

# **MODUL 12**

## **INTEGRAL LUAS KURVA**



**Mata Kuliah** : MATEMATIKA TEKNIK I  
**Kode / sks** : B2220 / 3 sks  
**Prodi** : TEKNIK MESIN  
**Semester** : III (Tiga)

Disusun oleh :

**MAFRUDDIN, S.T., M.T**

**PRODI TEKNIK MESIN**  
**FAKULTAS TEKNIK**  
**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO**

**Dibiayai Oleh:**

**Direktorat Pembelajaran Dan Kemahasiswaan**  
**Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset Dan Teknologi**  
**Kemetrician Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi**  
**2023**



## MODUL 12 INTEGRAL LUAS KURVA

### 1. Pengantar

Assalamu'alaikum wr. Wb.

Kegiatan belajar mengajar untuk mata kuliah Matematika Teknik I dilakukan dengan dua metode yaitu Daring (online) dan Luring (offline). Untuk mempermudah dalam memahami materi yang diberikan dan mencapai kompetensi yang diharapkan maka perlu diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut:

- a. Pelajarilah setiap materi yang terdapat pada modul ini (Modul 12. Integral Luas Kurva) dengan sungguh-sungguh, apabila terdapat uraian materi atau pokok bahasan yang kurang dipahami atau belum dimengerti segera tanyakan pada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- b. Bacalah dengan teliti dan pahami apa yang menjadi capaian akhir dari setiap materi yang akan dipelajari
- c. Bacalah dengan teliti dan pahami apa saja indikator capaian pembelajaran yang harus dikuasai
- d. Berikan tanda pada bagian-bagian materi yang dianggap penting atau bagian yang belum dimengerti untuk ditanyakan kepada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- e. Buka dan pelajari setiap link materi (video atau dokumen lainnya) yang diberikan oleh tutor/dosen pengampu mata kuliah untuk menambah pemahaman Anda terkait materi yang dipelajari dalam kegiatan belajar pada modul ini
- f. *Download* dan Putarlah video penjelasan yang ada terkait materi atau pokok bahasan agar dapat memahami isi materi pada kegiatan ini secara lebih jelas dan paham serta dapat menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan. Jika diperlukan, putarlah video penjelasan berulang-ulang supaya benar-benar paham
- g. Carilah sumber referensi lainnya untuk menambah materi bahan ajar (baik dalam bentuk materi penjelasan maupun contoh-contoh soal) dan melengkapi tugas pada masing-masing topik perkuliahan serta memperluas wawasan Anda
- h. Pahami tugas yang harus didiskusikan dengan teman-temanmu (tugas kelompok) pada bagian forum diskusi pada topik bahasan tertentu. Gunakan pengetahuan dan pengalaman Anda sebelumnya untuk mendiskusikan penyelesaian masalah yang diberikan dalam forum diskusi tersebut
- i. Bacalah dan pahami pada bagian rangkuman materi untuk lebih meningkatkan pemahaman substansi materi dari materi kegiatan belajar yang telah dipelajari dan diskusikan
- j. Kerjakan tugas dengan semaksimal mungkin dan ikuti panduan yang diberikan serta gunakan rambu-rambu jawaban untuk menilai apakah jawaban Anda sudah memadai atau belum
- k. Kumpulkan tugas sesuai dengan batas waktu yang telah ditetapkan
- l. Kerjakan tugas Anda dengan jujur dan jangan mencontek
- m. Tugas dikumpulkan di SPADA UM METRO.

## 2. Capaian pembelajaran

Setelah mempelajari keseluruhan materi pada modul ini diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan tentang integral tentu merupakan suatu ukuran dari luas dibawah kurva, menggunakan integral tentu untuk mencari luas diantara kurva dan sumbu mendatar. Memiliki moral, etika dan kepribadian yang baik di dalam menyelesaikan tugasnya.

## 3. Indikator Capaian Pembelajaran

Adapun tingkat penguasaan mahasiswa terhadap Capaian Pembelajaran Kegiatan Belajar ini secara rinci akan diukur dari kemampuan mahasiswa dalam:

- Menjelaskan bahwa integral tentu merupakan suatu ukuran dari luas dibawah kurva
- Menggunakan integral tentu untuk mencari luas diantara kurva dan sumbu mendatar
- Memiliki moral, etika dan kepribadian yang baik di dalam menyelesaikan tugasnya.

## 4. Alokasi Jam Pembelajaran (JP) per pertemuan

- Total alokasi waktu : 3 x 50 menit
- Mode pembelajaran : Daring (online)
- Pertemuan : 14 (lima belas)

## 5. Pokok-pokok materi

- Luas dibawah kurva
- Integral sebagai suatu penjumlahan

## 6. Integrasi nilai islam

- Al-quran Qs At Taubah ayat 11

﴿ فَإِنْ تَابُوا وَأَقَامُوا الصَّلَاةَ وَآتَوُا الزَّكَاةَ فَإِخْوَانُكُمْ فِي الدِّينِ وَنُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴾

11. jika mereka bertaubat, mendirikan sholat dan menunaikan zakat, Maka (mereka itu) adalah Anda-Andamu seagama. dan Kami menjelaskan ayat-ayat itu bagi kaum yang mengetahui.

- Hadist Abu Daud 1331

سنن أبي داود ١٣٣١: حَدَّثَنَا قُتَيْبَةُ بْنُ سَعِيدٍ النَّقْفِيُّ حَدَّثَنَا اللَّيْثُ عَنْ عَقِيلِ بْنِ الزُّهْرِيِّ أَخْبَرَنِي عُبَيْدُ اللَّهِ بْنُ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ عُثَيْبَةَ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ قَالَ لَمَّا تُوْفِيَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ وَاسْتُخْلِفتْ أَبُو بَكْرٍ بَعْدَهُ وَكَفَرَ مَنْ كَفَرَ مِنَ الْعَرَبِ قَالَ عُمَرُ بْنُ الْخَطَّابِ لِأَبِي بَكْرٍ كَيْفَ تُفَاتِلُ النَّاسَ وَقَدْ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَمْرٌ أَنْ أَقَاتِلَ النَّاسَ حَتَّى يَقُولُوا لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ فَمَنْ قَالَ لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ عَصَمَ مِنِّي مَالَهُ وَنَفْسَهُ إِلَّا بِحَقِّهِ وَحِسَابِهِ عَلَى اللَّهِ عَزَّ وَجَلَّ فَقَالَ أَبُو بَكْرٍ وَاللَّهِ لَأُقَاتِلَنَّ مَنْ فَرَّقَ بَيْنَ الصَّلَاةِ وَالزَّكَاةِ فَإِنَّ الزَّكَاةَ حَقُّ الْمَالِ وَاللَّهُ لَوْ مَنَعُونِي عَقَالًا كَانُوا يُؤَدُّونَهُ إِلَيَّ رَسُولِ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ لَقَاتَلْتُهُمْ عَلَى مَنْعِهِ



فَقَالَ عُمَرُ بْنُ الْخَطَّابِ فَوَاللَّهِ مَا هُوَ إِلَّا أَنْ رَأَيْتُ اللَّهَ عَزَّ وَجَلَّ قَدْ شَرَحَ صَدْرَ أَبِي بَكْرٍ لِلْقِتَالِ قَالَ فَعَرَفْتُ أَنَّهُ الْحَقُّ قَالَ أَبُو دَاوُدَ وَرَوَاهُ رَبَاحُ بْنُ زَيْدٍ وَرَوَاهُ عَبْدُ الرَّزَّاقِ عَنْ مَعْمَرٍ عَنِ الزُّهْرِيِّ بِإِسْنَادِهِ وَقَالَ بَعْضُهُمْ عَقَالًا وَرَوَاهُ ابْنُ وَهْبٍ عَنْ يُونُسَ قَالَ عَنَّا قَالَ أَبُو دَاوُدَ قَالَ شُعَيْبُ بْنُ أَبِي حَمْزَةَ وَمَعْمَرُ وَالزُّبَيْدِيُّ عَنِ الزُّهْرِيِّ فِي هَذَا الْحَدِيثِ لَوْ مَنْعُونِي عَنَّا قَالَا وَرَوَى عَنِّي عَنْ يُونُسَ عَنِ الزُّهْرِيِّ فِي هَذَا الْحَدِيثِ قَالَ عَنَّا حَدَّثَنَا ابْنُ السَّرْحِ وَسَلِيمَانُ بْنُ دَاوُدَ قَالَا أَخْبَرَنَا ابْنُ وَهْبٍ أَخْبَرَنِي يُونُسُ عَنِ الزُّهْرِيِّ هَذَا الْحَدِيثِ قَالَ قَالَ أَبُو بَكْرٍ إِنَّ حَقَّهُ أَداءُ الزَّكَاةِ وَقَالَ عَقَالًا.

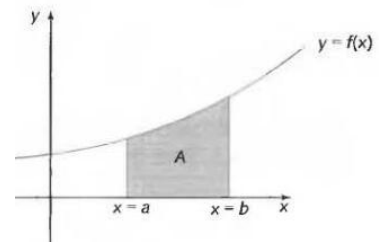
Sunan Abu Daud 1331: Telah menceritakan kepada Kami Qutaibah bin Sa'id Ats Tsaqafi, telah menceritakan kepada Kami Al Laits dari 'Uqail dari Az Zuhri, telah mengabarkan kepadaku 'Ubaidullah bin Abdullah bin 'Utbah dari Abu Hurairah, ia berkata: Tatkala Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam meninggal dan Abu Bakr diangkat sebagai khalifah setelah beliau dan telah kafir sebagian orang Arab, 'Umar bin Al Khaththab berkata kepada Abu Bakr: bagaimana engkau memerangi orang-orang tersebut padahal Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam telah bersabda: "Aku diperintahkan untuk memerangi manusia hingga mereka mengucapkan: LAA ILAAHA ILLALLAAH Barang siapa yang mengucapkan: LAA ILAAHA ILLALLAAH maka ia telah melindungi dariku harta dan jiwanya kecuali dengan haknya, sedangkan perhitungannya kembali kepada Allah 'azza wa jalla." Maka Abu Bakr berkata: sungguh aku akan memerangi orang yang memisahkan antara shalat dan zakat, sesungguhnya zakat adalah hak harta. Demi Allah seandainya mereka menahan dariku satu tali kekang (unta) yang dahulunya mereka tunaikan kepada Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam niscaya aku akan memerangi mereka karena penolakannya. Kemudian 'Umar bin Al Khaththab berkata: Demi Allah sungguh aku melihat Allah 'azza wa jalla telah melapangkan dada Abu Bakr untuk memerangi orang-orang tersebut. Umar berkata: maka aku mengetahui bahwa ia adalah yang benar. Abu Daud berkata: dan hadits tersebut diriwayatkan oleh Rabah bin Zaid, dan diriwayatkan oleh Abdurrazzaq dari Ma'mar dari Az Zuhri dengan sanadnya. Sebagian ulama mengatakan: 'iqal, sedangkan Ibnu Wahb dari Yunus meriwayatkannya, ia mengatakan: anak kambing. Abu Daud berkata: Syu'aib bin Abu Hamzah serta Ma'mar dan Az Zubaidi dari Az Zuhri berkata: seandainya mereka menolakku satu ekor anak kambing. Sedangkan 'Anbasah telah meriwayatkan dari Yunus dari Az Zuhri dalam hadits ini, ia berkata: anak kambing. Telah menceritakan kepada Kami Ibnu As Sarh dan Sulaiman bin Daud mereka berkata: telah mengabarkan kepada Kami Ibnu Wahb, telah mengabarkan kepadaku Yunus dari Az Zuhri hadits ini, ia berkata: Abu Bakr berkata: sesungguhnya haknya adalah menunaikan zakat. Dan ia menyebutkan: 'Iqalan.

## 7. Uraian Materi

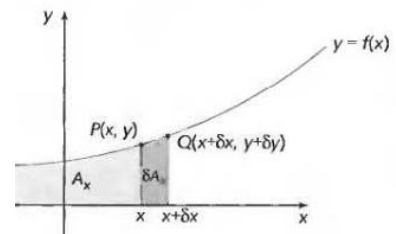
### a. Luas dibawah kurva

Integral merupakan kebalikan dari turunan atau diferensial, sehingga perhitungan pada integral tidak terlepas dari perhitungan yang dilakukan pada turunan atau diferensial. Salah satu aplikasi atau penerapan integral yaitu digunakan untuk menentukan luas dibawah kurva yang dibatasi oleh persamaan dan dengan batasan tertentu.

Sebagai contoh seperti pada gambar disamping. Sebuah persamaan yang dinyatakan dalam bentuk  $y = f(x)$ , kemudian dari persamaan tersebut dibuat grafik yang di arsir dengan luas disimbolkan dengan huruf "A" dan dibatasi oleh  $x = a$  dan  $x = b$  pada sumbu  $x$ . Perhatikan luas A pada gambar yang di arsir berada pada daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = f(x)$ , sumbu  $x$  dan kedua garis tegak yang melalui  $x = a$  dan  $x = b$ , dimana  $b$  terletak disebelah kanan dari letak huruf a sehingga  $b > a$ .

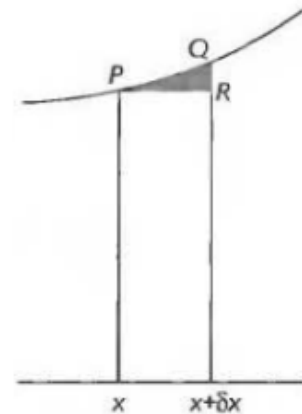


Untuk menentukan luas A, perlu diperhatikan bahwa luas keseluruhan atau luas total di antara kurva yang sama ( $y = f(x)$ ) dan sumbu  $x$  dari kiri hingga ke titik sembarang P pada kurva tersebut dengan koordinat  $(x,y)$  yang akan di tandai (disimbolkan) dengan  $A_x$ .



Luas  $\delta A_x$  adalah luasan yang dibatasi oleh lajur antara PQ di mana Q merupakan koordinat  $(x+\delta x, y+\delta y)$ . Jika lajur ini di asumsikan sama atau menyerupai (diaproksimasi) dengan persegi panjang yang memiliki tingginya  $y$  dan lebar  $\delta x$  maka  $\delta A_x \approx y dx$ . Ini dapat diaartikan bahwa:

$$\frac{\delta A_x}{\delta x} \approx y$$



Persegi panjang pada umumnya akan dibentuk oleh garis lurus dan tanpa ada perubahan pada setiap sisi-sisinya sehingga perhitungan luas pada persegi tersebut akan menghasilkan perhitungan yang benar. Berbeda dengan kurva yang dibentuk oleh  $y = f(x)$  tersebut, garis yang semestinya dari P ke R jika pada persegi panjang, namun pada kurva justru dari PQR dan ini memungkinkan terjadi kesalahan dalam perhitungan luas kurva. Kesalahan dalam perhampiran ini diberikan oleh luas PQR dalam bangun tersebut dikanan, di mana lajunya telah diperbesar. Jika lebar lajur itu dikurangi maka kesalahannya juga akan direduksi. Juga, jika  $\delta x \rightarrow 0$  dan  $A_x \rightarrow 0$  dan:

$$\frac{\delta A_x}{\delta x} \rightarrow \frac{dA_x}{dx} \text{ sehingga, dalam limitnya } \frac{dA_x}{dx} = y$$

Seperti yang sudah diketahui bahwa integrasi atau integral merupakan proses kebalikan dari proses pendiferensialan, sehingga dapat dilihat bahwa:

$$A_x = \int y \, dx$$

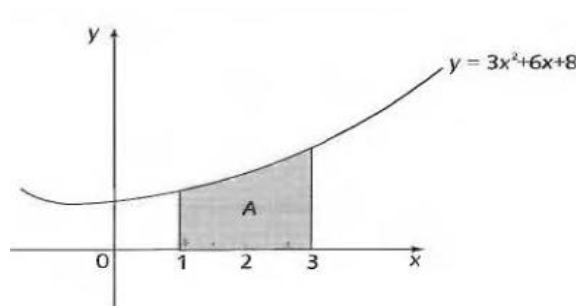
Luas total di antara kurva dan sumbu x hingga ke titik P diberikan untuk integral taktentu. Jika  $x = b$  maka  $A_b = \int_{(x=b)} y \, dx$  (nilai integral tersebut dan oleh karenanya, luas hingga ke  $b$ ) dan jika  $x = a$  maka  $A_a = \int_{(x=a)} y \, dx$  (nilai integral tersebut dan oleh karenanya, luas hingga ke  $a$ ). Karena  $b$  terletak sebelah kanan dari  $a$  maka  $b > a$ , selisih kedua luasan  $A_b - A_a$  menghasilkan luas  $A$  yang dibutuhkan. Sehingga dapat dituliskan dengan:

$$A = \int_{(x=b)} y \, dx - \int_{(x=a)} y \, dx \text{ dan ditulis dengan } A = \int_a^b y \, dx$$

Integral dengan batas seperti pada persamaan diatas disebut dengan integral tentu karena memiliki batas integral ( $a$  dan  $b$ ). Bilangan  $a$  merupakan batas bawah dan berada dibawah tanda integral. Batas  $b$  dengan batas kanan berada diatas tanda integral. Perhatikan bahwa dalam proses pengurangan ketika integral itu ditentukan nilainya, maka konstanta ( $C$ ) integral hilang yang menyisakan nilai numeriknya luasan tersebut.

*Contoh 1:*

Untuk menentukan luas yang dibatasi oleh kurva  $y = 3x^2 + 6x + 8$ , sumbu x dan ordinat  $x = 1$  dan  $x = 3$ .



$$A = \int_a^b y \, dx$$

$$A = \int_a^b (3x^2 + 6x + 8) \, dx$$

$$A = \left[ \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 8x \right]_1^3$$

$$A = [x^3 + 3x^2 + 8x]_1^3$$

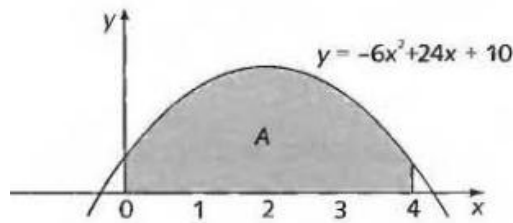
$$A = [3^3 + 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3] - [1^3 + 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1]$$

$$A = [27 + 27 + 24] - [1 + 3 + 8]$$

$$A = 78 - 12 = 66 \text{ satuan}^2.$$

Contoh 2:

Hitunglah luas yang dibatasi oleh kurva  $y = -6x^2 + 24x + 10$ , sumbu x dan ordinat  $x = 0$  dan  $x = 4$ .



$$A = \int_a^b y \, dx$$

$$A = \int_a^b (-6x^2 + 24x + 10) \, dx$$

$$A = \left[ -\frac{6}{3}x^3 + \frac{24}{2}x^2 + 10x \right]_0^4$$

$$A = [-2x^3 + 12x^2 + 10x]_0^4$$

$$A = [-2 \cdot 4^3 + 12 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4] - [-2 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0]$$

$$A = [-128 + 192 + 40] - [0]$$

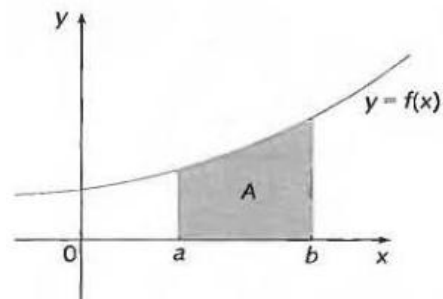
$$A = 104 \text{ satuan}^2.$$

## b. Integral sebagai suatu penjumlahan

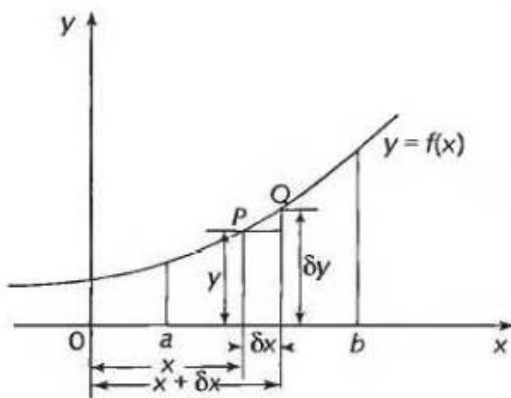
Integral dapat diaplikasikan untuk menentukan luas dibawah suatu kurva. Seperti yang diketahui bahwa luas kurva merupakan kualitas yang bernilai positif akan tetapi sebagian perhitungan integral tentu memiliki nilai negatif. Nilai negatif pada dasarnya hanya menandakan letak kurva tersebut. Jika nilai kurva negatif itu berarti terletak dibawah sumbu x. Pada topik ini akan ditentukan luas kurva dengan metode yang sedikit berbeda yaitu dengan membagi kurva menjadi bagian-bagian kecil dalam menentukan luasnya.

Perlu diingat kembali bahwa luas A (seperti gambar disamping) di bawah kurva  $y = f(x)$  antara  $x = a$  dan  $x = b$  dapat dihitung dengan integral tentu:

$$A = \int_a^b y \, dx$$



Perhatikan gambar berikut ( untuk menghitung luas) ini secara lebih cermat:



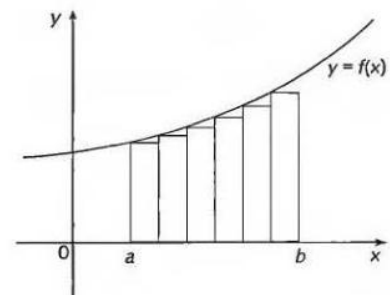
Misalkan P merupakan titik  $(x, y)$  pada kurva tersebut dan Q merupakan titik serupa dengan koordinat  $(x + \delta x, y + \delta y)$ . Luas hampiran A lajur yang di bawah busur PQ diberikan oleh:

$$\delta A = y \, \delta x$$

Perhitungan luas dibawah kurva pada metode sebelumnya yaitu dengan mengasumsikan seperti luas persegi panjang, namun metode tersebut terdapat kesalahan karena terjadi perubahan garis dan ada penambahan luas pada bagian kanan atas kurva yaitu PQR. Pada metode integral sebagai penjumlahan luas kurva yaitu dengan membagi keseluruhan bangun yang di antara  $x = a$  dan  $x = b$  menjadi sejumlah jalur (luas-luas kecil) seperti itu, luas menyeluruh merupakan penjumlahan luas semua persegi panjang  $y \cdot \delta x$  ini. Dengan kata lain  $A =$  penjumlahan semua persegi panjang  $y \cdot \delta x$  diantara  $x = a$  dan  $x = b$ . ini dapat ditulis sebagai  $A = \sum_{x=a}^{x=b} y \cdot \delta x$  dengan  $\sum$  menggambarkan penjumlahan semua suku yang terbentuk.

Jika persegi panjang yang dibuat semakin kecil maka jumlah persegi panjang juga akan semakin banyak, tetapi kesalahan total dalam perhitungan luas itu juga akan berkurang.

Jika suatu persegi panjang yang sangat kecil yang tak terhingga jumlahnya, masing-masing dengan luas yang terlalu kecil untuk berdiri sendiri.



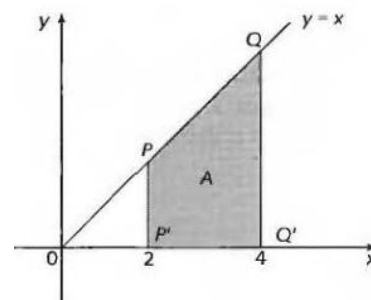
Maka dalam keadaan limit begitu  $\delta x \rightarrow 0$ ,  $A = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} y \cdot \delta x$   
Tetapi kita telah mengetahui bahwa

$$A = \int_a^b y \, dx \quad \cdot \quad \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} y \cdot \delta x = A = \int_a^b y \, dx$$

Contoh:

Diketahui suatu persamaan garis lurus  $y = x$ , seperti pada gambar berikut. Tentukan luas A pada sumbu x dan di antara  $x = 2$  dan  $x = 4$ .

Berdasarkan persamaan garis lurus  $y = x$  maka diperoleh gambar grafik seperti gambar segitiga. Diketahui bahwa rumus untuk menghitung segitiga yaitu  $\frac{1}{2} \times$  alas  $\times$  tinggi.



Coba perhatikan luas A pada gambar, luas A merupakan luas total sampai titik  $x = 4$  dikurangi luas segitiga sampai pada titik  $x = 2$  atau luas A merupakan selisih luas kedua segitiga  $OQQ'$  dan  $OPP'$  sehingga perhitungan Luas A yaitu:

$$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2$$

$$A = 8 - 2$$

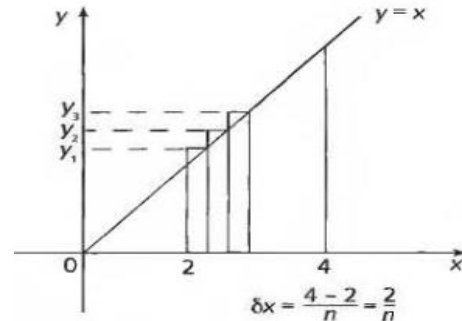
$$A = 6 \text{ satuan}^2$$



Sekarang coba diselesaikan dengan menggunakan integral sebagai penjumlahan. Langkah yang perlu dilakukan adalah dengan membagi luas A menjadi lajur yang sama (luasannya yang lebih kecil dan sama), menjumlahkan luasnya dan kemudian mengambil limit yang begitu lebar lajur tersebut hingga mendekati nol.

Pada gambar di samping, luas tersebut telah dibagi menjadi  $n$  lajur masing-masing dengan lebar  $\delta x$  dengan :

$$\delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$$



Tinggi lajur diberikan sebagai berikut:

a) Tinggi pada  $y_1$

$$y_1 = y(2 + \delta x) = y\left(2 + \frac{2}{n}\right) = 2 + \frac{2}{n}$$

b) Tinggi pada  $y_2$

$$Y_2 = y(2 + 2\delta x) = y\left(2 + 2 \cdot \frac{2}{n}\right) = 2 + 2 \cdot \frac{2}{n}$$

c) Tinggi pada  $y_3$

$$Y_3 = y(2 + 3 \cdot \delta x) = y\left(2 + 3 \cdot \frac{2}{n}\right) = 2 + 3 \cdot \frac{2}{n}$$

d) Tinggi pada  $y_r$

$$Y_r = y(2 + r \cdot \delta x) = y\left(2 + r \cdot \frac{2}{n}\right) = 2 + r \cdot \frac{2}{n}$$

e) Tinggi pada  $y_n$

$$Y_n = y(2 + n \cdot \delta x) = y\left(2 + n \cdot \frac{2}{n}\right) = 2 + n \cdot \frac{2}{n} = 2 + n \cdot \frac{2}{n} = 4$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{x=2}^{x=4} y \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \left(2 + \frac{2r}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \left(\frac{4}{n} + \frac{4r}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{4}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{4r}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{r=1}^n 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{r=1}^n r \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} \cdot n\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= 4 + 2 = 6 \text{ satuan}^2 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa begitu lebar setiap lajur berkurang ( $x \rightarrow 0$ ), jumlah  $n$  juga memberas  $n \rightarrow \infty$ .

$$\text{Catatan: } \sum_{r=1}^n 1 = n \text{ dan } \sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$$

**8. Rangkuman**

- a. Suatu integral tentu dengan batas kurva ( $x=a$  dan  $x=b$ ) disebut integral tentu. Konstanta integral C dalam hal demikian akan selalu hilang pada tahap pengurangan.

$$A = \int_{(x=b)} y \, dx - \int_{(x=a)} y \, dx \text{ yang ditulis } A = \int_a^b y \, dx$$

- b. Integral sebagai penjumlahan

$$A = \int_a^b y \, dx \quad \cdot \quad \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} y \cdot \delta x = A = \int_a^b y \, dx$$

**9. Tugas**

- Membuat resume dari video penjelasan sesuai dengan topik bahasan dan jawab pertanyaan berikut.
  - Jelaskan sampai dimana tingkat pemahaman anda tentang materi yang diberikan
  - Jelaskan menurut pendapat anda pentingnya video penjelasan terhadap proses belajar
  - Langkah apasaja yang telah anda lakukan untuk lebih meningkatkan pemahaman tentang materi yang diberikan
  - Berikan contoh penerapan atau aplikasi tentang integral dalam kehidupan sehari-hari.
- Membuat makalah (pengembangan materi) tentang integral dari sumber referensi yang relevan dalam bentuk materi atau contoh-contoh soal.
- Menyelesaikan tugas mandiri sesuai bahan kajian sebagai berikut:

Diketahui  $y = 3x^2 + 14x + 10$ .

  - Buatlah grafik dari persamaan tersebut
  - Carilah luas yang dibatasi oleh kurva persamaan tersebut pada sumbu x dan ordinat di  $x = 0$  dan  $x = 2$ .
- Membuat resume Qs At Taubah ;11 dan Hadist: Tirmidzi 3264

**10. Daftar pustaka**

- Al-Quran dan As-Sunnah
- Erwin Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", Edisi 6, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
- K.A Stroud, "Matematika Teknik". Edisi 5 Jilid 1. Erlangga. 2003.
- Edwin J. Purcell Dale Varberg. "Kalkulus Dan Geometri Analitis". Edisi kelima. Erlangga 1987. Jakarta. Terjemah.