BAB 2
FUNGSI (PEMETAAN)

Tujuan Instruksional Umum:

Setelah mempelajari materi pada bab ini, mahasiswa diharapkan dapat menjelaskan konsep dan sifat-sifat relasi, fungsi serta aljabar dari fungsi; menyelidiki keterkaitan antara satu himpunan dengan himpunan lainnya; dan menyelidiki keterkaitan antara satu struktur matematika dengan struktur matematika lainnya.

Tujuan Instruksional Khusus:

Setelah diberikan penjelasan materi terkait fungsi, diharapkan mahasiswa dapat:

2.1. Menjelaskan definisi dari fungsi.

2.2. Menentukan relasi dari dua buah himpunan.

2.3. Menjelaskan definisi daerah asal, jangkauan atau bayangan.

2.4. Memahami sifat-sifat relasi seperti: refleksif, simetrik, transitif, dan anti transitif.

2.5. Menjelaskan definisi fungsi.

2.6. Menentukan contoh dan bukan contoh dari fungsi.
2.7. Memahami dan membedakan jenis-jenis fungsi, seperti: injektif, surjektif, dan bijektif.
2.8. Menentukan contoh dan bukan dari masing-masing jenis fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.
2.9. Menentukan komposisi dari dua buah fungsi.
2.10. Memahami definisi bilangan bulat.
2.11. Memahami definisi dari faktor persekutuan terbesar (*greatest common divisor*).
2.12. Menentukan gcd dari beberapa bilangan bulat.
2.13. Membuktikan teorema dari gcd.
2.14. Memahami persekutuan terkecil (*least common multiple*).
2.15. Menentukan lcm dari beberapa bilangan bulat.
2.16. Memahami definisi kekongruenan.
2.17. Membuktikan beberapa teorema dari kekongruenan.
2.18. Memahami definisi induksi matematika.
2.19. Membuktikan kebenaran dengan menggunakan induksi matematika.

Deskripsi Singkat:

Pada kegiatan belajar 2 dibahas konsep dasar dan sifat dari fungsi. Konsep-konsep ini menjadi dasar bagi sistem matematika dan sifat-sifat sistem matematika. Hubungan antara dua atau lebih himpunan dapat digambarkan melalui suatu fungsi. Konsep fungsi memungkinkan kita untuk dapat mengetahui keterkaitan antara satu himpunan dengan himpunan lainnya. Lebih dari itu, melalui fungsi tertentu, dalam hal ini fungsi yang mengawetkan struktur matematika (homomorfisma, transformasi linier), dapat dikaji keterkaitan satu struktur matematika dengan struktur matematika lainnya.

Konsep fungsi atau pemetaan menempati posisi yang sentral pada setiap cabang matematika. Pada cabang matematika yang lebih dekat dengan dunia aplikasi, misalnya Kalkulus, sebutan fungsi lebih populer digunakan dari pada sebutan pemetaan. Pada cabang matematika yang lebih abstrak, misalnya Struktur Aljabar, istilah pemetaan lebih populer digunakan dari pada istilah fungsi. Pada dasarnya sebuah fungsi adalah sebuah relasi atau hubungan yang mempunyai sifat khusus.

2.1. Relasi

Sebuah relasi pada dasarnya adalah sebuah himpunan dari pasangan terurut.

Definisi 2.1:

Misalkan A dan B merupakan dua buah himpunan, maka hasil kali silang (*cross product*) dari A dan B. Dinotasikan dengan:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Definisi 2.2:

Sebuah relasi dari A ke B adalah subhimpunan dari $A \times B$

Contoh 1:

Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, maka $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A|.|B|$
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$
3. Perkalian tidak bersifat komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

4. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

Misalkan f adalah sebuah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Dengan melihat unsur-unsur dari f, kita dapat menemukan unsur-unsur A yang terkait dengan unsur-unsur dari B. Unsur-unsur dari A yang terkait dengan unsur-unsur di B adalah sebuah subhimpunan dari A, disebut **daerah asal (*domain*)** dari f. Unsur-unsur dari B yang berelasi dengan unsur dari A adalah sebuah subset dari B, disebut **jangkauan (*range*)** atau **bayangan (*image*)** dari f. Secara lebih formal, kita memiliki definisi berikut.

Definisi 2.3:

Misalkan f sebuah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka **daerah asal** dari f, dinotasikan dengan $D(f)$ didefinisikan sebagai himpunan

$\{x | x \in A \text{ dan terdapat } y \in B \text{ sedemikian sehingga } (x, y) \in f\}$

Jangkauan atau **bayangan** dari f, dinotasikan dengan $I(f)$ didefinisikan sebagai himpunan

$\{y | y \in B \text{ dan terdapat } x \in A \text{ sedimikian sehingga } (x, y) \in f\}$

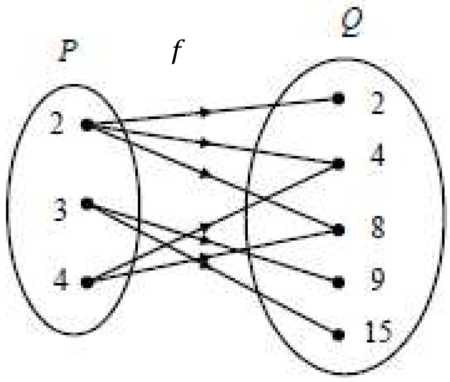
Contoh 2:

Misalkan $A = \{4,5,7,8,9\}$ dan $B = \{16,18,20,22\}$. Definisikan $f \subseteq A \times B$ dengan

$$f = \{(4,16), (4,20), (5,20), (8,16), (9,18)\}$$

Maka f adalah relasi dari A ke B. Perhatikan bahwa $(a, b) \in f$ jika dan hanya jika a membagi b, di mana $a \in A$ dan $b \in B$. Perhatikan bahwa $D(f) = \{4,5,8,9\}$ dan $I(f) = \{16,18,20\}$.

Contoh 3:



Gambar 2.1. Diagram Venn Relasi *f*

Menunjukkan Relasi f dari himpunan P ke Himpunan Q dengan demikian diperoleh:

$$f = \{(2,2), (2,4), (2,8), (3,9), (3,15), (4,4), (4,8)\}$$

2.1.1. Sifat-Sifat Relasi:

Suatu relasi R pada himpunan A, maka:

1. $(x, x) \in f, \forall\, x \in A$ (Sifat Refleksif)
2. $(x, y) \in f$ maka $(y, x) \in f, \forall\, x, y \in A$ (Sifat Simetrik)
3. $(x, y) \in f$ dan $(y, z) \in f$ maka $(x, z) \in f,\ \forall\, x, y, z \in A$ (Sifat Transitif)
4. $(x, y) \in f$ dan $(y, x) \in f$ maka $x = y,\ \forall\, x, y \in A$ (Sifat Anti Transitif)

Definisi 2.4:

Suatu relasi f pada himpunan A dikatakan ekuivalen jika memenuhi sifat-sifat refleksif, simetrik dan transitif.

Contoh 4:

Misalkan $A = \{1,2,3\}$, maka $R = \cdots$

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

Contoh 4:

$f = \{(x, y) | x \in N, y \in N\ dan\ x \geq y\}$

Tunjukkan apakah f memenuhi ketiga sifat di atas.

Bukti:

Ambil sembarang $x \in N$ maka $x = x$ akibatnya dipenuhi $x \geq x$ artinya $(x, x) \in f$ *(sifat refleksif dipenuhi)*

Ambil sembarang $x, y, z \in N$ dengan $(x, y) \in f$ dan $(y, z) \in f$

akan ditunjukkan $(x, z) \in f$

$(x, y) \in f$ artinya $x \geq y$ dan $(y, z) \in f$ artinya $y \geq z$

dari $x \geq y$ maka $x - y \geq 0$

$y \geq z$ maka $y - z \geq 0$ akibatnya diperoleh $x - z \geq 0$ atau $x \geq z$ menurut definisi $(x, y) \in f$ dan $(y, x) \in f$ maka $(x, z) \in f$

(sifat transitif terpenuhi)

Ambil sembarang $x, y \in A$ dengan $(x, y) \in f$ dan $(y, x) \in f$

akan ditunjukkan bahwa $x = y$

Andaikan $x \neq y$ berarti $x > y$ atau $x < y$

Dari $x > y$ terjadi kontradiksi dengan $(y, x) \in f$ atau $y \geq x$

Dari $x < y$ terjadi kontradiksi dengan $(x, y) \in f$ atau $x \geq y$

Jadi pengadaian salah yang benar $x = y$

Sifat simetri tidak dipenuhi (beri contoh penyangkalan)

2.2. Fungsi (Pemetaan)

Suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan B (masing-masing tidak kosong) adalah satu cara atau aturan yang dapat dipakai untuk mengaitkan setiap unsur di A dengan tepat satu unsur di B.

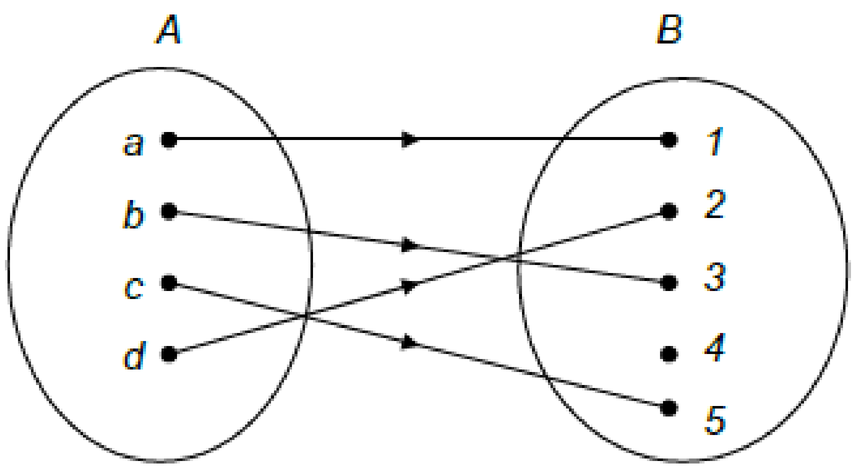
Pemetaan $\beta: A \rightarrow B$

Secara matematik definisi di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\forall\, x \in A\, \exists\, y! \in B \ni y = \beta(x)$$

(Baca untuk setiap $x \in A$ terdapat y tunggal elemen dari B sehingga $y = \beta(x)$.

Definisi pemetaan di atas dapat diilustrasikan dengan gambar berikut:



Gambar 2.2.

Menunjukkan Relasi Sebagai Suatu Pemetaan

Definisi di atas ekuivalen dengan: $\forall\, x, y \in A$ dengan $x = y$ maka $\beta(x) = \beta(y)$. Himpunan A dinamakan daerah asal (Domain) dari β, sedangkan himpunan B dinamakan daerah kawan (kodomain) dari β. Jika $\beta: A \rightarrow B$ suatu pemetaan, dengan $\beta(x) = y$, maka y dikatakan banyangan (*image*) atau peta dari x dan pengaitannya dituliskan sebagai $x \rightarrow y$.

Hubungan dari unsur-unsur dari B yang merupakan peta dari unsur-unsur A dinamakan daerah hasil (*range*) dari β atau jelajah dan dinyatakan dengan $\beta(A)$. Sehingga $\beta(A) = \{\beta(x) | x \in A\}$ atau $\beta(A) = \{1,2,3,5\}$

Jika $y \in B$, maka semua unsur-unsur dari A yang dipetakan menjadi y disbeut **prapeta** dari y dan dinyatakan dengan $\beta^*(y)$. Dengan demikian, berarti:

$$\beta^*(y) = \{\beta(x) = y | x \in A\}$$

jelaslah bahwa $B(A) \subseteq B$ dan juga $\beta^*(y) \subseteq A, \forall\, y \in B$.

2.2.1. Jenis-Jenis Fungsi (Pemetaan)

2.2.1.1. Fungsi Injektif

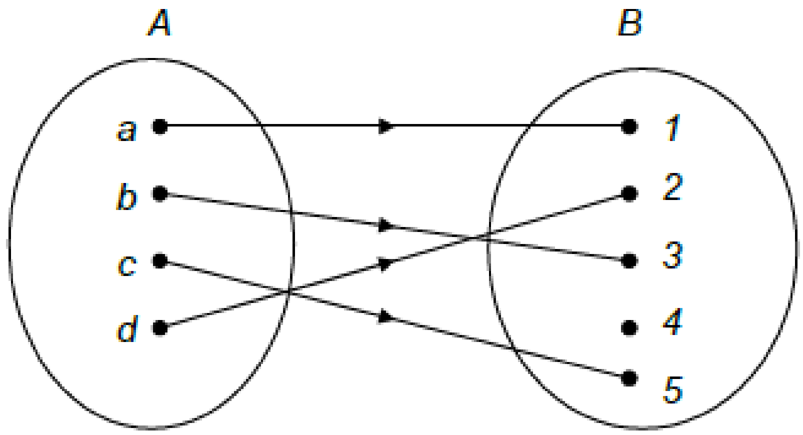
Definisi 2.5:

Suatu pemetaan $\beta: A \to B$ dikatakan injektif atau satu-satu jika dan hanya jika $\forall\, x \in \beta(A) \to \beta^*(x)$ berupa himpunan tunggal.

Dengan demikian pernyataan yang ekuivalen dengan definisi di atas adalah:

a) $\forall\, x, y \in S$ dengan $x \neq y$, maka $\beta(x) \neq \beta(y)$ atau

b) $\forall\, x, y \in S$ dengan $\beta(x) = \beta(y)$, maka $x = y$



Gambar 2.3.

Menunjukkan Pemetaan Injektif

Contoh 6:

Misalkan $\beta: Z \to Z$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-satu?

Penyelesaian:

a) $f(x) = x^2 + 1$ bukan merupakan fungsi satu-satu, karena untuk kedua x yang bernilai mutlak sama, tetapi tandanya berbeda memiliki nilai fungsi yang sama. Misalnya, $f(3) = f(-3) = 10$ padahal $3 \neq -3$.

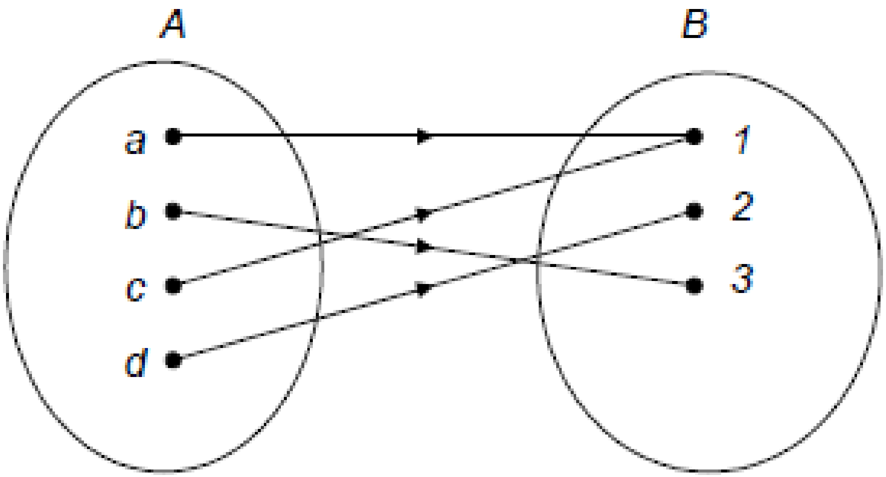
b) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu ke satu karena untuk $x \neq y$,
$x - 1 \neq y - 1$. Misal, untuk $x = 2$, maka $f(2) = 1$ dan untuk $y = -2$
maka $f(-2) = -3$.

2.2.1.2.Fungsi Surjektif

Definisi 2.6:

Suatu pemetaan $\beta: A \rightarrow B$ dikatakan surjektif jika dan hanya jika $\beta(A) = B$. Dengan kata lain, daerah nilai sama dengan daerah kawan.

Dari definisi di atas relasi β yang digambarkan di bawah ini menunjukkan fungsi surjektif.



Gambar 2.4. Menunjukkan Pemetaan Surjektif

Pernyataan berikut ini ekuivalen dengan definisi di atas:

a) $\forall\, b \in B, \exists\, a \in A \ni \beta(A) = b$ (dibaca untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian hingga $\beta(A) = b$)

b) $\forall\, b \in B \rightarrow B^{*}(b) \neq \emptyset$

Contoh 7:

Misalkan $\beta{:}\, Z \rightarrow Z$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi surjektif?

Penyelesaian:

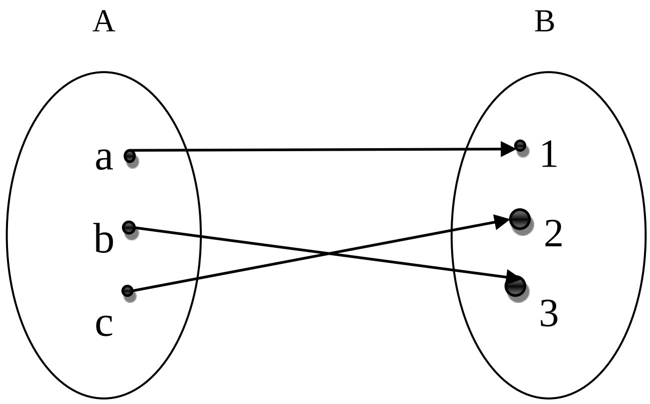
a) $f(x) = x^2 + 1$ bukan merupakan fungsi surjektif, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari β.

b) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi surjektif karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

2.2.1.3.Fungsi Bijektif

Definisi 2.7:

Suatu pemetaan $\beta: A \to B$ dikatakan bijektif jika dan hanya jika β merupakan fungsi yang surjektif dan injektif.



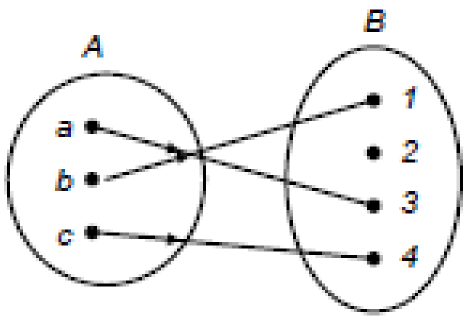
Gambar 2.5. Menunjukkan Pemetaan Bijektif

Contoh 8:

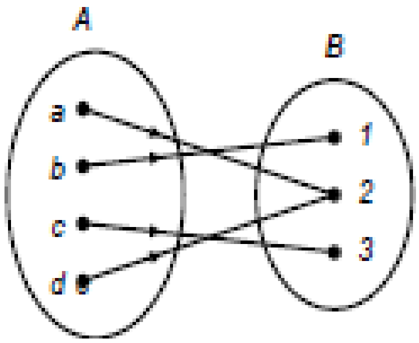
Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang bekoresponden satu-satu, karena f adalah fungsi injektif dan fungsi surjektif.

Perhatikan gambar berikut:

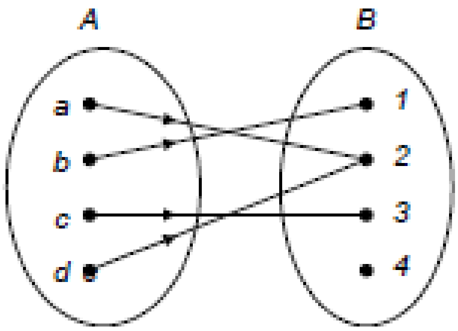
a) Fungsi injektif, bukan surjektif



b) Fungsi surjektif, bukan injektif



c) Bukan fungsi injektif maupun surjektif



Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa:

a) Jika f adalah fungsi berkoresponden satu ke satu dari A ke B, maka dapat menemukan **balikan (invers)** dari f.

b) Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

c) Fungsi yang berkoresponden satu ke satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu ke satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 9:

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu ke satu, jadi balikan fungsi tersebut ada. Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi dari $f(x) = x - 1$ adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

2.2.3. Komposisi Dua Fungsi

Definisi 2.8:

Misalkan $A, B,$ dan C adalah himpunan-himpunan tak kosong. Misalkan pula $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ adalah dua buah fungsi. Komposisi dari f dan g dituliskan dengan $f \circ g$ adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan sebagai:

$g \circ f = \{(x, z) | x \in A, z \in C\}$ terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ dan $g(y) = z$.

Sekarang misalkan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ dan $(x, y) \in g \circ f$ yaitu $(g \circ f)(x) = z$. Berdasarkan definisi komposisi fungsi, terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ dan $g(y) = z$. Sekarang $z = g(y) = g\big(f(x)\big)$. Jadi, $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$.

Misalkan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ dan $(x, y) \in f \circ g$ yaitu $(f \circ g)(x) = z$. Berdasarkan definisi komposisi fungsi, terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $g(x) = y$ dan $f(y) = z$. Sekarang $z = f(y) = f\big(g(x)\big)$. Jadi,

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$$

Contoh 10:

Tentukan komposisi dari dua fungsi jika $f: A \to B$ dan $g: B \to C$. Misalkan $f(x) = 3x + 1$ dan $g(x) = x - 3$ maka:

a) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

$$= g(3x + 1)$$

$$= (3x + 1) - 3$$

$$= 3x - 2$$

b) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

$$= f(x - 3)$$

$$= 3(x - 3) + 1$$

$$= 3x - 8$$

Teorema:

Misalkan pemetaan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ maka:

a) $g \circ f$ adalah injektif jika g dan f masing-masing injektif

b) $g \circ f$ adalah surjektif jika g dan f masing-masing surjektif

Bukti:

a) Misalkan $x, y \in A$ dan $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, maka

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big)$$

Karena g injektif, maka $f(x) = f(y)$ dan karena f injektif, maka $x = y$.

Jadi, $g \circ f$ adalah injektif.

Untuk bukti bagian kedua diserahkan pada pembaca.

2.3. Bilangan Bulat

Konsep bilangan bulat banyak digunakan dalam permasalahan aljabar abstrak, oleh karena itu pembahasan berikut ini akan menyangkut konsep tersebut terutama terkait dengan sifat-sifat bilangan bulat. Bilangan bulat memiliki sifat terurut dengan baik (*well ordering principle*) yang mengandung arti setiap himpunan bilangan bulat positif tak kosong mengandung bilangan terkecil. Di samping itu, konsep keterbagian pada bilanganbulat juga tidak kalah penting dan sangat mendasar.

Definisi 2.9:

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a \mid b$) jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian hingga $b = ka$. Jika a tidak membagi habis b, maka ditulis dengan $a \nmid b$.

Contoh 11:

$5 \mid 45$ karena ada bilangan bulat $k = 9$ sedemikian hingga $5.9 = 45$

$5 \nmid 18$ karena tidak ada bilangan bulat k sedimikan hingga $5. k = 18$

2.4. Faktor Persekutuan Terbesar (*Greatest Common Divisor*)

Secara umum, pengertian tentang faktor persekutuan dari dua bilangan bulat dituliskan dengan definisi berikut:

Definisi 2.10:

$a, b \in Z$ dan $a \neq 0$ (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat d disebut faktor persekutuan dari a dan b jika dan hanya jika $d \mid a$ dan $d \mid b$.

Contoh 12:

Faktor bulat positif dari $20 = \{1,2,4,5,10,20\}$

Faktor bulat positif dari $40 = \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

Faktor-faktor persekutuan (pembagi bersama) dari 20 dan 40 adalah $1,2,4,5,10,20$.

Definisi 2.11:

$a, b \in Z$ (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat d disebut faktor persekutuan terbesar (*Greatest Common Divisor*) dari a dan b dinotasikan dengan $gcd(a, b)$ jika dan hanya jika memenuhi:

1) $d \mid a$ dan $d \mid b$
2) jika $e \mid a$ dan $e \mid b$, maka $e \leq d$

Definisi di atas menunjukkan bahwa jika $gcd(a, b) = d$, maka $d \geq 1$, dan apabila ada faktor persekutuan lain, misalnya e, maka $e \leq d$.

Contoh 13:

Tentukan $gcd(15{,}35)$

Penyelesaian:

Faktor-faktor bulat positif dari 15 adalah: 1,3,5,15

Faktor-faktor bulat positif dari 35 adalah: 1,5,7,35

Sehingga dengan demikian $gcd(15,35)$ adalah 5.

Apabila a dan b adalah dua bilangan bulat positif dengan $gcd(a,b) = 1$, maka dikatakan bahwa a dan b saling prima atau a prima relatif terhadap b.

Teorema

1. Jika $gcd(a,b) = d$, maka $gcd(a:d, b:d) = 1$
2. Jika $b = aq + r$ maka $gcd(b,a) = gcd(a,r)$
3. Jika $a,b \neq 0 \in Z$ (himpunan bilangan bulat), maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian hingga $ax + by = gcd(a,b)$
4. Jika $a,b \neq 0 \in Z$ (himpunan bilangan bulat), a dan b saling prima maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian hingga $ax + by = 1$

2.5. Kelipatan Persekutuan Terkecil (*Least Common Multiple*)

Definisi 2.12:

Kelipatan persekutuan terkecil $a,b \in Z$ (himpunan bilangan bulat tak nol), adalah bilangan bulat positif terkecil k yang memenuhi:

1) $a \mid k$ dan $b \mid k$

2) Jika $a \mid m$ dan $b \mid m$, maka $k \leq m$

Kelipatan persekutuan terkecil a dan b dinotasikan dengan $lcm(a, b)$.

Contoh 14:

Tentukan $lcm(3,5)$

Penyelesaian:

Kelipatan 3 adalah:

3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,…

Kelipatan 5 adalah 5,10,15,20,25,30,35,45,…

Kelipatan persektuan dari 3 dan 5 adalah $\{15,30,45, \ldots\}$

Dapat dilihat bahwa $15 \mid 30$ dan $15 \mid 45$

maka kelipatan persekutuan terkecil dari 3 dan 5 atau $lcm(3,5)$ adalah 15.

2.6. Kekongruenan

Definisi 2.13:

$a, b \in Z$ dan $n \in Z^+, a$ dan b dikatakan kongruen modulo n dinotasikan dengan $a \equiv b$ (mod n) jika dan hanya jika n membagi habis $a - b$ atau $a - b = kn$ untuk suatu $k \in Z$.

Contoh 15:

a) $25 \equiv 4 \pmod{7}$ karena $7 \mid (25 - 4)$

b) $-16 \equiv 5 \pmod{3}$ karena $3 \mid (-16 - 5)$

Teorema:

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan $a, b, c,$ dan d bilangan bulat sebarang berlaku:

1. $a \equiv a \pmod{n}$
2. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $b \equiv a \pmod{n}$
3. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$ $maka\ a \equiv c \pmod{n}$
4. Jika $a \equiv b \pmod{n}$dan $c \equiv d \pmod{n}$maka $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
5. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$ maka $ac \equiv bd \pmod{n}$
6. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $a + c \equiv b + c \pmod{n}$
7. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $ac \equiv bc \pmod{n}$
8. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ untuk k bilangan bulat positif sebarang.

Bukti:

1. Untuk a bilangan bulat sebarang dan n suatu bilangan bulat positif berlaku $a - a = 0.n$ dengan demikian, $a \equiv a \pmod{n}$
2. $a \equiv b \pmod{n}$

   Misal k suatu bilangan bulat

   Akibatnya, $b - a = -(a - b)$

   $= -(kn)$

   $= (-k)n$

   Karena $-k$ juga suatu bilangan bulat, $b \equiv a \pmod{n}$
3. $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$

   Misal k dan l adalah bilangan bulat, sehingga:

   $$a - b = kn \text{ dan } b - c = ln$$

   Akibatnya, $a - c = (a - b) + (b - c)$

   $$= kn + ln$$

   $$= (k + l)n$$

   Karena $k + l$ juga bilangan bulat, maka $a \equiv c \pmod{n}$

Bukti selanjutnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Definisi 2.14:

Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dengan $0 \leq r \leq n$, maka r disebut residu terkecil dari a modulo n. Himpunan $\{0,1,2,3,4,\ldots,(n-1)\}$ dinamakan himpunan residu terkecil modulo n.

Contoh 16:

Residu terkecil dari 29 modulo 2 adalah 1 karena $29:2$ sisa 1

Residu terkecil dari 29 modulo 3 adalah 2 karena $29:3$ sisa 2

Residu terkecil dari -37 modulo 7 adalah 5 karena $-37:7$ sisa 5

2.7. Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu proses pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat positif atau himpunan bilangan asli. Dengan demikian, induksi matematika merupakan salah satu metode pembuktian yang absah dalam matematika.

Prinsip induksi matematika adalah misalkan $a \in S$ (S bilangan bulat positif). Jika S memiliki sifat: untuk suatu $n \geq a \in S$ berlaku jika $n \in S$ maka $n + 1 \in S$, maka $n \in S, \forall\, n \geq a$.

Prinsip di atas menunjukkan bahwa untuk membuktikan kebenaran dari suatu pernyataan yang melibatkan bilangan bulat positif, maka terlebih dahulu harus dibuktikan benar untuk $n = 1$. Kemudian diasumsikan pernyataan benar untuk $n = k$, berdasarkan asumsi tersebut dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$.

Berikut adalah langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika:

Langkah 1: Ditunjukkan bahwa pernyataan $p(n)$ benar untuk $n = 1$ atau $p(1)$ benar.

Langkah 2: Diasumsikan bahwa pernyataan $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli k atau $p(k)$ benar dan selanjutnya ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar

Langkah 3: Merupakan bentuk implikasi, yaitu: $p(k)$ benar $\rightarrow p(k + 1)$ benar

Contoh 17:

Buktikan bahwa:

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1), \forall n \in N$$

Bukti:

Langkah (1):

$P(1) = 1 = \frac{1}{2}.1(1+1)$

$1 = 1$ (Terbukti)

Langkah (2):

Buktikan $P(k)$ benar → $P(k+1)$ benar

$P(k) \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$ (Benar)

Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar, yaitu:

$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1)$

$= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1)$

$= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$

Diasumsikan

$$= (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Jadi $1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Berarti $P(k+1)$ benar.

$P(k)$ benar → $P(k+1)$ benar (Terbukti)

Contoh 18:

Buktikan bahwa $n^5 - n$ terbagi habis oleh 5 untuk setiap bilangan asli n.

Bukti:

Langkah (1):

$P(1) \equiv 1^5 - 1 = 0$ (0 habis dibagi 5)

Langkah (2):

Buktikan: $P(k)$ benar → $P(k+1)$ benar

$P(k) \equiv k^5 - k$ habis dibagi 5 artinya ada $m \in B$ sedemikian hingga $k^5 - k = 5m$

Akan dibuktikan: $P(k+1) \equiv (k+1)^5 - (k+1)$ habis dibagi 5

$(k+1)^5 - (k+1)$

$= (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k + 1)$

$= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k - k$

$= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k$

$= (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$

$= 5m + 5\,l$

$P(k + 1) \equiv (k + 1)^5 - (k + 1) = 5m + 5l$ habis dibagi 5 (terbukti)