merupakan nilai yang mendekati suatu sudut fungsi trigonometri. Penerapan limit trigonometri dalam kehidupan sehari-hari diantaranya yaitu pada lensa kaca mata. Limit trigonometri digunakan untuk menghitung batasan (ukuran) dari pusat optik (lensa cekung) ke titik fokus utama. Selain itu, dalam bidang teknik mesin juga menggunakan limit trigonometri diantaranya untuk menghitung besarnya perpindahan panas, kecepatan suatu benda, dan percepatan. Bentuk Umum untuk Limit Trigonometri ada beberapa diantaranya yaitu:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Sebagai contoh:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \frac{4}{2} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Ada beberapa bentuk lainya untuk limit trigonometri yaitu:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$	5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$	7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

Contoh:

Tentukan limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)$$

Diketahui sifat dasar limit yaitu:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] \pm [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]$$

Maka,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x + \cos x] &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \\ &= \sin (\pi/2) + \cos (\pi/2) \\ &= 1+0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

d. **Limit tak hingga**

Limit fungsi aljabar dapat juga terjadi jika variabelnya mendekati tak berhingga atau limit tak hingga, seperti berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ dan } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x)$$

Apabila dijumpai persoalan seperti itu maka dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu dengan mengalikan dengan faktor lawan dan membaginya dengan pangkat tertinggi.

Contoh:

Tentukan nilai limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x}$$

penyelesaian:

**Dikalikan dengan faktor lawan.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 + \sqrt{x^2 + x} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 2x} \sqrt{x^2 + x} - (\sqrt{x^2 + 2x})^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (\sqrt{x^2 + 2x})^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x}}$$

**Dibagi dengan pangkat tertinggi.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{x}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 2}{2x^2 - 4}$$

**Penyelesaian dengan dibagi dengan pangkat tertinggi ( $x^2$ ):**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 2}{2x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x^2}}{2 - \frac{4}{x^2}}$$

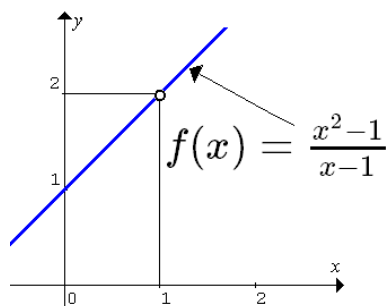
$$= \frac{6 + \frac{2}{\infty^2}}{2 - \frac{4}{\infty^2}}$$

$$= \frac{6 + 0}{2 - 0} = 3$$

### e. Kekontinuan fungsi

Suatu fungsi dikatakan kontinu apabila pada titik tertentu (misal  $x = a$ ) jika grafiknya tidak terputus pada titik tersebut.

Perhatikan gambar grafik fungsi  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$



Jika  $x=1$  disubstitusikan ke dalam fungsi  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  maka diperoleh  $f(x) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = 0$  sehingga dapat dikatakan bahwa grafik tersebut tidak kontinu pada  $x=1$ . Kemudian jika mensubstitusikan  $x=2$  ke dalam fungsi  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  maka diperoleh  $f(x) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$  terdapat nilai.

Pada titik  $x = 3$  terdapat nilai sehingga grafik akan kontinu pada titik selain  $x = 1$ . Untuk menentukan suatu fungsi merupakan kontinu atau tidak berdasarkan grafik tentunya akan sangat sulit, karena kita menggambarkan grafiknya. Suatu fungsi kontinu atau tidak dapat dilakukan dengan fungsi limit.

Fungsi  $f(x)$  yang terdefinisi pada selang buka yang memuat  $a$  dikatakan kontinu di  $x = a$  jika.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Fungsi dikatakan kontinu apabila:

- ✓  $f(x)$  kontinu di  $x = a$  jika
- ✓  $f(a)$  terdefinisi (dapat dihitung)
- ✓ Nilai limitnya di  $x = a$  ada
- ✓ Nilai limit sama dengan nilai fungsinya, yaitu

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Contoh:

- a. Tunjukkan bahwa fungsi  $f(x) = 3x - 2$ , kontinu dititik  $x=1$

Penyelesaian:

$$\text{Nilai fungsi } f(x) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

Berarti bahwa limit kontinu di  $x=1$

- b. Apakah fungsi  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  kontinu pada  $x = 1$

Penyelesaian :

$$\text{Nilai fungsi } f(x) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} = 0$$

Syarat tidak terpenuhi, jadi diskontinu.

**Teorema fungsi kontinu:**

1. Jika  $f$  dan  $g$  kontinu di  $x = a$ , dan  $k$  suatu konstanta, maka fungsi  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $kf$ ,  $fg$ , dan  $f/g$  ( jika ) juga kontinu di  $x = a$ .
2. Fungsi polinomial kontinu di  $\mathbb{R}$ , sedangkan fungsi rasional kontinu di daerah definisinya.
3. Jika  $g$  kontinu di  $x = a$  dan  $f$  kontinu di  $g(a)$ , maka fungsi kontinu di  $x = a$ .

Contoh:

$$\text{Jika } f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ ax^2 + b & 0 < x < 3 \\ x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$$

Tentukan nilai  $a$  dan  $b$  agar  $f(x)$  kontinu di setiap bilangan riil.

Jawab:

Fungsi  $f(x)$  merupakan bentuk polinomial untuk  $x < 0$ ,  $0 < x < 3$ , dan  $x > 3$ , maka  $f(x)$  pasti kontinu untuk  $x$  pada selang-selang tersebut. Jadi cukup diperiksa kekontinuan  $f(x)$  di  $x = 0$  dan di  $x = 3$ .

Agar  $f(x)$  kontinu di  $x = 0$ :

- ✓  $f(0)$  terdefinisi, yaitu  $f(0) = 1$
- ✓ Nilai limitnya di  $x = 0$  ada dan nilai limitnya di  $x = 0$  sama dengan  $f(0)$ , yaitu

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(1)$$

Maka

$$f(x) = ax^2 + b$$

$$1 = a \cdot 0^2 + b \quad \rightarrow b = 1$$



Agar  $f(x)$  kontinu di  $x = 3$ :

- ✓  $f(3)$  terdefinisi, yaitu  $f(3) = 5$
- ✓ Nilai limitnya di  $x = 3$  ada dan nilai limitnya di  $x = 3$  sama dengan  $f(3)$ , yaitu

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

Maka

$$f(x) = ax^2 + b$$

$$5 = a \cdot 3^2 + b \quad \rightarrow b = 1$$

$$5 = a \cdot 9 + 1 \quad \rightarrow a = 4/9$$

Jadi  $f(x)$  kontinu dimana-mana bila  $b = 1$  dan  $a = 4/9$

Contoh:

Misalkan suatu fungsi,

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 7, & \text{untuk } x \leq 5 \\ kx - 3, & \text{untuk } x > 5 \end{cases}$$

Carilah nilai  $k$  sehingga fungsi  $f(x)$  kontinu di  $x = 5$

Jawab:

- ✓ Syarat fungsi kontinu  $\rightarrow x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) \text{ atau } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(x)$$

- ✓ Nilai dari fungsi  $f(5)$

$$\text{Untuk } x = 5, \text{ maka fungsinya yaitu } f(x) = 3x + 7 \rightarrow f(5) = 3 \cdot 5 + 7 = 22$$

- ✓ Limit kiri dengan  $x = 5$  mendekati kiri, maka  $f(x) = 3x + 7$  yang digunakan. Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 3x + 7 = 3 \cdot 5 + 7 = 22$$

- ✓ Limit kanan untuk  $x = 5$  mendekati kanan, maka fungsi  $f(x) = kx - 3$  yang digunakan, sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} kx - 3 = 5k - 3$$

- ✓ Menentukan nilai  $k$  agar kontinu,

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$

$$22 = 5k - 3$$

$$22 + 3 = 5k$$

$$k = 25/5$$

$$k = 5$$

Jadi, supaya fungsi  $f(x)$  kontinu maka nilai  $k$  yaitu 5.

**8. Rangkuman****a. Pengantar limit**

Secara umum Limit dapat diartikan sebagai suatu batasan. Batas yang menggunakan konsep pendekatan fungsi saat suatu titik mendekati nilai tertentu.

**b. Teorema limit**

a.  $\lim_{x \rightarrow c} k = k$

b.  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

c.  $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k[\lim_{x \rightarrow c} f(x)]$

d.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] \pm [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]$

e.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] \cdot [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]$

f.  $\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[ \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \right]$  dengan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

g.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n$

h.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

Metode penyelesaian limit:

- 1) Substitusi,
- 2) Faktorisasi,
- 3) Perkalian Sekawan atau Merasionalkan Penyebut

**c. Limit trigonometri**

Bentuk Umum untuk Limit Trigonometri ada beberapa diantaranya yaitu:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Ada beberapa bentuk lain untuk limit trigonometri yaitu:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$



3. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

7. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

4. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

8. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

d. Limit tak hingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + g(x)$$

Metode penyelesaian dengan:

- 1) Dibagi dengan pangkat tertinggi.
- 2) Dikalikan dengan faktor lawan.

e. Kekontinuan fungsi

Fungsi  $f(x)$  yang terdefinisi pada selang buka yang memuat  $a$  dikatakan kontinu di  $x = a$  jika.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Fungsi dikatakan kontinu apabila:

- ✓  $f(x)$  kontinu di  $x = a$  jika
- ✓  $f(a)$  terdefinisi (dapat dihitung)
- ✓ Nilai limitnya di  $x = a$  ada
- ✓ Nilai limit sama dengan nilai fungsinya, yaitu

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

## 9. Tugas

1. Membuat resume dari video penjelasan sesuai dengan topik bahasan dan link dan jawab pertanyaan berikut.
  - a. Jelaskan sampai dimana tingkat pemahaman anda tentang materi yang diberikan
  - b. Jelaskan menurut pendapat anda pentingnya video penjelasan terhadap proses belajar
  - c. Langkah apa saja yang telah anda lakukan untuk lebih meningkatkan pemahaman tentang materi yang diberikan
  - d. Berikan contoh penerapan atau aplikasi tentang Limit dalam kehidupan sehari-hari.
2. Membuat makalah (pengembangan materi) tentang Limit dari sumber referensi yang relevan dalam bentuk materi atau contoh-contoh soal.
3. Menyelesaikan tugas mandiri sesuai bahan kajian sebagai berikut:

Tentukan:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} 5x + 1$



- b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x^2-1)}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16-x}}{x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{4x}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)$
- f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 4x}$
- g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2}{2x^2-4}$
- h) Tunjukkan bahwa fungsi  $f(x) = 4x - 3$ , kontinu dititik  $x=1$
- i) Apakah fungsi  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$  kontinu pada  $x = 1$
- j) Nilai  $a$  dan  $b$  agar fungsi berikut kontinu
- $$\begin{cases} ax + 3, & \text{untuk } x \leq 3 \\ x^2 + 1, & \text{untuk } 2 < x \leq 4 \\ 5 - bx, & \text{untuk } x > 4 \end{cases}$$

4. Membuat resume Qs Ath Thariiq;13-14 dan Hadist: Abu Daud 1342, Abu Daud 1414

## 10. Daftar pustaka

- Al-Quran dan As-Sunnah
- Erwin Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", Edisi 6, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
- Edwin J. Purcell Dale Varberg. "Kalkulus Dan Geometri Analitis". Edisi kelima. Erlangga 1987. Jakarta. Terjemah.
- <https://www.ruangguru.com/blog/konsep-limit-fungsi-aljabar-dan-sifat-sifatnya>
- <https://www.gramedia.com/literasi/limit-fungsi-aljabar/>