SUBGRUP NORMAL DAN GRUP FAKTOR

Pada paket 9 yang lalu, telah dijelaskan, jika G suatu grup dan H subgrup dari G, maka tidak selalu benar aH = bH untuk setiap a di G. Terdapat syarat tertentu agar kondisi tersebut terpenuhi. Walaupun demikian kasus ini menjadi topik yang penting dalam teori grup. Galois, sekitar 150 tahun yang lalu, merupakan orang pertama yang mengenalkan subgrup yang memiliki kekhususan tersebut.

Definisi: Suatu subgrup N dari grup G disebut subgrup normal dari grup G jika dan hanya jika gN = Ng untuk setiap $g \in G$. Kita notasikan dengan $N \lhd G$ [1].

Contoh-Contoh

1. Setiap subgrup dari grup Abelian adalah subgrup normal. Karena jika H subgrup dari grup Abelian G, maka $\forall\ x \in G$ berlaku

   $$xH = \{xh \mid h \in H\} = \{hx \mid h \in H\} = Hx$$

   Di lain pihak, setiap grup siklik pasti abelian, sehingga setiap subgrup dari grup siklik selalu normal.

   Catatan: suatu grup non-Abelian yang setiap subgrupnya merupakan subgrup normal disebut ***Hamiltonian Group***.
2. Jika G grup, maka $\forall\ x \in G$ berlaku

   $$xG = Gx = G$$

   Jadi, G selalu merupakan subgrup normal dari G.

   Begitu juga subgrup H = {e} dari grup G, $\forall\ x \in G$ berlaku

   $$xH = Hx = \{x\}$$

   Jadi H = {e} juga subgrup normal dari G.

   Dengan demikian, pada suatu grup G, G dan {e} merupakan subgrup normal dari G dan disebut dengan subgrup normal trivial.

<u>Teorema 10.1</u>: Subgrup H dari grup G merupakan subgrup normal jika dan hanya jika

---

$$xhx^{-1} \in H$$

untuk setiap $x \in G$ dan untuk setiap $h \in H$ [2].

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan H subgrup normal dari grup G, maka

$$xH = Hx, \ \forall x \in G$$

Oleh karena

$$xH = Hx \Rightarrow xHx^{-1} = H, \quad \forall x \in G$$
$$\Rightarrow xhx^{-1} \in H, \quad \forall x \in G \text{ dan } \forall h \in H$$

Jadi H subgrup normal jika $xhx^{-1} \in H$, $\forall x \in G$, $\forall h \in H$

($\Leftarrow$) Misalkan H subgrup dari grup G sedemikian sehingga $xhx^{-1} \in H$, $\forall x \in G$ dan $\forall h \in H$

maka

$$xhx^{-1} \in H \Rightarrow xh \in Hx, \ \forall x \in G \text{ dan } \forall h \in H$$
$$\Rightarrow xH \subseteq Hx, \ \forall x \in G \ \ldots\ldots..*$$

Begitu juga

$$xhx^{-1} \in H \Rightarrow x^{-1}h(x^{-1})^{-1} \in H, \ \forall x \in G \text{ dan } \forall h \in H$$
$$\Rightarrow x^{-1}hx \in H, \ \forall x \in G \text{ dan } \forall h \in H$$
$$\Rightarrow hx \in xh, \ \forall x \in G \text{ dan } \forall h \in H$$
$$\Rightarrow Hx \subseteq xH, \ \forall x \in G \ \ldots\ldots.**$$

Dari * dan ** diperoleh

$$xH = Hx, \ \forall x \in G$$

Berdasarkan definisi subgrup normal terbukti bahwa H subgrup normal dari G.

Jadi, terbukti bahwa H subgrup normal jika dan hanya jika $xhx^{-1} \in H$, $\forall x \in G$, $\forall h \in H$

Contoh-contoh

1. Diketahui $S_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ dengan

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$H = \{P_1, P_2\}$

H bukan subgrup normal dari S_3 karena ada $P_5 \in S_3$ dan $P_2 \in H \ni P_5 \circ P_2 \circ P_5^{-1} = P_4 \notin H$.

2. Misalkan G grup semua bilangan bulat dengan operasi penjumlahan. H himpunan semua bilangan bulat genap. Dengan operasi penjumlahan H merupakan subgrup dari grup G. Apakah H subgrup normal dari G? atau apakah untuk setiap $g \in G$ dan $h \in H$, $ghg^{-1} = g + h + (-g) \in H$? Karena g bilangan bulat, -g bilangan bulat dan h bilangan bulat genap, maka $g + h + (-g) = h \in H$. Karena untuk setiap $g \in G$ dan $h \in H$, $ghg^{-1} \in H$ terbukti bahwa H subgrup normal dari G.

<u>Teorema 10.2</u>:

H subgrup normal dari grup G jika dan hanya jika $xHx^{-1} = H$, $\forall\, x \in G$[3]

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan H subgrup normal dari grup G maka $xH = Hx$, $\forall\, x \in G$

Oleh karena $xH = Hx \Rightarrow xHx^{-1} = Hxx^{-1}$, $\forall\, x \in G$

$\Rightarrow xHx^{-1} = He$, $\forall\, x \in G$

$\Rightarrow xHx^{-1} = H$, $\forall\, x \in G$

Jadi H subgrup normal $\Rightarrow xHx^{-1} = H$, $\forall\, x \in G$

($\Leftarrow$) Misalkan H subgrup dari grup G sedemikian sehingga $xHx^{-1} = H$, $\forall x \in G$

Oleh karena $xHx^{-1} = H \Rightarrow (xHx^{-1})\, x = Hx$, $\forall x \in G$

$\Rightarrow xH\,(x^{-1}x) = Hx$, $\forall x \in G$

$\Rightarrow xHe = Hx$, $\forall x \in G$

$\Rightarrow xH = Hx$, $\forall x \in G$

$\Rightarrow$ H subgrup normal

Jadi, terbukti bahwa H subgrup normal $\Leftrightarrow xHx^{-1} = H$, $\forall x \in G$

Contoh-Contoh

1. Jika H dan K subgrup normal dari grup G maka HK juga subgrup normal dari G.

   Bukti:

Misalkan e elemen identitas pada grup G. Karena H dan K subgrup dari G maka $e \in H$ dan $e \in K$. Dengan demikian $e \in HK$. Jadi $HK \neq \emptyset$.

Misalkan h_1k_1 , $h_2k_2 \in HK$ dengan $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$.

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} &= h_1k_1 (k_2^{-1} h_2^{-1}) \\
&= h_1h_2^{-1}h_2\, k_1k_2^{-1}\, h_2^{-1} \\
&= h_1h_2^{-1} (h_2 (k_1k_2^{-1}) h_2^{-1}) \ \ldots..*
\end{aligned}
$$

Karena H dan K subgrup maka

$h_1 , h_2 \in H \Rightarrow h_1h_2^{-1} \in H$ ……**

$k_1, k_2 \in K \Rightarrow k_1 k_2^{-1} \in K$

dan karena K subgrup normal, diperoleh

$$
\begin{aligned}
h_2 \in H, k_1k_2^{-1} \in K \quad &\Rightarrow\ h_2 \in G, k_1 k_2^{-1} \in K \\
&\Rightarrow\ h_2 (k_1k_2^{-1}) h_2^{-1} \in K \ \ldots..***
\end{aligned}
$$

Dari ** dan *** diperoleh,

$$h_1h_2^{-1} (h_2 (k_1k_2^{-1}) h_2^{-1}) \in HK$$

sehingga $(h_1k_1) (h_2k_2)^{-1} \in HK$

Jadi untuk setiap h_1k_1 , $h_2k_2 \in HK$ maka $(h_1k_1) (h_2k_2)^{-1} \in HK$ yang menunjukkan HK subgrup dari grup G.

Selanjutnya akan ditunjukkan HK subgrup normal dari G.

Diketahui:

H subgrup normal maka $xhx^{-1} \in H, \forall x \in G$ dan $\forall\, h \in H$

K subgrup normal maka $xkx^{-1} \in K, \forall x \in G$ dan $\forall\, k \in K$

Sekarang,

$(xhx^{-1}) (xkx^{-1}) \in HK, \forall x \in G, \forall\, h \in H$ dan $\forall\, k \in K$

$\Rightarrow\ \ xh (x^{-1} x) kx^{-1} \in HK, \forall x \in G, \forall\, h \in H$ dan $\forall\, k \in K$

$\Rightarrow\ \ x (hk) x^{-1} \in HK, \forall x \in G$ dan $hk \in HK$

Terbukti bahwa H, K subgrup normal dari grup G maka HK juga subgrup normal dari grup G.

2. Jika H subgrup dari grup G dan K subgrup normal dari G, maka $H \cap K$ subgrup normal dari H.

   Bukti:

   Oleh karena H dan K subgrup dari G maka $H \cap K$ juga subgrup dari grup G.

Kemudian, $H \cap K$ subgrup dari G, H subgrup dari G dan $H \cap K \subseteq H$ maka $H \cap K$ subgrup dari H.

Untuk menunjukkan $H \cap K$ subgrup normal dari H, ambil sebarang $h \in H$ dan $a \in H \cap K$, maka kita harus ditunjukkan bahwa

$hah^{-1} \in H \cap K$

Karena $a \in H \cap K \Rightarrow a \in H$ dan $a \in K$.

Diketahui K subgrup normal maka $hah^{-1} \in K$, $\forall\, h \in H$ dan $a \in K$.

dan juga karena H subgrup maka

$$h \in H,\ a \in H \Rightarrow hah^{-1} \in H$$

Jadi, $hah^{-1} \in H \cap K$, $\forall\, h \in H$, $a \in H \cap K$

Terbukti bahwa $H \cap K$ subgrup normal dari H.

Kita telah mempelajari tentang subgrup normal, tetapi mengapa subgrup normal menjadi salah satu konsep yang spesial belum dijelaskan. Alasannya sederhana, ketika subgrup N dari grup G merupakan normal, maka himpunan koset-koset kiri (kanan) dari N dalam G juga suatu grup yang selanjutnya disebut **grup faktor dari G oleh N** (atau grup *quotient* dari G oleh N). Dengan demikian, kita dapat mendapatkan informasi tentang grup dengan mempelajari salah satu grup faktornya.

<u>Teorema 10.3 :</u>

Misalkan G grup dan N subgrup normal dari G. Himpunan $G/N = \{aN \mid a \in G\}$ adalah grup di bawah operasi $(aN)(bN) = abN$ [4]

Bukti

Ambil sebarang $aN, bN, cN \in G/N$; $a, b, c \in G$

i). $(aN)(bN) = a(Nb)N$

$= a(bN)N$

$= (ab)(NN)$

$= (ab)N$ ($\therefore$ tertutup)

ii). $((aN)(bN))(cN) = ((ab)N)(cN)$

$= ((ab)c)N$

$= (a(bc))N$

$= (aN)\ ((bc)\ N)$

$= (aN)\ ((bN)(cN)) \quad (\therefore$ assosiatif)

iii). Jika e elemen identitas di G maka koset eN = N adalah elemen identitas di G/N karena untuk sebarang elemen $aN \in G/N$ berlaku

$(aN)\ (eN) = (ae)N = aN$ dan

$(eN)(aN) = (ea)N = aN$

Jadi $(aN)\ (eN) = (eN)(aN) = aN,\ \forall\ aN \in G/N$

iv). Misalkan $aN \in G/N$ maka $a \in G$ dan oleh karena itu $a^{-1} \in G$, berarti $a^{-1}H \in G/N$

Selanjutnya,

$(aN)\ (a^{-1}\ N) = (aa^{-1}\ )N = eN = N$ dan

$(a^{-1}\ N)\ (aN) = (a^{-1}\ a)N = eN = N$

Jadi $\forall\ aN \in G/N\ \exists\ a^{-1}\ N \in G/N \ni (aN)\ (a^{-1}\ N) = (a^{-1}\ N)\ (aN) = N$

Dengan demikian setiap koset di G/N memiliki invers di G/N juga,

$$(aN)^{-1} = a^{-1}\ N \in G/N$$

Terbukti bahwa himpunan G/N dari semua koset dari N dalam G adalah grup terhadap operasi yang didefinisikan di atas.

Contoh-contoh:

1. Misalkan $4Z = \{0, \pm 4, \pm 8, \ldots\}$. Untuk mengkonstruk Z/4Z, kita harus menentukan terlebih dahulu koset kiri dari 4Z dalam Z.

   $0 + 4Z = 4Z = \{0, \pm 4, \pm 8, \ldots\}$

   $1 + 4Z = \{1, 5, 9, \ldots; -3, -7, -11, \ldots\}$

   $2 + 4Z = \{2, 6, 10, \ldots; -2, -6, -10, \ldots\}$

   $3 + 4Z = \{3, 7, 11, \ldots; -1, -5, -9, \ldots\}$

   Untuk $k \in Z$, maka $k = 4q + r$ dengan $0 \le r < 4$ dan oleh karena itu $k + 4Z = r + 4q + 4Z = r + 4Z$.

   Jadi $Z / 4Z = \{0 + 4Z, 1 + 4Z, 2 + 4Z, 3 + 4Z\}$.
2. Misalkan $G = Z_{18}$ dan $H = \langle 6 \rangle = \{0, 6, 12\}$

   $G/H = Z_{18} / \langle 6\rangle = \{0 + \langle 6\rangle, 1 + \langle 6\rangle, 2 + \langle 6\rangle, 3 + \langle 6\rangle, 4 + \langle 6\rangle, 5 + \langle 6\rangle\}$.

   Untuk menentukan hasil operasi dari elemen pada grup ini, perhatikan

   $(5 + H) + (4 + H) = 5 + 4 + H = 9 + H = 3 + 6 + H = 3 + H$

<u>Teorema 10.4 :</u>

Jika N subgrup normal dari grup finit G, maka

$$o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)}$$ [5]

Bukti:

Berdasarkan definisi,

$$\begin{aligned} o(G/N) &= \text{Banyaknya koset-koset kiri (kanan) yang berbeda dari N dalam G} \\ &= \text{Indeks dari N dalam G} \\ &= \frac{\text{Banyaknya elemen dalam G}}{\text{Banyaknya elemen dalam N}} \\ &= \frac{o(G)}{o(N)} \end{aligned}$$

<u>Teorema 10.5 :</u>

Jika N subgrup normal dari grup G sedemikian sehingga indeks dari N dalam G adalah bilangan prima, maka grup faktor G/N adalah siklik.[6]

Bukti:

Ambil sebarang N subgrup normal dari G sedemikian sehingga indeks dari N dalam G adalah bilangan prima, sebut n, maka

$$\begin{aligned} o(G/N) &= \text{Banyaknya koset-koset kiri (kanan) yang berbeda dari N dalam G} \\ &= \text{Indeks dari N dalam G} \\ &= n, \text{ dengan n bilangan prima} \end{aligned}$$

Jadi, G/N adalah grup berorde prima. Akan tetapi, setiap grup berorde prima adalah grup siklik. Hal ini menunjukkan G/N siklik.

<u>Teorema 10.6 :</u>

Setiap grup faktor dari grup abelian adalah abelian [7]

Bukti:

Misalkan N subgrup dari suatu grup abelian G. Karena setiap subgrup dari grup abelian adalah normal berakibat N subgrup normal dari G. Misalkan G/N adalah grup faktor dari G oleh N, akan ditunjukkan bahwa G/N abelian.

Ambil sebarang aN, bN $\in$ G/N dengan a, b $\in$ G dan,

$$\begin{aligned} (aN)(bN) &= abN \\ &= baN \end{aligned}$$

$= (bN)(aN)$

Jadi, G/N adalah grup abelian.

Dalam pembahasan grup faktor ini, kita juga perlu memperhatikan penggunaan notasi. Jika N subgrup normal dari G maka notasi |aN| memiliki dua interpretasi. Pertama, jika aN sebagai himpunan dari elemen-elemen maka |aN| menyatakan banyaknya elemen pada himpunan. Kemungkinan kedua, jika aN sebagai elemen dari grup faktor G/N maka |aN| menyatakan orde elemen aN dalam G/N.

Sebagai ilustrasi, pada contoh nomor 2 di atas, himpunan $3 + \langle 6 \rangle$ berorde 3 karena $3 + \langle 6 \rangle = \{3, 9, 15\}$. Akan tetapi sebagai elemen dari grup faktor $Z_{18} / \langle 6 \rangle$, $3 + \langle 6 \rangle$ berorde 2 karena $(3 + \langle 6 \rangle) + (3 + \langle 6 \rangle) = 6 + \langle 6 \rangle = 0 + \langle 6 \rangle$. Seperti biasa, untuk notasi yang memiliki arti lebih dari satu, interpretasi yang mungkin akan menjadi jelas tergantung pada konteksnya.

Rangkuman

1. Suatu subgrup N dari grup G disebut subgrup normal dari grup G jika dan hanya jika $gN = Ng$ untuk setiap $g \in G$. Kita notasikan dengan $N \lhd G$.
2. Subgrup H dari grup G merupakan subgrup normal jika dan hanya jika
$$xhx^{-1} \in H$$
untuk setiap $x \in G$ dan untuk setiap $h \in H$.
3. H subgrup normal dari grup G jika dan hanya jika $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$
4. Himpunan koset-koset kiri (kanan) dari N dalam G juga suatu grup yang disebut grup faktor dari G oleh N (atau grup *quotient* dari G oleh N).
5. Jika N subgrup normal dari grup finit G, maka
$$o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)}$$
6. Setiap grup faktor dari grup abelian adalah abelian

Latihan Soal

Selesaikan soal berikut!

1. Misalkan R himpunan bilangan real. Pemetaan $F_{a,b} : R \to R$ dirumuskan sebagai $F_{a,b}(x) = ax + b$ untuk setiap $a, b, x \in R$.

Himpunan $G = \{F_{a,\, b} |\ a \neq 0\}$ terhadap komposisi pemetaan merupakan grup. Tunjukkan $H = \{F_{1,\, b}\}$ terhadap komposisi pemetaan merupakan subgrup normal dari G.

2. Tentukan orde dari $5 + \langle 6 \rangle$ dalam grup faktor $Z_{18} / \langle 6 \rangle$?
3. Daftar semua anggota dan tentukan orde dari grup faktor $Z_{60}/\langle 15 \rangle$