PEMBAHASAN

1. Pengertian Operasi Biner

Operasi artinya suatu tindakan atau proses menghubungan dua buah objek atau himpunan dengan ketentuan tertentu. Sedangkan biner artinya dua bagian, dua benda, atau basis dua. Dummit dan Foote (1980: 17) menyebutkan definisi dari operasi biner adalah operasi biner " $*$ " pada suatu himpunan G adalah suatu fungsi $*: G \times G \rightarrow G$. Untuk setiap $a, b \in G$ dapat dituliskan $a * b$ untuk $*(a, b)$.

Operasi biner adalah operasi yang dikenakan kepada dua unsur. Yang termasuk operasi biner ini kita kenal dengan operasi dasar aritmetika seperti penjumlahan $(+)$, pengurangan $(-)$, pembagian $(\div)$, dan perkalian $(\times)$. Misal suatu operasi biner dilambangkan dengan " $*$ " yang dikenakan kepada suatu himpunan R, maka operasi biner $*$ dapat kita definisikan sebagai:

$*: R \times R \rightarrow R$

$*(ab) = c \qquad \dots dengan\ a, b, c \in R$

Artinya $a * b = c$

Dari definisi tersebut dapat kita lihat bahwa operasi biner $*$ adalah bersifat tertutup di R. Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi biner $+$, $\times$, $*$, $°$, $\oplus$, $\otimes$, dan sebagainya. Hasil dari sebuah operasi, misalnya $\otimes$, pada elemen a dan b akan ditulis sebagai $a \otimes b$.

2. Sifat-Sifat Operasi Biner

Misalkan $*$ dan $\oplus$ adalah operasi biner. Operasi $*$ dikatakan :

a. Suatu operasi biner "$*$" pada suatu himpunan G dikatakan komutatif, jika $a * b = b * a$ untuk setiap a, b.
b. Suatu operasi biner "$*$" pada suatu himpunan G dikatakan asosiatif, jika $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap a, b, c.
c. Suatu operasi biner "$*$" pada suatu himpunan G dikatakan mempunyai identitas, jika terdapat e sedemikian hingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap a..
d. Suatu operasi biner "$*$" pada suatu himpunan G dikatakan mempunyai sifat invers, jika untuk setiap a terdapat a^{-1} sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.
   Dimana e adalah elemen identitas untuk operasi $*$. a^{-1} disebut invers dari elemen a.

3. Distributif terhadap operasi $\oplus$ dan $*$

Jika untuk setiap a, b, c berlaku :

$$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$$

Dan

$$(b \oplus c) * a = (b * a) \oplus (c * a)$$

Catatan :

a. Operasi biner penjumlahan biasa adalah sebuah operasi yang bersifat komutatif, karena untuk sembarang bilangan x dan y berlaku $x + y = y + x$.

Operasi penjumlahan bersifat asosiatif, karena untuk sembarang x, y, z berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$

Operasi penjumlahan pada operasi biner mempunyai elemen identitas yaitu 0 (nol).

Operasi penjumlahan pada Z merupakan operasi biner. Dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $a \in Z$ terdapat $a^{-1} \in Z$ sehingga $a + a^{-1} = 0$

$$a^{-1} = -a$$

Jadi untuk setiap $a \in Z, \exists\, a^{-1} \in Z$, yaitu $a^{-1} = -a$.

b. Operasi biner perkalian biasa adalah sebuah operasi yang bersifat komutatif, karena untuk sembarang bilangan x dan y berlaku $x \times y = y \times x$.

Operasi perkalian bersifat asosiatif, karena untuk sembarang x, y, z berlaku $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

Operasi perkalian pada operasi biner mempunyai elemen identitas yaitu 1 (satu).

4. Tabel Cayley

Tabel cayley merupakan salah satu cara untuk mendefinisikan operasi biner pada himpunan, khususnya himpunan berhingga.

Misalnya himpunan $S = \{a, b, c\}$ dengan operasi $*$ didefinisikan pada tabel 1.

$*$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$

Tabel 1.Tabel Cayley

Anggota yang dioperasikan dicantumkan pada baris pertama (paling atas) dan pada kolom pertama (paling kiri).

Cara membaca Tabel Cayley sebagai berikut:

Anggota yang akan dioperasikan dari sebelah kiri, kit abaca pada kolom paling kiri. Anggota yang akan dioperasikan dari sebelah kanan kit abaca pada baris paling atas. Perhatikan hasil operasi yang diarsir, $c * b = b$

Pembacaan Tabel 1 selanjutnya sebagai berikut:

$a * a = b$	$b * a = a$	$c * a = c$
$a * b = c$	$b * b = c$	$c * b = b$
$a * c = b$	$b * c = b$	$c * c = a$

Untuk selanjutnya sifat-sifat operasi biner melalui tabel sebagai berikut:

1. Jika hasil kali didalam bujur sangkar hanya terdiri dari anggota S maka sifat tertutup kembali.
2. Jika letak anggota dalam tabel simetris terhadap diagonal utama maka operasi biner komulatif. Pada tabel 1 operasi biner tidak komulatif.

3. Untuk melihat sifat asosiatif harus dicoba bahwa $\forall\ a, b, c\ \in S$ memenuhi $(a * b) * c = a * (b * c)$. Ketiga anggota a, b, c tersebut tidak diharuskan semuanya berlainan, boleh dua anggota sama boleh juga tiga anggota sama.

5. Contoh Soal Dan Pembehasannya

1. Buktikanlah:
   a. Apakah operasi $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ adalah operasi biner?
   $a * b = c$
   $(-2 + 3) = 1 \in \mathbb{Z}$
   $7 + 4 = 11 \in \mathbb{Z}$
   $\forall(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, a + b \in \mathbb{Z}$
   Jadi operasi $(+)$ adalah operasi biner
   b. Apakah operasi $(-)$ pada $\mathbb{Z}$ adalah operasi biner?
   $a * b = c$
   $(-2 - 3) = -5 \in \mathbb{Z}$
   $7 - 4 = 3 \in \mathbb{Z}$
   $\forall(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, a - b \in \mathbb{Z}$
   Jadi operasi $(-)$ adalah operasi biner
   c. Apakah operasi $(\times)$ pada $\mathbb{Z}$ adalah operasi biner?
   $a * b = c$
   $7 \times 2 = 14 \in \mathbb{Z}$
   $-5 \times (-2) = 10 \in \mathbb{Z}$
   $\forall(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, a \times b \in \mathbb{Z}$
   Jadi operasi $(\times)$ adalah operasi biner
   d. Apakah operasi $(\div)$ pada $\mathbb{Z}$ adalah operasi biner?
   $a * b = c$
   $7 \div 2 = \frac{7}{2} \in \mathbb{Z}$
   $-5 \div (-2) = \frac{5}{2} \in \mathbb{Z}$
   $\forall(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, a \div b \in \mathbb{Z}$
   Jadi operasi $(\div)$ bukan operasi biner
2. $\mathbb{Z}\ \oplus$ yang didefinisikan $a \oplus b = \frac{a+b}{b}$
   Apakah $\oplus$ di $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner?
   Penyelesaiannya :
   Misal : $a = 2$, dan $b = -3$
   $$a \oplus b = \frac{a + b}{b}$$
   $$= \frac{2 + (-3)}{-3}$$

$$= \frac{2-3}{-3}$$
$$= \frac{-1}{-3}$$
$$= \frac{1}{3}$$

Jadi operasi $\oplus$ di $\mathbb{Z}$ bukan merupakan operasi biner.

3. Apakah operasi penjumlahan pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ memenuhi sifat-sifat operasi biner?

   Penyelesaiannya :

   Ambil sembarang $a, b, c, \in \mathbb{Z}$

   Misalnya: $a = 1, b = -3, c = 2$

   a. Komutatif

      $a * b = b * a$

      $1 * (-3) = (-3) * 1$

      $-2 = -2$ (Terpenuhi)

   b. Asosiatif

      $(1 * (-3)) * 2 = 1 * ((-3) * 2)$

      $(-2) * 2 = 1 * (-1)$

      $0 = 0$ (Terpenuhi)

   c. Memiliki elemen identitas

      Elemen identitas penjumlahan adalah 0

      Maka $e = 0$

      $a * e = e * a = a$

      $1 * 0 = 0 * 1 = 1$ (Terpenuhi)

   d. Memiliki elemen invers

      $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

      $1 * (-1) = (-1) * 1 = 0$ (Terpenuhi)

DAFTAR PUSTAKA

Suryanti, Sri (2017). “Teori Grup (Struktur Aljabar 1)”. Perpustakaaan Nasional: katalog dalam terbitan (KDT). Gresik: UMG Press 2017.

Junarti, dan Mulyono dkk (2020). ”Modul Berbasis Structure Sense Materi Grup”. Penerbit: CV. Confident (Anggota IKAPI Jabar) Jl. Karang Anyar No.17 Jamblang Kab.Cirebon 45156