BARISAN DAN DERET

01 POLA BILANGAN

Adalah susunan bilangan yang memiliki aturan atau pola tertentu.

Contoh :

a. 1, 2, 3, 4,5, ….mempunyai pola bilangan ditambah satu dari bilangan sebelumnya, dimulai dari 1

b. 0, 2, 4, 6, 8, ….mempunyai pola bilangan ditambah dua dari bilangan sebelumnya, dimulai dari 0

02 BARISAN ARITMETIKA

Barisan ini adalah contoh dari barisan aritmetika U_1, U_2, U_3, …..U_n ialah barisan aritmetika,jika:

$$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots\ldots = U_n - U_{n-1} = \text{Beda}$$

Perhatikan barisan berikut.

1. 1,3,5,7,…
2. 2,6,10,40,30,…
3. 60,50,40,30,…

Beda dinyatakan dengan b.

Untuk 1, 3, 5, 7 bedanya ialah 3 – 1 = 4 – 3 =7 – 5 = 2

Untuk 60, 50, 40, 20,….bedanya ialah 50 - 60 = 40 – 50 = 30 – 40 = -10

a. Rumus suku ke n.

Jika suku pertama U_1 dinamakan a, kita mendapatkan:

$U_2 - U_1 = b \longrightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$

$U_3 - U_2 = b \longrightarrow U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$

$U_3 - U_4 = b \longrightarrow U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$

dan seterusnya.

Ini memberikan barisan aritmetika baku.

a, a + b, a + 2b, a + 3b, … , a + (n – 1) b

Rumus suku ke n adalah $u_n = a + (n - 1)\, b$.

Contoh 1

Carilah suku ke 40 dari barisan aritmetika 1, 6, 11, 16, …

Penyelesaian:

a = 1, b = 6 – 1, n = 40

$u_n = a + (n - 1)\, b$

$u_{40} = 1\ (40 - 1)\ 5 = 196.$

Contoh 2

Carilah suku pertama dan bedanya, jika diketahui suku kesepuluh 41 dan suku ketiga ialah 20.

Penyelesaian:

$u_{10} = a + (10 - 1)\, b$

$= a + 9b$

a = 9b = 41…….(1)

$u_3 = a\ (3 - 1)\, b$

$= a + 2b$

a + 2b = 20 …….(2)

Sistem persamaannya:

a + 9b = 41

$a + 2b = 20$

$7b = 21$

$b = 3$

b = 3 substitusi ke persamaan (1), didapat:

$a + 9.(3) = 41$

$a = 14$

Jadi suku pertama (a) = 14 dan beda (b) = 3.

03 DERET ARITMETIKA

Deret aritmetika disebut juga deret hitung. Jumlah n suku pertama deret aritmetika ditulis S_n Jadi S_5 artinya 5 suku pertama. Kita dapat mencari rumus untuk jumlah dari deret aritmrtika baku a + (a + b) + (a + 2b) + … + [a + (n – 1)b] dengan cara:

Misalkan suku terakhir U_n, maka suku sebelumnya ialah U_n - b, sebelumnya lagi U_n - 2b dan seterusnya.

$$\text{Jadi } S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (U_n + 2b) + (U_n - b) + U_n$$

$$S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n + 2b) + \ldots + (a + 2b) + (a + b) + a$$

$$+$$

$$2S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \ldots + (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n)$$

$$2S_n = n(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n\left[a + U_n\right],$$

$$\text{Atau } S_n = \frac{1}{2} n\{a + (a + (n-1)b]\}, \text{karena } U_n = a + (n+1)b$$

$$= \frac{1}{2} n\left[2a + (n-1)b\right]$$

Contoh 1

Carilah jumlah 40 suku yang pertama dari deret aritmetika

$2 + 3 + 4 + \dots$

Penyelesaian

$a = 2$, $b = 3 – 2 = 1$ dan $n = 40$

$S_n = \frac{1}{2}.40\ (2.2 + (40- 1).\ 1)$

$= 20(4 + 39)$

$= 20(43)$

$=860$

Contoh 2

Carilah jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 50 yang habis dibagi 2.

Penyelesaian:

$a = 2$, $b = 2$ dan $U_n = 48$

Kita harus mencari dulu n.

$U_n = a + (n – 1)\ b$

$48 = 2 + (n – 1)\ 2$

$48 = 2 + 2n – 2$

$2n = 48$

$n = 24$

$S_n = \frac{1}{2} n\ [a + U_n]$

$= \frac{1}{2}.24\ (2 + 48)$

$= 600$

04 BARISAN GEOMETRI

$U_1, U_2, U_3, \ldots . U_n$ ialah suatu barisan geometri, jika

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_4} = \ldots\ldots.. = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \text{rasio}$$

Rasio dinyatakan dengan r

1, 2, 4, 8, …….. , rasionya $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$ ……… = 2

27, -9, 3, -1, … , rasionya $\frac{-9}{27} = \frac{3}{-9}$ ………. $= -\frac{1}{3}$

a. Rumus suku ke n.

Jika suku pertama U_1 dinyatakan dengan a, kita mendapatkan:

$\frac{U_2}{U_1} = r \longrightarrow U_2 = U_1 r = ar$

$\frac{U_3}{U_2} = r \longrightarrow U_3 = U_2 r = (ar)r = ar^2$

$\frac{U_4}{U_3} = r \longrightarrow U_4 = U_3 r = (ar^2)r = ar^3$

Ini memberi barisan geometri baku:

a, ar, ar^2, ar^3, …. ar^{n-1}

Perhatikan bahwa suku ke n dari barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$

Contoh 1

Tentukan suku ke 5 dari barisan geometri: 1, 2, 4, ….

Penyelesaian:

a = 1, r = $\frac{2}{1}$ = 2.

$U_n = ar^{n-1}$

$U_5 = ar^4 = 1.2^4 = 2^4 = 16$

Contoh 2

Tentukan rumus suku ke n dari barisan geometri 2,6, 18, …….

Penyelesaian:

a = 2, r = $\frac{6}{2}$ = 3

$U_n = ar^{n-1} = 2.3^{n-1}$

Contoh 3

Tentukan rasio r, jika diketahui suku-suku barisan geometri:

U_1 = 3 dan U_4 = 24.

Penyelesaian:

$U_1 = a = 3$

$U_4 = ar^3 = 24$

$ar^3 = 24$

$r^3 = 8$

r = 2

05 DERET GEOMETRI

Kita dapat mencari rumus untuk jumlah deret geometri baku:

a + ar + ar^2 + … + ar^{n-1} sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \\ rS_n & = & ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n & = & a + 0 + 0 + \ldots + 0 - ar^n \end{array}$$

$(1 - r)\,S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$

$$S_n = \frac{a(1 - ar^n)}{1 - r}, \; r \neq 1$$

atau $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, berlaku jika n $\rangle$ 1

Contoh 1

Carilah jumlah dari tujuh suku dari deret geometri 4 + 2 + 1 + 0,5 + …

Penyelesaian:

A = 4, r = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ dan n = 7

$$S_n = \frac{a(1 - ar^n)}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{4(1 - (\frac{1}{2})^7}{1 - \frac{1}{2}}$$

= 7,94, dua tempat decimal

Contoh 2

Carilah n jika $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^n = 510$

Penyelesaian:

a = 2, r = 2 dan $S_n = 510$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$510 = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$2^n - 1 = 255$

$2^n = 256$

n = 8

06 DERET GEOMETRI TAKHINGGA

Deret geometri takhingga merupakan deret geometri yang banyak suku takhingga (“~ “) atau n = ~

Macam deret takhingga.

a. Deret geometri takhingga yang konvergen.

   Deret geometri takhingga yang konvergen adalah suatu deret dengan $|r| \langle 1$ atau $-1 \langle r \langle 1$.

   Jumlah deret geometri takhingga yang konvergen dirumuskan dengan pendekatan:

$$S = \frac{a}{1-r}$$

b. Deret geometri takhingga yang divergen (menyebar)

   Deret geometri takhingga yang divergen adalah deret dengan $|r| \rangle 1$ atau $r \rangle 1$ atau $r \langle -1$.

   Jumlah deret geometri takhingga yang divergen, tidak didefinisikan.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan jumlah deret geometri takhingga: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

<u>Penyelesaian:</u>

$a = 2$, $r = \frac{1}{2} < 1$ (konvergen)

$$S = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Contoh 2

Tentukan jumlah deret geometri takhingga: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots.$

Penyelesaian:

$a = 1,\ r = -\frac{1}{3}\ \rangle\ 1$ (konvergen)

$$S = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

06 Kesimpulan

U_1, U_2, U_3,…, U_n adalah barisan suatu bilangan yang memiliki ciri khusus sebagai berikut

Barisan	Ciri utama	Rumus suku ke-n
Aritmetika	Beda $b = U_n - U_{n-1}$	$U_n = a + (n - 1)b$
Geometri	Rasio $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$	$U_n = ar^{n-1}$

$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ adalah penjumlahan berurut (deret) suatu barisan dengan ciri khusus sebagai berikut

Deret	Jumlah n suku pertama	Syarat
Aritmetika	$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$	Jika a dan U_n diketahui
	$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b)$	Jika a dan b diketahui
Geometri	$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$	Jika r > 1
	$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$	Jika r < 1

Catatan:

1. Antara suku ke-n dan deret terdapat hubungan yaitu :

- $U_n = S_n - S_{n-1}$
- $U_1 = a = S_1$

2. Terdapat deret takhingga suatu barisan geometri yaitu:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$