OPERASI BINER

Yus Mochamad Cholily
Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Malang
email:ymcholily@gmail.com

March 10, 2014

Daftar Isi

1 Tujuan

Dengan membaca uraian singkat ini diharapkan mahasiswa mampu:

1. menjelaskan pengertian hasilkali silang dua buah himpunan,
2. menjelaskan pengertian relasi,
3. menjelaskan pengertian fungsi,
4. membuktiakn fungsi satu-satu,
5. menjelaskan fungsi onto,
6. menjelaskan fungsi bijektif,
7. menjelaskan operasi biner,
8. mengecek apakah sebuah operasi merupakan biner atau tidak,
9. membuat dan membuktikan sebuah operasi biner.

2 Relasi

Relasi dan fungsi merupakan dua hal yang berurutan satu sama lain. Misal A dan B dua buah himpunan. Telah dipahami dengan baik bahwa *perkalian kartesius* $A \times B$ adalah himpunan pasangan urutan yang berbentuk

$$A \times B = \{(a, b)|\ a \in A \text{ dan } b \in B\}.$$

Relasi (misal dinamakan R) dari A ke B adalah subset dari $A \times B$. Dengan demikian

$$R \subseteq A \times B.$$

Jika $(a, b) \in R$ juga dituliskan dengan aRb dan sebaliknya jika $(a, b) \notin R$ dituliskan sebagai $a \not R\, b$. Domain dari R dinotasikan dengan $\mathrm{Dom}(R)$ adalah subset dari A yang didefinisikan dengan

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A|\ \text{suatu } (a, b) \in R\},$$

sedangkan daerah hasil dari R dinotasikan dengan $\mathrm{Ran}(R)$ adalah subset dari B yaitu:

$$\mathrm{Ran}(R) = \{b \in B|\ \text{suatu } (a, b) \in R\}.$$

Invers dari relasi R juga relasi yang dinotasikan dengan R^{-1} merupakan relasi dari B ke A. Dengan demikian jelas bahwa R^{-1} merupakan subset dari $B \times A$. Sebagai latihan tuliskan domain dan range dari R^{-1}.

Jika R merupakan relasi dari A ke A maka dikatakan R adalah relasi di dalam A. Ada tiga sifat penting berkenaan dengan relasi seperti ini yaitu refleksif, simetri dan transitif. Relasi R tersebut dikatakan *refleksif* jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. R disebut *simetri* simetri jika $(a, b) \in R$ maka $(b, a) \in R$. Sifat ketiga adalah *transitif* jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ maka $(a, c) \in R$. Sebuah relasi yang memiliki sifat refleksif, simetri dan transitif maka dikatakan *relasi ekivalen.*

3 Fungsi

Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B, sering dinotasikan dengan $f : A \to B$ adalah relasi yang setiap unsur di A dipasangkan dengan tepat satu unsur di B. Himpunan A ini disebut *domain* dan himpunan B disebut *kodomain.* Jika $(a, b) \in f$ maka sering dituliskan sebagai $f(a) = b$. Unsur b disebut bayangan/peta dari a oleh f. Sebaliknya unsur a disebut *prapeta* dari b oleh f. Fungsi f dikatakan fungsi *satu-satu/injektif* jika $(a, b) \in f$ dan $(c, b) \in f$ maka $a = c$. Dengan bahasa yang lain, fungsi f dikatakan satu-satu jika unsur yang berbeda di A memiliki peta yang berbeda pula di B. Fungsi f disebut fungsi *onto/pada/surjektif* jika setiap $b \in B$ maka $(a, b) \in f$ untuk suatu $a \in A$. Dengan kata lain fungsi f disebut onto jika setiap unsur di kodomain memiliki prapeta. Fungsi f disebut fungsi *bijektif* jika fungsi tersebut bersifat satu-satu dan pada.

Kalimat "setiap unsur yang berbeda di domain memiliki peta yang berbeda di kodomain" bisa dituliskan dalam bahasa matematika "jika x, y di A dan $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$". Kalimat yang terakhir ini juga ekivalen dengan pernyataan "jika x, y di A sehingga $f(x) = f(y)$ maka $x = y$".

Misal $\mathbb{N}$ himpunan bilangan asli dan $\mathbb{W}$ himpunan bilangan cacah. Dibuat sebuah fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{W}$ dengan hubungan $f(x) = x - 1$. Selidiki apakah f merupakan fungsi yang satu-satu dan onto?

Misal A dan B dua buah himpunan. Himpunan A dikatakan memiliki unsur sama banyaknya dengan B, ditulis $|A| = |B|$ jika dan hanya jika terdapat korespondensi satu-satu dari A ke B atau sebaliknya.

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Sebuah *permutasi* di A adalah fungsi yang satu-satu dan pada dengan domain A dan kodomain A. Sebagai latihan carilah semua permutasi di A.

4 Operasi Biner

Pada prinsipnya sudah banyak operasi biner yang dikenal oleh setiap orang diantaranya adalah penjumlahan $(+)$, pengurangan $(-)$, perkalian $(\times)$ atau $(\cdot)$ dan pembagian $(\div)$. Kesemuanya ini adalah operasi bilangan pada himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$. Lafal "bi" pada biner memberikan makna dua yang artinya dalam menggunakan operasi itu selalu melibatkan dua buah unsur. Lebih spesifik dalam menjumlahkan pasti melibatkan dua buah unsur bilangan, misalnya 2+5. Secara matematika apa itu operasi biner dituliskan sebagai berikut.

Definisi 1. *Misal G adalah suatu himpunan yang tidak kosong. Sebuah operasi biner "$*$" di G adalah suatu fungsi (tentu namanya $*$) dengan domain $G \times G$ dan kodomainnya adalah G. Penulisan fungsi secara formal adalah $* : G \times G \to G$.*

Dari definisi di atas terlihat bahwa domain dari operasi biner di A adalah $A \times A$ dan kodomainnya adalah A. Hal ini memberikan makna bahwa operasi biner di A harus menghasilkan unsur di A juga. Sifat semacam ini dinamakan sifat *tertutup*.

Contoh 1. *Telah dikenal dengan baik operasi biner penjumlahan $+$ di himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Didefinisikan operasi biner "$*$" di $\mathbb{Z}$ dengan $a * b = a + b + 2$. Definisi tersebut mengoperasikan dua unsur di $\mathbb{Z}$. Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa hasil operasinya juga harus masuk di Z. Sudah diketahui bahwa penjumlahan dua bilangan bulat juga merupakan bilangan bulat sehingga $a + b + 2$ juga merupakan bilangan bulat. Dengan demikian operasi $*$ merupakan operasi biner di $\mathbb{Z}$.*

Ada dua sifat penting berkenaan dengan sebuah operasi yaitu asosiatif dan komutatif. Secara rinci kedua sifat tersebut disampaiakn dalam definisi berikut.

Definisi 2. *Diketahui sebuah himpunan tidak kosong G dan sebuah operasi biner $*$ di G. Operasi biner $*$ dikatakan:*

- asosiatif *jika berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap a, b, c di G.*
- komutatif *jika berlakuk $a * b = b * a$ untuk setiap a, b di G,*

Sifat asosiatif lebih banyak dikenal dengan nama sifat pengelompokan. Jika sebuah operasi $*$ berlaku sifat asosiatif maka tanda kurung boleh tidak dituliskan. Hal ini disebabkan pengerjaan operasi pada unsur-unsur yang bagian depan dulu atau yang belakang tidak memberikan perbedaan hasil.

Kembali lagi pada operasi penjumlahan $+$ pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Secara mudah dapat ditunjukkan bahwa operasi tersebut berlaku sifat asosiatif. Penulisan $(8 + 3) + 2 = 8 + (3 + 2) = 8 + 3 + 2$. Hal ini sangat berbeda dengan operasi pengurangan $-$ pada bilangan bulat yang tidak berlaku sifat asosiatif karena $(8 - 3) - 2 \neq 8 - (3 - 2)$, sehingga tanda kurung harus dituliskan sesuai dengan tujuan operasinya.

Definisi 3. *Misal G sebuah himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner $*$. Unsur $i \in G$ disebut unsur identitas jika dan hanya jika berlaku $i * x = x * i = x$ untuk setiap unsur $x \in G$.*

Pembaca tentunya sudah mengenal dengan baik bahwa 0 merupakan unsur identitas penjumlahan pada himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ karena $0+x = x+0 = x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Begitu juga dengan 1 merupakan unsur identitas perkaliannya karena $1 \times x = x \times 1 = x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Perhatikan pada Contoh 1. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ berlaku bahwa $-2*n = -2+n+2 = n$ begitu juga $n*(-2) = n+(-2)+2 = n$. Dari sini berarti bahwa -2 unsur identitas di $\mathbb{Z}$ dengan operasi biner $*$ pada Contoh 1.

Definisi 4. *Misal G sebuah himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ serta memiliki unsur identitas i. Misal $a \in G$, sebuah unsur $b \in G$ disebut invers dari a jika dan hanya jika berlaku $a * b = b * a = i$.*

Di atas telah dijelaskan bahwa himpunan bilangan riil dengan operasi penjumlahan memiliki unsur identitas 0. Bilangan -4 merupakan invers dari 4 karena $4 + (-4) = -4 + 4 = 0$. Hal ini juga berlaku sebaliknya bahwa 4 merupakan invers dari -4. Hal ini sangat berbeda dengan ketika operasinya perkalian yang unsur identitasntya adalah 1. Invers dari 4 adalah $\frac{1}{4}$ karena $4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 4 = 1$.

Perhatikan kembali pada Contoh 1. Pertanyaan sederhana adalah siapakah invers dari 5? tentunya harus dicari bilangan m di $\mathbb{Z}$ sehingga berlaku $5 * m = m * 5 = -2$, karena -2 unsur identitasnya. Dengan mudah ditunjukkan bahwa untuk $m = -9$ berlaku $5*(-9) = -9*5 = -2$. Hal ini menunjukkan bahwa invers dari 5 adalah -9 untuk operasi biner $*$ pada Contoh 1. Secara umum carilah siapa invers dari $n \in \mathbb{Z}$ dengan operasi biner di Contoh 1.

5 Latihan

untuk memperdalam materi di atas kerjakan semua latihan berikut ini.

1. Selidiki apakah operasi berikut merupakan operasi biner atau bukan.

   a. Operasi $*$ dengan $a * b = \min\{a, b\}$ untuk a, b di $\mathbb{Z}^+$.

   b. Operasi biner $*$ dengan $a * b = \min\{a, b\}$ untuk a, b di $\mathbb{Z}$.

   c. Operasi & dengan $a \& b = \max\{a, b\}$ untuk a, b di $\mathbb{Z}^+$.

   d. Operasi & dengan $a \& b = \max\{a, b\}$ untuk a, b di $\mathbb{Z}$.

   e. Operasi # dengan $a \# b = a$ untuk a, b di $\mathbb{Z}$.

   f. Operasi # dengan $a \# b = b$ untuk a, b di $\mathbb{Z}^+$.

   g. Operasi $\diamond$ dengan $a \diamond b = \text{rata-rata}\{a, b\}$ untuk a, b di $\mathbb{Z}$.

   h. Operasi @ dengan $a@b = a + b - 1$ untuk a, b di $\mathbb{R}$.

   i. Operasi $\clubsuit$ dengan $a \clubsuit b = ab + 1$ untuk a, b di $\mathbb{Q}$.

j. Operasi $\heartsuit$ dengan $a \heartsuit b = 2a - b + 1$ untuk a, b di $\mathbb{Z}$.

k. Operasi $\heartsuit$ dengan $a \heartsuit b = 2a - b + 1$ untuk a, b di $\mathbb{Z}^+$.

2. Selidiki operasi biner yang ada di Nomor 1 apakah bersifat asosiatif atau tidak, juga komutatif atau tidak.

3. Perhatikan pendefinisian operasi pada Nomor 1, tentukan (bila ada) unsur identitas dari masing-masing himpunan sesuai dengan operasinya.

4. Carilah semua permutasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$.

5. Misal S_3 merupakan himpunan semua permutasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Dengan operasi biner komposisi " $\circ$ " pada fungsi selidiki apakah bersifat asosiatif, komutatif, dan tentukan unsur identitasnya bila ada.