GRUP PERMUTASI

A. Pengertian Permutasi

Definisi: **Permutasi** dari himpunan finit S adalah pemetaan satu-satu dari S onto S sendiri.

Banyaknya elemen yang termuat dalam himpunan finit ini disebut **derajat** dari permutasi [1].

Misalkan f dan g adalah dua permutasi, masing-masing berderajat n, terdefinisi pada himpunan finit S yang memuat n elemen yang berlainan. Berdasarkan definisi, f dan g merupakan pemetaan satu-satu dan onto. Dua permutasi ini akan sama jika pemetaannya sama, dengan kata lain

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x),\ \ \forall x \in S$$

Misalkan S = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ himpunan finit yang terdiri dari n elemen berlainan dan f pemetaan satu-satu dari S onto S sendiri, maka berdasarkan definisi, f akan disebut permutasi berderajat n. Misalkan $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, …, $f(a_n) = b_n$, dimana $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ artinya b_i sama dengan suatu a_j untuk i = 1, 2, …, n dan j = 1, 2, …, n. Dengan kata lain himpunan $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ dan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ berbeda hanya pada susunan elemennya. f dapat dinyatakan dengan notasi dua baris yang dikenal dengan *array* sebagai berikut:

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Jadi, jika f suatu permutasi pada S, maka untuk menyajikan dalam bentuk notasi di atas, kita hanya perlu meletakkan elemen S di baris pertama, dalam susunan yang kita inginkan, dan di bawah setiap elemen tersebut kita tempatkan bayangannya (peta).

Sebagai contoh, misalkan S = {1, 2, 3} dan f pemetaan satu-satu dari S onto S sendiri yang didefinisikan sebagai berikut: f(1) = 2, f(2) = 3 dan f(3) = 1. Jelas bahwa f permutasi berderajat 3 dan kita dapat menuliskan f dengan beberapa cara sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Secara umum, jika S memiliki n elemen yang berbeda, maka terdapat n! permutasi yang berbeda terdefinisi di S. Selanjutnya, himpunan yang memuat n! permutasi berbeda berderajat n disebut **himpunan Simetrik dari permutasi berderajat n**, dinyatakan dengan S_n[2].

Sekarang lebih jauh dibicarakan mengenai S_3. Banyaknya permutasi berderajat 3 (pemetaan satu-satu dan onto pada himpunan dengan 3 anggota) adalah 6, jadi banyaknya anggota S_3 = 6. Misalnya, keenam anggota S_3 adalah sebagai berikut:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi $S_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

B. Permutasi Identitas

Pemetaan identitas I pada himpunan S yang terdiri dari n elemen berbeda onto dirinya sendiri disebut **permutasi identitas** berderajat n. Jika S = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ maka

$$I = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

adalah permutasi identitas berderajat n [3].

C. Invers Permutasi

Misalkan f permutasi dengan derajat n, terdefinisi pada himpunan finit S yang memuat n elemen berbeda. Berdasarkan definisi, f merupakan pemetaan satu-satu dari S onto S. Karena f pemetaan satu-satu dan onto, maka f dapat dibalik. Akibatnya, invers dari pemetaan f ada dan berdasarkan definisi, inversnya juga merupakan pemetaan satu-satu dari S onto S dan dinotasikan dengan f^{-1}.

Jadi jika,

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

maka

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

merupakan permutasi berderajat n [4].

D. Hasil Kali atau Komposisi Permutasi

Misalkan f dan g dua permutasi yang masing-masing berderajat n dan terdefinisi pada himpunan S yang terdiri dari n elemen berbeda. Berdasarkan definisi f dan g merupakan pemetaan satu-satu dari S onto S dan oleh karena itu pemetaan komposit (g o f) dan (f o g) yang didefinisikan pada S sebagai berikut,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall x \in S$$

dan

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \ \forall x \in S$$

adalah pemetaan satu-satu dari S onto S. Dengan kata lain (g o f) dan (f o g) juga merupakan permutasi berderajat n.

Sebagai contoh, ambil $P_3, P_6 \in S_3$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$(P_3 \circ P_6)(1) = P_3(P_6(1)) = P_3(3) = 1$$
$$(P_3 \circ P_6)(2) = P_3(P_6(2)) = P_3(1) = 3$$
$$(P_3 \circ P_6)(3) = P_3(P_6(3)) = P_3(2) = 2$$

Jadi,

$$(P_3 \circ P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sedangkan,

$$(P_6 \circ P_3)(1) = P_6(P_3(1)) = P_6(3) = 2$$
$$(P_6 \circ P_3)(2) = P_6(P_3(2)) = P_6(2) = 1$$
$$(P_6 \circ P_3)(3) = P_6(P_3(3)) = P_6(1) = 3$$

Jadi,

$$(P_6 \circ P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tampak bahwa $(P_3 \circ P_6) \neq (P_6 \circ P_3)$. Secara umum, dapat disimpulkan $(g \circ f) \neq (f \circ g)$. Jadi komposisi permutasi tidak bersifat komutatif,.

Berdasarkan contoh di atas, untuk mendapatkan hasilkali dua permutasi dapat dilakukan dengan cara berikut:

a. Misalkan f dan g dua permutasi pada himpunan finit yang sama. Untuk memperoleh (g o f) pertama-tama kita tuliskan dua baris dari f, kemudian di bawah setiap elemen pada baris kedua kita tuliskan bayangannya di bawah permutasi g. Letakkan baris ketiga ini di bawah baris pertama untuk mendapatkan permutasi (g o f). Dengan cara yang serupa, kita juga bisa mendapatkan (f o g)
b. Cara lain untuk mendapatkan (g o f) adalah dengan menyusun permutasi g kemudian meletakkan permutasi f di sebelah kanannya. Selanjutnya, perhatikan elemen pada baris pertama f, tarik panah tepat ke bayangannya di bawah permutasi f. Lanjutkan dengan menarik panah ke elemen yang sama pada baris pertama g dan tarik panah sekali lagi tepat ke bayangannya di bawah permutasi g. Untuk menuliskan permutasi (g o f), tulis kembali elemen pada baris pertama f, kemudian untuk tiap elemen tersebut tuliskan elemen terakhir yang ditunjukkan anak panah di bawahnya.

Sebagai ilustrasi perhatikan kembali contoh S_3 di atas.

Cara a.

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$(P_3 \text{ o } P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tulis kembali dua baris dari P_6, kemudian di bawah setiap elemen pada baris kedua kita tuliskan bayangannya di bawah permutasi P_3

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Jadi,

$$(P_3 \text{ o } P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Cara b.

$$(P_3 \text{ o } P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E. Grup Permutasi

<u>Teorema 8.1:</u> Himpunan simetrik S_n dari semua permutasi berderajat n yang terdefinisi pada himpunan finit membentuk grup berorde n! di bawah operasi komposisi permutasi[5].

Bukti:

Misalkan S = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$himpunan finit yang memiliki *n* elemen yang berbeda.

i) Jika f dan g dua permutasi pada S_n, maka keduanya merupakan pemetaan satu-satu dari S onto S. Oleh karena itu pemetaan komposit (g o f) adalah pemetaan satu-satu dari S onto S dan (g o f) adalah permutasi berderajat *n* pada S.
Akibatnya, (g o f) juga termuat di S_n.
$$f \in S_n,\ g \in S_n \Rightarrow (g \text{ o } f) \in S_n$$
yang menunjukkan S_n tertutup terhadap operasi komposisi permutasi.

ii) Oleh karena komposisi dua permutasi pada himpunan S tidak lain adalah komposisi dari dua pemetaan satu-satu dan onto pada S dan komposisi dari pemetaan bersifat asosiatif, menunjukkan komposisi dari permutasi pada S bersifat asosiatif.

iii) Pemetaan identitas I yang memetakan setiap elemen S onto S adalah permutasi identitas pada S_n dengan
$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$
permutasi sebarang di S_n, maka

$$I \circ f = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = f$$

dan $$f \circ I = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = f$$

Jadi, I adalah permutasi di S_n, sedemikian sehingga

$$I \circ f = f \circ I = f, \quad \forall f \in S_n$$

iv) Permutasi f^{-1} merupakan invers dari f karena, jika

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

adalah permutasi sebarang pada S_n, maka

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut,

$$f \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = I$$

$$f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = I$$

Jadi, untuk setiap permutasi $f \in S_n$ terdapat permutasi $f^{-1} \in S_n$ sedemikian sehingga

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$$

dengan kata lain setiap permutasi f di S_n mempunyai invers di S_n.

Terbukti bahwa $\langle S_n, \circ \rangle$ adalah grup finit berorde n!.

F. Permutasi Siklik

Misalkan f permutasi berderajat *n* yang terdefinisi pada himpunan S. f disebut permutasi siklik (*m – cycle* / *a cycle of length m*) jika *m* elemen pada S dapat disusun dalam satu baris sedemikian sehingga bayangan (f-*image*) dari setiap elemen pada baris ini adalah elemen yang mengikutinya dan bayangan dari elemen terakhir pada baris ini adalah elemen pertama sedangkan (n – m) elemen yang dikawankan ke dirinya sendiri oleh f tidak diletakkan pada baris ini. Selanjutnya, m disebut panjang dari *cycle* f [6].

Permutasi siklik dengan panjang satu adalah permutasi yang setiap elemennya dikawankan ke dirinya sendiri. Dengan kata lain, permutasi siklik dengan panjang satu adalah permutasi identitas.

Sebagai contoh, permutasi

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

adalah siklik, karena elemen 1, 2, 3 dan 4 dapat disusun dalam satu baris (1 2 4 3) sedemikian sehingga

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1 \text{ dan } f(4) = 3$$

Disini elemen 5 dan 6 tetap tidak berubah di bawah f. Jadi f adalah *cycle* dengan panjang 4. Jadi dapat ditulis

$$f = (1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)$$

Sedangkan permutasi,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

bukan permutasi siklik. Walaupun, elemen 1, 2, 3, 4 dapat disajikan dalam satu baris (1 2 3 4) sedemikian sehingga

$$g(1) = 2,\ g(2) = 3,\ g(3) = 4 \text{ dan } g(4) = 1$$

tetapi elemen 5 dan 6 berubah di bawah g.

Disjoint Cycles. Dua *cycle* dikatakan *disjoint* jika tidak memuat elemen yang sama.

Sebagai contoh, permutasi siklik

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)$$

dan

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 4)$$

adalah *disjoint*. Sedangkan permutasi siklik

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$$

dan

$$g' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3\ \ 4)$$

tidak *disjoint* karena terdapat 2 dan 3 sebagai elemen sekutu.

Hasil kali *cycle*. Hasil kali dua *cycle* dapat diperoleh dengan mengalikan dua permutasi yang direpresentasikan oleh *cycle* tersebut. Sebagai contoh,

$$(5\ \ 3\ \ 1) \circ (1\ \ 2\ \ 4) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ \ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 3)$$

Transposisi. Suatu *cycle* yang memiliki panjang dua disebut transposisi. Sebagai contoh, permutasi siklik,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 5)$$

adalah suatu transposisi.

<u>Teorema 8.2:</u>

Hasil kali dari *cycle* yang *disjoint* selalu komutatif[7]

Bukti: Misalkan f dan g adalah dua *cycle* yang *disjoint* maka f dan g ketika dinyatakan dalam notasi satu baris tidak memiliki elemen yang sama. Jadi, elemen yang dipermutasikan oleh f tidak akan berubah di bawah g dan begitu juga elemen yang dipermutasikan oleh g tidak berubah di bawah f. Akibatnya

$$g \circ f = f \circ g$$

Dengan demikian, hasil kali dari *cycle* yang *disjoint* selalu komutatif

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut:

Misalkan f = (1 2 4) dan g = (3 5 6) maka

$$(g \circ f) = (3\ \ 5\ \ 6) \circ (1\ \ 2\ \ 4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

dan

$$(f \circ g) = (1\ \ 2\ \ 4) \circ (3\ \ 5\ \ 6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, (g o f) = (f o g)

Teorema 8.3:

Setiap permutasi dapat dinyatakan sebagai sebuah *cycle* atau hasil kali dari *cycle* yang *disjoint.*[8]

Bukti: Diserahkan pada pembaca sebagai latihan.

Sebagai contoh teorema 8.3 di atas, perhatikan permutasi,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 6 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ \ 3) \text{ o } (2\ \ 7) \text{ o } (4\ \ 5\ \ 6\ \ 8)$$

Akibat (*Ruffini* - 1799) Orde dari permutasi[9]

Orde dari suatu permutasi yang ditulis dalam bentuk *disjoint cycle* adalah kelipatan persekutuan terkecil dari panjang *cycle-cycle*nya.

Teorema 8.4:

Setiap permutasi dapat dinyatakan sebagai hasil kali transposisi.[10]

Bukti:

Pertama-tama, akan ditunjukkan bahwa setiap *cycle* dapat dinyatakan sebagai hasil kali transposisi. Perhatikan *cycle* berikut

$$(a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ a_n)$$

maka

$$(a_1\ \ a_2 \ldots a_n) = (a_1\ \ a_n) \text{ o } (a_1\ \ a_{n-1}) \text{ o } \ldots \text{ o } (a_1\ \ a_2)$$

Jadi, setiap *cycle* dapat dinyatakan sebagai hasil kali transposisi.

Di lain pihak, berdasarkan teorema 8.3, setiap permutasi dapat dinyatakan sebagai sebuah *cycle* atau hasil kali dari *cycle* yang *disjoint*. Akibatnya setiap permutasi dapat dinyatakan sebagai hasil kali tranposisi.

Sebagai ilustrasi teorema 8.4 di atas, perhatikan permutasi berikut,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

maka dapat ditulis

$$f = (1\ \ 2\ \ 3) \circ (4\ \ 5)$$

Oleh karena

$$(1\ \ 2\ \ 3) = (1\ \ 2) \circ (1\ \ 3)$$

sehingga

$$f = (1\ \ 2) \circ (1\ \ 3) \circ (4\ \ 5)$$

Jadi, f dapat dinyatakan sebagai hasil kali transposisi

G. Permutasi Genap dan Ganjil

Suatu permutasi dikatakan genap atau ganjil diperhatikan dari permutasi tersebut dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari sebanyak genap atau ganjil transposisi.[11] Sebagai contoh,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

merupakan permutasi ganjil karena dapat ditulis sebagai hasil kali dari 3 transposisi

$$f = (1\ \ 2) \circ (1\ \ 3) \circ (4\ \ 5)$$

Sedangkan permutasi

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2) \circ (3\ \ 4)$$

merupakan permutasi genap karena dapat ditulis sebagai hasil kali 2 transposisi.

Teorema 8.5:

Suatu *cycle* dengan panjang n merupakan permutasi genap atau ganjil tergantung dari n bilangan genap atau ganjil.[12]

Bukti: Diserahkan pada pembaca sebagai latihan.

Teorema 8.6:

Permutasi identitas merupakan permutasi genap.

Bukti:

Misalkan

$$I = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Permutasi identitas berderajat n. Kemudian perhatikan hasil kali dua transposisi (a_1 a_2) dan (a_2 a_1) berikut ini

$$(a_1\ \ a_2) \circ (a_2\ \ a_1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = I$$

Jadi setiap permutasi identitas dapat dinyatakan sebagai hasil kali dua transposisi. Oleh karena itu setiap permutasi identitas adalah permutasi genap.

Rangkuman

1. Permutasi dari himpunan finit S adalah pemetaan satu-satu dari S onto S sendiri.
2. Himpunan simetrik S_n dari semua permutasi berderajat n yang terdefinisi pada himpunan finit membentuk grup berorde n! di bawah operasi komposisi permutasi.
3. Misalkan f permutasi berderajat *n* yang terdefinisi pada himpunan S. f disebut permutasi siklik (*m – cycle* / *a cycle of length m*) jika *m* elemen pada S dapat disusun dalam satu baris sedemikian sehingga bayangan (f-*image*) dari setiap elemen pada baris ini adalah elemen yang mengikutinya dan bayangan dari elemen terakhir pada baris ini adalah elemen pertama sedangkan (*n – m*) elemen yang dikawankan ke dirinya sendiri oleh f tidak diletakkan pada baris ini.
4. Dua *cycle* dikatakan *disjoint* jika tidak memuat elemen yang sama.
5. Suatu *cycle* yang memiliki panjang dua disebut transposisi.
6. Setiap permutasi dapat dinyatakan sebagai sebuah *cycle* atau hasil kali dari *cycle* yang *disjoint*
7. Orde dari suatu permutasi yang ditulis dalam bentuk *disjoint cycle* adalah kelipatan persekutuan terkecil dari panjang *cycle*-*cycle*nya.
8. Suatu permutasi dikatakan genap atau ganjil diperhatikan dari permutasi tersebut dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari sebanyak genap atau ganjil transposisi

Latihan Soal

1. Carilah hasilkali permutasi berikut ini

   a. $(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5) \circ (2\quad 3\quad 4)$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3$

2. Carilah invers dan orde dari

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$