BAB 3

OPERASI BINER

Tujuan Instruksional Umum:

Setelah mempelajari materi pada bab ini, maka diharapkan mahasiswa dapat memahami dan mengaplikasikan definisi operasi biner, sifat-sifat operasi biner, dan menerapkan beberapa operasi biner seperti: bilangan kompleks, akar pangkat n dari satuan, dan bilangan satuan.

Tujuan Instruksional Khusus:

Setelah diberikan penjelasan materi terkait definisi operasi biner, maka mahasiswa dapat:

3.1. Menjelaskan definisi operasi biner

3.2. Memahami sifat-sifat operasi biner, seperti: komutatif, assosiatif, mempunyai identitas, mempunyai sifat invers, distributif terhadap +

3.3. Mengaplikasikan beberapa operasi biner, seperti: bilangan kompleks, akar pangkat n dari satuan, dan bilangan satuan.

Deskripsi Singkat:

Sebuah sistem dimana terdapat sebuah himpunan satu atau lebih dari satu operasi Biner (*binary operation*), yang didefinisikan pada himpunan tersebut, dinamakan sistem aljabar. Selanjutnya, sebuah sistem aljabar akan dinyatakan dengan $(S, f_1, f_2, f_3, .., f_n)$ dimana S sebuah himpunan tidak kosong dan $f_1, f_2, f_3, .., f_n$ operasi-operasi yang didefinisikan pada S. Sebagai contoh, $(Z, +)$ adalah sebuah sistem aljabar yang dibentuk oleh himpunan bilangan bulat Z dan operasi penjumlahan biasa. Sementara $(Z, +, \times)$ adalah sebuah sistem aljabar yang dibentuk oleh himpunan bilangan bulat dan dua buah operasi biner.

3.1. Definisi Operasi Biner

Definisi:

Jika S sebuah himpunan, maka sebuah operasi biner * pada S adalah satu relasi yang menghubungkan setiap pasangan berurut $\forall s_1, s_2 \in S$ ketepat satu unsur S, dan diberi notasi dengan $s_1 * s_2$.

Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi biner adalah $+, \times, *, \cdot, \oplus, \otimes$. Hasil dari sebuah operasi, misalnya $*$, pada unsur a dan b akan ditulis sebagai $a * b$.

Contoh 1:

1. Penjumlahan $a * b = a + b$ adalah sebuah operasi biner pada himpunan bilangan bulat positif (Z^{+})
2. Pengurangan $a * b = a - b$ bukanlah operasi biner pada himpunan bilangan bulat positif, tetapi merupakan operasi biner pada himpunan bilangan bulat (Z).
3. Perkalian $a * b = a \times b$ adalah sebuah operasi biner pada Z^{+}, Z, R atau Q.
4. Pembagian $a * b = \frac{a}{b}$ adalah sebuah opearsi biner pada Q^{+} atau R^{+} tetapi tidak pada, Z^{+} , R atau Q.
5. $a * b = a^2 + b^2 + 1$ adalah sebuah operasi pada Z, Q, R, Z^{+}, Q^{+}, atau R^{+}
6. Misalkan x adalah beberapa himpunan dan S adalah kumpulan semua himpunan bagian dari x, sebagai contoh jika x $=\{1\}$, maka $S = \{\emptyset, \{1\}\}$, dan jika $x = \{1,2\}$, maka $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Operasi

irisan adalah sebuah operasi biner pada S, karena $A * B = A \cap B$ merupakan sebuah unsur dari S, begitu juga operasi gabungan merupakan operasi biner pada S.

Contoh 2:

R^* : Himpunan bilangan Real kecuali 0

Dengan operasi penjumlahan biasa bukan merupakan operasi biner karena jika kita ambil 2 dan $-2 \in R^*$ maka hasil penjumlahan yaitu $2 + (-2) = 0 \notin R^*$

3.2. Sifat-Sifat Operasi Biner

Sifat-sifat yang dimiliki oleh sebuah sistem aljabar nantinya ditentukan oleh sifat-sifat yang dimiliki oleh setiap operasi di dalam sistem aljabar tersebut. Berikut akan dijelaskan mengenai sifat-sifat yang dapat dimiliki oleh sebuah operasi biner. Misalkan $*$ dan $\oplus$ adalah operasi biner. Operasi $*$ dikatakan:

1. Komutatif

   Jika $a * b = b * a, \forall\ a, b$

2. Assosiatif

   Jika $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\ a, b, c$

3. Mempunyai identitas

   Identitas, jika terdapat i sedemikian hingga $a * i = i * a = a, \forall\, a$

   Identitas kiri, jika terdapat i_1 sedemikian hingga $i_1 * a = a, \forall\, a$

   Identitas kanan, jika terdapat i_2 sedemikian hingga $a * i_2 = a, \forall\, a$

4. Mempunyai sifat Invers

   Jika $\forall\, a$ terdapat a^{-1} sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$, dimana i adalah unsur identitas untuk operasi $*$. Sedangkan a^{-1} disebut invers dari unsur a.

5. Distributif terhadap operasi $\oplus$

   Jika $\forall\, a, b, c$ berlaku $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$ distributif kiri

   dan $(b \oplus c) * a = (b * a) \oplus (c * a)$ distributif kanan.

Contoh 3:

Buktikan bahwa operasi penjumlahan biasa merupakan operasi biner.

Akan ditunjukkan bahwa:

1. Komutatif

   Ambil sembarang unsur, misal x dan y. Maka berlaku $x + y = y + x$.

2. Assosiatif

   Operasi penjumlahan bersifat assosiatif, karena untuk sembarang unsur, misal x, y, z, berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Identitas

   Identitas operasi penjumlahan adalah 0 (nol), karena $a + 0 = a$

4. Invers

   Invers penjumlahan untuk sembarang bilangan a adalah $-a$, karena $a + (-a) = 0$.

Contoh 4:

1. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan, karena untuk setiap bilangan a, b, c berlaku $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$.

2. Operasi penjumlahan tidak bersifat distributif terhadap operasi perkalian, karena terdapat p, q, r dimana $p + (q \times r) \neq (p + q) \times (p + r)$. Misal, $1 + (2 \times 3) \neq (1 + 2) \times (1 + 3)$

Definisi Sifat Tertutup:

Himpunan S dikatakan tertutup terhadap operasi biner $*$, jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$.

3.3. Beberapa Operasi Biner

3.3.1. Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang dapat disajikan dalam bentuk $a + bi$ atau $a + ib$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

Sifat-sifat bilangan kompleks:

(i) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(ii) $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

(iii) $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

(iv) $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ disebut dengan Modulus

(v) Jika $Z = a + bi$, maka bilangan kompleks sekawan (konjugat) dari Z ditulis dengan $\bar{Z}$. Didefinisikan sebagai $\bar{Z} = a - bi$

(vi) $Z \cdot \bar{Z} = \mathbb{R}$

Teorema

Jika Z_1, Z_2 merupakan bilangan kompleks, maka berlaku:

1. $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2|$
2. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
3. $|z_1 + z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
4. $|z_1 - z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|$
5. $|z_1 - z_2| \geq \big||Z_1| + |Z_2|\big|$

Pembuktian Teorema 2:

Buktikan bahwa $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

Penyelesaian:

Ambil sembarang unsur $Z_1 = x_1 + iy_1$ dan

$Z_2 = x_2 + iy_2$, sehingga:

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \left|\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}\right|$$

$$= \left|\frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right|$$

$$= \left|\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_2y_1x_1y_2 + x_1^2y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2) + (x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2)}{(x_2^2 + y_2^2)} \cdot \frac{(x_2^2 + y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

Terbukti

Untuk pembuktian teorema 1, 3, 4, 5 diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

3.3.2. Akar Pangkat n dari satuan

Jika $x^n = 1$, maka:

$x_{k=}\frac{\cos 2k\pi}{n}+i\frac{\sin 2k\pi}{n}$ dimana $\mathrm{n} = \{1,2,3,..,\mathrm{n}\}$,

$\mathrm{k} = \{1,2,3,\dots,\mathrm{n}\}$

untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut:

Contoh 5:

Hitunglah harga x jika $x^3 = 1$

Jawab:

Untuk $x^3 = 1$, maka

$$x_{k=}\frac{\cos 2k\pi}{n}+i\frac{\sin 2k\pi}{n}$$

$$x_{1=}\frac{\cos 2\pi}{3}+i\frac{\sin 2\pi}{3}$$

$$= \cos 120° + i \sin 120°$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

$$x_{2} = \frac{\cos 2.2\pi}{3}+i\frac{\sin 2.2\pi}{3}$$

$$= \cos 240° + i \sin 240°$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

$$x_{3=} \frac{\cos 2.3\pi}{3} + i \frac{\sin 2.3\pi}{3}$$

$$= \cos 360° + i \sin 360°$$

$$= 1$$

Sehingga, $x = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}, 1\right\}$

*	$\boldsymbol{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}}$	$\mathbf{1}$
$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$
$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$
1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	1

Terbukti tertutup.

Adapun contoh perhitungan sebagai berikut:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) * \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} i\sqrt{3} - \frac{1}{4} i\sqrt{3} + \frac{3}{4} i^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{3}{4}(-1)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,\sqrt{3}$$

Bukti perhitungan yang lain, diserahkan kepada pembaca

Apakah assosiatif pada operasi perkalian?

Ambil sembarang unsur, misal:

$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, c = 1, \forall a, b, c \in x^3$

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

$$\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\right) \times 1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \times \left(\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \times 1\right)\right)$$

$$1 \times 1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$$

$$1 = 1$$

Terbukti memiliki sifat assosiatif.

3.3.3. Bilangan Satuan

Definisi:

Bilangan satuan (*unit number*) adalah bilangan prima relatif terhadap Z_n (bilangan bulat modulo n) yang lebih kecil dari n dan biasa dituliskan dengan U_n. Angka 1 pada U_n dikatakan unsur kesatuan (*unity*).

Contoh 6:

1. $U_5 = \{1,2,3,4\}$
2. $U_6 = \{1,5\}$
3. $U_7 = \{1,2,3,4,5,6\}$
4. $U_8 = \{1,3,5,7\}$
5. $U_{10} = \{1,3,7,9\}$

Contoh 7:

Tentukanlah unsur-unsur U_8, kemudian buatlah tabel Cayley pada operasi perkalian.

Penyelesaian:

$U_8 = \{1,3,5,7\}$

*	**1**	**3**	**5**	**7**
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1