KOSET

Definisi: Jika H subgrup dari G dan $a \in G$, maka $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ disebut **koset kanan** dari H dalam G dan $aH = \{ah \mid h \in H\}$ disebut **koset kiri** dari H dalam G[1].

Jika e adalah elemen identitas di G, maka

$$He = \{he \mid h \in H\} = \{h \mid h \in H\} = H$$

dan

$$eH = \{eh \mid h \in H\} = \{h \mid h \in H\} = H$$

Jadi, H itu sendiri merupakan koset kanan sekaligus koset kiri dari H dalam G.

Contoh-contoh

1. Misalkan G grup dari semua bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan bilangan bulat dan H himpunan semua bilangan bulat genap terhadap operasi yang sama dengan G maka H merupakan subgrup dari G. $3 \in G$, maka $H3 = \{h3 \mid h \in H\} = \{h + 3 \mid h \in H\} = \{\ldots, -4 + 3, -2 + 3, 0 + 3, 2 + 3, 4 + 3, \ldots\} = \{\ldots, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$ adalah koset kanan dari H dalam G. Dengan cara yang sama didapatkan koset kirinya $3H = \{3h \mid h \in H\} = \{3 + h \mid h \in H\} = \{\ldots, 3 + (-4), 3 + (-2), 3 + 0, 3 + 2, 3 + 4, \ldots\} = \{\ldots, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Di sini terlihat bahwa $H3 = 3H$. Sedangkan untuk $2 \in G$, maka $H2 = \{h2 \mid h \in H\} = \{h + 2 \mid h \in H\} = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ adalah koset kanan dari H dalam G dan $2H = \{2h \mid h \in H\} = \{2 + h \mid h \in H\} = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ adalah koset kiri dari H dalam G. Tampak bahwa $H2 = 2H = H$.
2. $H = \{0, 3, 6\}$ merupakan subgrup dari grup Z_9 di bawah operasi penjumlahan bilangan modulo 9, maka koset kanan dari H dalam Z_9 adalah

   $H0 = \{h +_9 0 \mid h \in H\} = \{0 +_9 0, 3 +_9 0, 6 +_9 0\} = \{0, 3, 6\}$

   $H1 = \{h +_9 1 \mid h \in H\} = \{0 +_9 1, 3 +_9 1, 6 +_9 1\} = \{1, 4, 7\}$

   $H2 = \{h +_9 2 \mid h \in H\} = \{0 +_9 2, 3 +_9 2, 6 +_9 2\} = \{2, 5, 8\}$

   $H3 = \{h +_9 3 \mid h \in H\} = \{0 +_9 3, 3 +_9 3, 6 +_9 3\} = \{3, 6, 0\}$

$H4 = \{h +_9 4 \mid h \in H\} = \{0 +_9 4, 3 +_9 4, 6 +_9 4\} = \{4, 7, 1\}$

$H5 = \{h +_9 5 \mid h \in H\} = \{0 +_9 5, 3 +_9 5, 6 +_9 5\} = \{5, 8, 2\}$

$H6 = \{h +_9 6 \mid h \in H\} = \{0 +_9 6, 3 +_9 6, 6 +_9 6\} = \{6, 0, 3\}$

$H7 = \{h +_9 7 \mid h \in H\} = \{0 +_9 7, 3 +_9 7, 6 +_9 7\} = \{7, 1, 4\}$

$H8 = \{h +_9 8 \mid h \in H\} = \{0 +_9 8, 3 +_9 8, 6 +_9 8\} = \{8, 2, 5\}$

Tampak bahwa H0 = H3 = H6 = H, H1 = H4 = H7 dan H2 = H5 = H8.

Dari dua contoh di atas, dapatkah Anda menemukan beberapa sifat dari koset? Anda dapat mencoba menemukannya dalam kegiatan di LK sekaligus membuktikannya.

Berikut ini akan dijelaskan beberapa sifat lain dari koset.

Teorema 9.1 : Misal H subgrup dari grup G dan $a, b \in G$, maka [2]

1. $aH = bH$ atau $aH \cap bH = \varnothing$
2. $aH = bH$ jika dan hanya jika $a^{-1} b \in H$
3. $|aH| = |bH|$
4. $aH = Ha$ jika dan hanya jika $H = a^{-1} Ha$
5. aH adalah subgrup dari G jika dan hanya jika $a \in H$

Bukti :

1. Misalkan H subgrup dari G dan ambil sebarang aH dan bH dua koset kiri dari H dalam G.

   Andaikan $aH \cap bH \neq \varnothing$, maka setidaknya terdapat satu elemen dalam aH yang sama dengan suatu elemen dalam bH. Misalkan

   $$ah_1 = bh_2 \text{ untuk suatu } h_1 \in H \text{ dan } h_2 \in H$$

   Sekarang,

   $$\begin{aligned} ah_1 = bh_2 \quad &\Rightarrow a = (bh_2)\, h_1^{-1} \\ &\Rightarrow a = b\,(h_2\, h_1^{-1}) \\ &\Rightarrow aH = b(h_2\, h_1^{-1})\, H \\ &\Rightarrow aH = b\,(h_2\, h_1^{-1}H) \\ &\Rightarrow aH = bH \end{aligned}$$

   Jadi, dalam kasus $aH \cap bH \neq \varnothing$ maka aH = bH. Dengan kata lain aH = bH atau $aH \cap bH = \varnothing$

2. ($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika $aH = bH$ maka $a^{-1}b \in H$

Misalkan H subgrup dari G dan ambil sebarang a, $b \in G$ sedemikian sehingga $aH = bH$

Sekarang, jika $e \in H \Rightarrow be \in bH \Rightarrow b \in bH$

Diketahui

$$
\begin{aligned}
aH = bH &\Rightarrow b \in aH \\
&\Rightarrow a^{-1}b \in a^{-1}(aH) \\
&\Rightarrow a^{-1}b \in (a^{-1}a)H \\
&\Rightarrow a^{-1}b \in eH \\
&\Rightarrow a^{-1}b \in H
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika $a^{-1}b \in H$ maka $aH = bH$

$$
\begin{aligned}
a^{-1}b \in H &\Rightarrow a^{-1}b\,H = H \\
&\Rightarrow a\,a^{-1}bH = aH \\
&\Rightarrow \quad bH = aH
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $aH = bH$ jika dan hanya jika $a^{-1}b \in H$

3. Pada paket 3 telah dijelaskan bahwa ”himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika ada pemetaan yang bijektif dari A ke B”. Jadi untuk menunjukkan $|aH| = |bH|$ maka akan ditunjukkan bahwa terdapat pemetaan bijektif antara aH dan bH.

Ambil sebarang dua koset kiri dari H dalam G, aH dan bH. Untuk membuktikan adanya pemetaan bijektif antara aH dan bH, berarti harus menunjukkan adanya pemetaan dari aH ke bH yang injektif dan surjektif.

Misalkan pemetaan $f: aH \rightarrow bH$ dengan $f(ah) = bh$, $\forall h \in H$.

i) Ambil sebarang $bh \in bH$, maka

$$bh \in bH \Rightarrow h \in H \Rightarrow ah \in aH$$

Tetapi $f(ah) = bh$.

Jadi, $\forall\, bh \in bH\ \exists\, ah \in aH$ sedemikian sehingga $f(ah) = bh$. Terbukti bahwa f surjektif.

ii) Ambil sebarang $ah_1, ah_2 \in aH$. Jika $f(ah_1) = f(ah_2)$ akan ditunjukkan $ah_1 = ah_2$.

$$f(ah_1) = f(ah_2) \Rightarrow bh_1 = bh_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow ah_1 = ah_2.$$

Jadi f injektif

Terbukti bahwa ada pemetaan bijektif dari aH ke bH. Berarti aH ekuivalen dengan bH, dengan kata lain $|aH| = |bH|$.

Untuk pembuktian 4 dan 5 diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 9.2 (Teorema Lagrange)
Jika G grup finit (terhingga) dan H subgrup dari G, maka o(H) adalah pembagi dari o(G). Lebih jauh lagi, banyaknya koset kiri (kanan) yang berbeda dari H dalam G adalah o(G)/o(H) [3].

Bukti:
Misalkan H subgrup dari grup finit G, maka jelas H juga finit. Misalkan o(H) = m dan o(G) = n.
Jika o(H) = m, maka H terdiri dari m elemen yang berbeda, yaitu

$$h_1, h_2, ..., h_m$$

dan oleh karena itu, untuk sebarang $a \in G$, koset kiri $aH = \{ah_1, ah_2, ..., ah_m\}$.
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa setiap elemen aH adalah berbeda.
Andaikan terdapat $ah_1, ah_2 \in aH$ sedemikian sehingga $ah_1 = ah_2$ maka dengan hukum pencoretan kiri,

$$ah_1 = ah_2 \Rightarrow h_1 = h_2$$

Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui $h_1 \neq h_2$. Jadi, pengandaian salah, terbukti bahwa setiap elemen aH adalah berbeda.
Karena setiap dua koset kiri yang berbeda dari subgrup suatu grup G memuat banyak elemen yang sama, maka setiap koset kiri dari H dalam G memuat m elemen.
Selanjutnya, untuk sebarang dua koset kiri dari H dalam G identik atau tidak mempunyai elemen persekutuan, berarti bahwa sebarang $a \in G$ menentukan dengan tunggal satu koset kiri aH. Misalkan k adalah banyaknya koset kiri berbeda dari H dalam G, maka G adalah gabungan dari k koset kiri yang berbeda. Karena G finit dan setiap koset kiri dari H dalam G anggotanya sebanyak m, maka G memuat mk elemen. Dengan kata lain

$$o(G) = mk$$

atau

$$n = mk$$

atau

$$n/m = k$$

Terbukti bahwa o(H) pembagi dari o(G) dan banyaknya koset kiri yang berbeda dari H dalam G adalah o(G) / o(H).

Definisi: Jika H subgrup dari grup G, indeks dari H dalam G adalah banyaknya koset kiri (kanan) yang berbeda dari H dalam G. Indeks dari H dalam G ditulis |G:H|[4].

Contoh

Pada contoh sebelumnya H = {0, 3, 6} merupakan subgrup dari grup Z_9. Karena o(H) = 3 dan o(Z_9) = 9 maka |G:H| = o(Z_9) / o(H) = 9 / 3 = 3. Pada contoh tersebut juga tampak bahwa banyaknya koset kanan yang berbeda dari H dalam Z_9 adalah 3.

<u>Teorema 9.3</u> : Jika G grup finit (terhingga), maka orde dari setiap elemen dalam grup membagi orde dari grup[5].

Bukti:

Misalkan G grup finit berorde n, ambil sebarang $a \in G$ akan dibuktikan

$$o(G) / o(a).$$

Karena orde setiap elemen dari grup finit adalah terhingga, maka o(a) juga finit dan misalkan dengan o(a) = m, maka m adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^m = e$.

Perhatikan himpunan berikut

$$H = \{a, a^2, a^3, ..., a^m = e\}$$

maka akan ditunjukkan H himpunan bagian tak kosong dari G.

Jika a^i dan a^j adalah dua elemen sebarang dari H, maka

$$a^i a^j = a^{i+j}$$
$$= a^{mq+r}$$

(berdasarkan algoritma pembagian i + j = mq + r dengan $0 \le r < m$)

$$= a^{mq} a^r$$
$$= e^q a^r$$
$$= e\, a^r$$
$$= a^r \in H, \text{ dengan } 0 \le r < m.$$

Jadi H himpunan bagian tak kosong dari grup finit G sedemikian sehingga H tertutup terhadap operasi di G. Akibatnya H merupakan subgrup dari G.
Selain itu, akan ditunjukkan semua elemen di H berbeda. Jika i dan j sebarang bilangan bulat berbeda, sedemikian sehingga $1 \leq j < i \leq m$, maka

$$\begin{aligned} a^i = a^j &\Rightarrow a^i a^{-j} = a^j a^{-j} \\ &\Rightarrow a^{i-j} = e \end{aligned}$$

Jadi i-j adalah bilangan bulat positif kurang dari m sedemikian sehingga $a^{i-j} = e$. Hal ini kontradiksi dengan diketahui m adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^m = e$. Berarti $a^i \neq a^j$. Terbukti bahwa semua elemen di H berbeda.
Dengan kata lain H adalah subgrup G sedemikian sehingga o(H) = m.
Berdasarkan teorema Lagrange, orde dari H harus pembagi orde G. Oleh karena itu terdapat bilangan bulat k sedemikian sehingga

$$\frac{\mathrm{o(G)}}{o(H)} = \mathrm{k} \text{ atau } \frac{\mathrm{n}}{m} = \mathrm{k} \text{ atau } \frac{\mathrm{o(G)}}{o(a)} = \mathrm{k}$$

yang menunjukkan orde a merupakan pembagi orde G. Karena a sebarang elemen di G, maka terbukti bahwa orde dari setiap elemen di G merupakan pembagi orde G

<u>Teorema 9.4:</u> Jika G grup finit berorde bilangan prima, maka G merupakan grup siklik[6].
Bukti:
Misalkan G grup finit berorde bilangan prima p. Karena p bilangan prima maka p > 1. G harus memuat paling sedikit dua elemen, yaitu setidaknya satu elemen a dan satu lagi elemen identitas e.
Misalkan o(a) = m. Karena $a \neq e$ maka $o(a) = m \geq 2$ dan $m \neq 1$.
Selanjutnya, $H = \langle a \rangle$ adalah subgrup G sedemikian sehingga o(H) = m dan dengan teorema Lagrange, orde setiap subgrup dari grup finit adalah pembagi dari orde grup.
Jadi m pembagi dari p. Tetapi karena p bilangan prima dan $m \neq 1$ maka m = p. Oleh karena itu H = G. Karena H siklik maka G juga siklik. Terbukti bahwa setiap grup berorde bilangan prima selalu grup siklik.

<u>Teorema 9.5</u>: Jika G grup finit dan $a \in G$, maka $a^{o(G)} = e$[7].

Bukti:

Berdasarkan teorema 9.3, $\frac{o(G)}{o(a)} = k$. Jadi, $a^{o(G)} = a^{o(a)\,k} = e^k = e$.

Contoh:

Pada grup $\langle Z_9, +_9\rangle$, $o(Z_9) = 9$ dan $e = 0$. $3 \in Z_9$ maka $3^9 = 3^{3.3} = 0^3 = 0$.

<u>Akibat</u>: **(*Fermat's Little Theorem*)**[8]

Untuk setiap bilangan bulat a dan setiap bilangan prima p, a^p modulo p = a modulo p

Contoh-contoh

1. Hitunglah 5^{15} modulo 7 dan 7^{13} modulo 11

   Jawab

   $$\begin{aligned} 5^{15} \bmod 7 &= 5^7 \,.\, 5^7 .\, 5 \bmod 7 \\ &= 5 \,.\, 5 .\, 5 \bmod 7 \\ &= 4 .\, 5 \bmod 7 \\ &= 6 \bmod 7 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} 7^{13} \bmod 11 &= 7^{11}\; 7^2 \bmod 11 \\ &= 7 \,.\, 7^2 \bmod 11 \\ &= 7 .\, 5 \bmod 11 \\ &= 2 \bmod 11 \end{aligned}$$

2. Misalkan H subgrup dari grup G. Buktikan bahwa dua koset kanan Ha dan Hb berlainan jika dan hanya jika dua koset kiri a^{-1} H dan b^{-1} H berlainan.

   Bukti:

   Ambil sebarang dua koset kanan berlainan dari H dalam G, misalkan Ha dan Hb. Andaikan dua koset kiri $a^{-1}H$ dan b^{-1} adalah sama, maka

   $$\begin{aligned} a^{-1}H = b^{-1}H \;&\Rightarrow (a^{-1})^{-1}\, b^{-1} \in H \text{ (teo 9.1 no.2)} \\ &\Rightarrow ab^{-1} \in H \\ &\Rightarrow Hab^{-1} = H \quad \text{(lihat LK no.1)} \\ &\Rightarrow Hab^{-1}\, b = Hb \\ &\Rightarrow Hae = Hb \\ &\Rightarrow Ha = Hb \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan diketahui Ha dan Hb berlainan. Pengandaian salah jadi $a^{-1}H \neq b^{-1}H$. Terbukti bahwa

$$Ha \neq Hb \Rightarrow a^{-1}H \neq b^{-1}H$$

Dengan cara yang serupa akan diperoleh

$$a^{-1}H \neq b^{-1}H \Rightarrow Ha \neq Hb$$

Jadi, terbukti bahwa

$$Ha \neq Hb \Leftrightarrow a^{-1}H \neq b^{-1}H$$

3. Buktikan bahwa satu-satunya koset kanan (kiri) dari subgrup H dalam grup G yang juga subgrup dari G adalah H itu sendiri.

   Bukti:

   Misalkan Ha adalah koset kanan dari H dalam G sedemikian sehingga Ha adalah subgrup G. Elemen identitas e pasti termuat di Ha.

   Di lain pihak H merupakan subgrup G, sehingga $e \in H$. Jadi $Ha \cap H \neq \varnothing$. Akan tetapi, H itu sendiri merupakan koset kanan, dan karena dua koset kanan yang tidak disjoint adalah identik maka

$$H = Ha$$

   Jadi satu-satunya koset kanan dari H dalam G, yang juga merupakan subgrup dari G adalah H itu sendiri. Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa satu-satunya koset kiri dari H dalam G, yang juga merupakan subgrup dari G adalah H itu sendiri.

Rangkuman

1. Jika H subgrup dari G dan $a \in G$, maka $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari H dalam G dan $aH = \{ah \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari H dalam G.
2. Jika G grup finit (terhingga) dan H subgrup dari G, maka o(H) adalah pembagi dari o(G). Lebih jauh lagi, banyaknya koset kiri (kanan) yang berbeda dari H dalam G adalah o(G)/o(H).
3. Jika H subgrup dari grup G, indeks dari H dalam G adalah banyaknya koset kiri (kanan) yang berbeda dari H dalam G. Indeks dari H dalam G ditulis |G:H|.

Latihan Soal

Selesaikan soal berikut!

1. Tentukan semua koset kiri dari $H = \{R_0, R_{180}\}$ dalam D_4
2. Tentukan $|D_4 : H|$