HOMOMORFISMA PADA GRUP

Pada paket 11 ini kita akan mempelajari tentang salah satu konsep dasar dari aljabar yaitu homomorfisma. Kata homomorfisma berasal dari bahasa Yunani *homo* yang berarti seperti dan *morphe* yang berarti bentuk. Kita akan melihat bahwa homomorfisma merupakan generalisasi asli dari isomorfisma dan oleh karena itu memiliki hubungan yang erat dengan grup faktor dari suatu grup. Konsep tersebut diperkenalkan oleh Camille Jordan pada tahun 1870 dalam bukunya *Traité des Substitutions* [1].

Definisi: Misalkan $\langle G, o\rangle$ dan $\langle G', *\rangle$ adalah suatu grup. Pemetaan φ dari G ke G' disebut **homomorfisma** jika memenuhi

$$\varphi (a \circ b) = \varphi (a) * \varphi(b) \ , \ \forall\, a, b \in G$$ [2]

Selanjutnya nama-nama khusus untuk suatu homomorfisma kita sajikan dalam definisi berikut [3]:

Definisi:
a. Suatu homomorfisma yang injektif disebut **monomorfisma**
b. Suatu homomorfisma yang surjektif disebut **epimorfisma**

Definisi: Suatu homomorfisma dari suatu grup ke dalam dirinya sendiri dinamakan suatu **endomorfisma**.

Sebelum memberikan contoh dan membahas tentang sifat-sifat homomorfisma, kita akan mengenalkan subgrup penting yang memiliki kaitan erat dengan bayangan suatu homomorfisma.

Definisi: Jika φ suatu homomorfisma dari grup G ke grup G', maka K himpunan semua elemen di G yang dipetakan onto e' elemen identitas di G' disebut **kernel** dari homomorfisma φ dan dinotasikan dengan **Ker φ**.

Jadi, Ker φ = K = $\{x \in G \mid \varphi(x) = e', \ e'$ elemen identitas di $G'\}$[4].

Berikut ini beberapa contoh tentang homomorfisma atau pemetaan homomorf dari suatu grup ke grup lainnya beserta kernelnya:

1. Ambil grup aditif dari himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\langle Z, +\rangle$ dan grup multiplikatif dari himpunan semua bilangan real taknol $\langle R\text{-}\{0\}, \times\rangle$.
   Bangun pemetaan $\varphi : Z \rightarrow R\text{-}\{0\}$ sebagai berikut:
   $$\varphi(a) = 2^a$$
   Ambil sebarang a, b $\in$ Z, berlaku
   $$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \,.\, 2^b = \varphi(a) \times \varphi(b)$$
   Karena $\forall$ a, b $\in$ Z berlaku $\varphi(a + b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$ maka φ suatu homomorfisma.
   Sedangkan Ker $\varphi = \{0\}$ karena $\varphi(0) = 2^0 = 1$.
2. Ambil grup aditif dari himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\langle Z, +\rangle$.
   Bangun pemetaan $\sigma : Z \rightarrow Z$ sebagai berikut :
   $$\sigma(x) = 2x$$
   Oleh karena $\sigma(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = \sigma(x) + \sigma(y), \quad \forall\, x, y \in Z$
   Berarti σ suatu homomorfisma. Karena domain dan kodomainnya sama, artinya pemetaan tersebut dari grup ke dirinya sendiri, maka σ disebut endomorfisma.
   Sedangkan Ker $\sigma = \{0\}$, karena $\sigma(0) = 2.\, 0 = 0$.
3. Ambil grup $\langle R^+, \times\rangle$ yaitu grup multiplikatif dari himpunan semua bilangan real positif dan grup $\langle R, +\rangle$ yaitu grup aditif dari himpunan semua bilangan real.
   Suatu pemetaan $\tau : R^+ \rightarrow R$ sebagai berikut :
   $$\tau(a) = \log a$$
   Karena $\forall$ a, b $\in R^+$ akan berlaku :
   $$\tau(a \times b) = \log(a \times b) = \log a + \log b = \tau(a) + \tau(b)$$
   Hal ini berarti τ suatu homomorfisma. Sedangkan Ker $\tau = \{1\}$ karena $\tau(1) = \log 1 = 0$.

4. Ambil grup $\langle R - \{0\}, \times\rangle$ yaitu grup multiplikatif dari himpunan semua bilangan real taknol dan grup multiplikatif dari himpunan $S = \{1, -1\}$. Suatu pemetaan $\delta : R-\{0\} \rightarrow S$ yang didefinisikan sebagai berikut :

   $$\delta(u) = 1, \qquad \text{jika } u > 0$$
   $$\delta(u) = -1, \qquad \text{jika } u < 0$$

   Selanjutnya, $\forall\, u, v \in R - \{0\}$ berlaku :

   $$\delta(u \times v) = \delta(u) \times \delta(v)$$

   Sebab,

   a. Jika u dan v dua-duanya positif maka $(u \times v)$ positif dan $\delta(u \times v) = 1$. Sedangkan $\delta(u) = 1 = \delta(v)$ sehingga $\delta(u) \times \delta(v) = 1$. Jadi, $\delta(u \times v) = 1 = 1 \times 1 = \delta(u) \times \delta(v)$.
   b. Jika u negatif dan v positif, maka $(u \times v)$ negatif dan $\delta(u \times v) = -1$. Sedangkan $\delta(u) = -1$ dan $\delta(v) = 1$sehingga $\delta(u) \times \delta(v) = -1$. Jadi, $\delta(u \times v) = -1 = -1 \times 1 = \delta(u) \times \delta(v)$.
   c. Jika u positif dan v negatif, maka $(u \times v)$ negatif dan $\delta(u \times v) = -1$. Sedangkan $\delta(u) = 1$ dan $\delta(v) = -1$sehingga $\delta(u) \times \delta(v) = -1$. Jadi, $\delta(u \times v) = -1 = 1 \times -1 = \delta(u) \times \delta(v)$.
   d. Jika keduanya negatif maka $(u \times v)$ positif dan $\delta(u \times v) = 1$. Sedangkan $\delta(u) = -1 = \delta(v)$ sehingga $\delta(u) \times \delta(v) = 1$. Jadi, $\delta(u \times v) = 1 = -1 \times -1 = \delta(u) \times \delta(v)$.

   Terbukti bahwa δ homomorfisma. Sedangkan Ker $\delta = \{x \mid x > 0, x \in R - \{0\}\}$

Sifat-sifat Homomorfisma

<u>Teorema 11.1:</u>

Jika φ suatu homomorfisma dari grup G into grup G*, maka $\varphi(e) = e^*$, dengan e* elemen identitas dari G* [5]

Bukti: (kerjakan di LK)

<u>Teorema 11.2</u> :

Jika φ suatu homomorfisma dari grup G into grup G*, maka $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$, $\forall x \in G$ [6]

Bukti:

Berdasarkan teorema 11.1 di atas, $\varphi(e) = e^*$

Karena φ homomorfisma maka diperoleh

$$e^* = \varphi(e) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\,\varphi(x^{-1})$$

Untuk $e^* = \varphi(x)\,\varphi(x^{-1})$ maka $\varphi(x)$ merupakan invers dari $\varphi(x^{-1})$ dan sebaliknya.

Jadi terbukti bahwa $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

Teorema 11.3 :

Jika φ suatu homomorfisma dari grup G into grup G* dengan kernel K, maka K merupakan subgrup normal dari G [7]

Bukti:

Pertama-tama akan ditunjukkan terlebih dahulu K subgrup dari G.

a). Ambil sebarang $x \in K$. Karena $K = \{x \in G \mid \varphi(x) = e^*\}$ maka jelas bahwa $x \in G$.

Jadi , $\forall x \in K \Rightarrow x \in G$. Terbukti bahwa $K \subseteq G$

b). Ambil $e \in G$. Berdasarkan teorema 11.1, $\varphi(e) = e^*$. Jadi , $e \in K$. Terbukti bahwa $K \neq \varnothing$.

c). Ambil sebarang $a, b \in K$ maka

$$\varphi(a) = e^* \text{ dan } \varphi(b) = e^*$$

Selanjutnya,

$\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b) = e^*e^* = e^*$. Jadi $ab \in K$.

Terbukti bahwa $\forall a, b \in K \Rightarrow ab \in K$.

d). Ambil sebarang $a \in K$, maka $\varphi(a) = e^*$.

Selanjutnya,

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = (e^*)^{-1} = e^*$$

Jadi $a^{-1} \in K$. Terbukti bahwa $\forall a \in K \Rightarrow a^{-1} \in K$

$\therefore$ K subgrup dari G

Berikutnya akan dibuktikan bahwa K subgrup normal.

Akan ditunjukkan : $\forall g \in G, k \in K, gkg^{-1} \in K$, atau $\varphi(gkg^{-1}) = e^*$

Ambil sebarang $g \in G$ maka $g^{-1} \in G$. Ambil sebarang $k \in K$, maka φ $(k) = e^*$.

$$\begin{aligned} \varphi(gkg^{-1}) &= \varphi(g)\,\varphi(k)\,\varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g)\, e^*\, \varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g)\,\varphi(g^{-1}) = e^* \end{aligned}$$

Jadi, $gkg^{-1} \in K$. Terbukti bahwa $\forall\, g \in G$, $k \in K$, $gkg^{-1} \in K$.

$\therefore$ K subgrup normal G .

<u>Teorema 11.4</u> :

Misalkan G grup dan N subgrup normal dari G. Jika φ pemetaan dari grup G into G/N yang didefinisikan oleh $\varphi(x) = Nx$ untuk setiap $x \in G$, maka φ merupakan homomorfisma dari G onto G/N [8].

Bukti:

a. Akan ditunjukkan φ onto
   Ambil sebarang $X \in G/N$, maka $X = Ny$, $y \in G$
   Berdasarkan definisi, $Ny = \varphi(y)$ atau $X = \varphi(y)$
   Karena untuk sebarang $X \in G/N$ ada $y \in G$ sehingga $X = \varphi(y)$
   $\therefore$ Terbukti bahwa φ onto.
b. Akan ditunjukkan φ homomorfisma dari G onto G/N
   Ambil sebarang $x, y \in G$
   $\varphi(xy) = Nxy = NxNy$ (karena N subgrup normal)
   Di lain pihak $Nx = \varphi(x)$ dan $Ny = \varphi(y)$ maka
   $\varphi(xy) = NxNy = \varphi(x)\,\varphi(y)$
   Jadi $\forall x, y \in G$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$

$\therefore$ Terbukti bahwa φ homomorfisma dari G onto G/N.

Rangkuman

1. Misalkan $\langle G, o\rangle$ dan $\langle G', *\rangle$ adalah suatu grup. Pemetaan φ dari G ke G' disebut homomorfisma jika memenuhi
$$\varphi(a \text{ o } b) = \varphi(a) * \varphi(b)\ ,\ \forall\, a, b \in G$$
2. Jika φ suatu homomorfisma dari grup G ke grup G', maka K himpunan semua elemen di G yang dipetakan onto e' elemen identitas di G' disebut

kernel dari homomorfisma φ dan dinotasikan dengan Ker φ = $\{x \in G \mid \varphi(x) = e',$ e' elemen identitas di $G'\}$.

Latihan Soal

Buktikan apakah pemetaan berikut homomorf. Jika iya tentukan kernelnya

Ambil grup multiplikatif dari himpunan semua matriks berordo 2×2 yang entri-entrinya bilangan real dan determinannya tidak sama dengan nol, yaitu $\langle M_{2\times2}, \times\rangle$ dan grup multiplikatif dari himpunan semua bilangan real taknol $\langle R-\{0\}, \times\rangle$. Bangun pemetaan $\varphi : M_{2\times2} \to R-\{0\}$ sebagai berikut:

$$\varphi(A) = \det(A) \ , \forall A \in M_{2\times2}$$