DAFTAR ISI

BAB I
INTEGRAL FUNGSI

A. ANTI DERIVATIF

Jika F(x) adalah fungsi dengan turunannya F'(x) = f(x) pada interval tertentu dari sumbu x, maka *Anti Derivative* atau Integral Tak Tentu dari f(x) diberikan oleh: F(x) + C dengan C sebarang konstanta, disebut *Konstanta Integrasi.* Differensial fungsi yaitu sebagai proses untuk menentukan turunan dari suatu fungsi. Jika diberikan sebuah fungsi F(x), kemudian mencari derivative fungsi itu ialah F'(x) = f(x), maka pembahasan selanjutnya akan memandang kebalikan dari masalah itu.

Jika diberikan fungsi f(x), dan menghendaki dirumuskannya fungsi F(x) sedemikian rupa sehingga derivatifnya sama dengan f(x), yaitu F'(x) = f(x).

Simbol $\int$ menyatakan operasi anti-diferensiasi dan ditulis:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

dengan F'(x) = f(x) ekivalen dengan d [F(x)] = f(x) dx.

Definisi:

Suatu fungsi F(x) dinamakan antiderivatif dari fungsi f(x) dalam selang [a, b], jika pada semua titik dari selang itu memenuhi F'(x) = f(x).

Pada antiderivatif dari f(x) = x^2 menurut definisi F(x) = $\frac{1}{3}$ x^3, karena F'(x) = x^2. Akan tetapi antiderivatif fungsi f(x) = x^2 bukanlah F(x) = $\frac{1}{3}$ x^3 saja melainkan banyak, umpama:

F(x) = $\frac{1}{3}$ x^3 + 4

F(x) = $\frac{1}{3}$ x^3 – 2

F(x) = $\frac{1}{3}$ x^3 + 16 atau secara umum

F(x) = $\frac{1}{3}$ x^3 + C (dimana C suatu konstanta sembarang) dimana F'(x) = x^2.

Misal:

Fungsi y = $2x^3 - 4x^2 + 1$, memiliki derivative atau turunan:

dy = ($6x^2$ -8x) dx maka integral dari dy = ($6x^2$ -8x) dx ditulis:

$\int dy = \int (6x2 - 8x)$ dx, sehingga diperoleh:

y = $2x^3 - 4x^2$ + C, dimana C adalah bilangan konstanta.

Definisi:

Jika fungsi F(x) suatu antiderivatif dari f(x), maka penulisan F(x) + C adalah integral tak tentu untuk fungsi f(x) dan ditulis dengan lambang:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Jika F'(x) = f(x)

f(x) dinamakan Integran, f(x)dx adalah unsur integrasi $\int$ *dibaca integral*

Menentukan antiderivative fungsi f(x), dinamakan mengintegralkan/ melakukan integrasi fungsi f(x).

Akibat definisi integral tak tentu:

1) Derivatif suatu integral tak tentu sama dengan integran. Jadi:
$\frac{d\,[\int f(x)dx]}{dx}$ = f (x) atau $[\int f(x)dx]\,'$ = f (x)
2) Diferensial suatu integral tak tentu sama dengan unsur integrasi.
$d\,[\int f(x)dx]$ = f (x) dx
3) Integral tak tentu dari diferensial suatu fungsi sama dengan fungsi itu ditambah sembarang konstanta.
$\int d\,F(x) = F(x) + C$

Sebelum memulai mengerjakan integrasi fungsi-fungsi dengan berbagai cara, perhatikan dulu daftar integral pokok dari fungsi-fungsi tertentu berdasarkan perumusan definisi.

1. Rumus-Rumus Pokok Integral Tak Tentu

Berikut adalah rumus pokok dalam melakukan pengintegralan.

1) $\int x^n$ dx = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + C, (n ≠ - 1)
2) $\int$ dx = x + C
3) $\int \frac{dx}{x}$ = ln |x| + C
4) $\int \sin x$ dx = - cos x + C
5) $\int \cos x$ dx = sin x + C
6) $\int \tan x$ dx = ln |sec x| + C
7) $\int \cot x$ dx = ln |sin x| + C
8) $\int \sec x$ dx = ln |sec x + tan x| + C
9) $\int \csc x$ dx = ln |csc x - cot x| + C
10) $\int \sec^2 x$ dx = tan x + C

11) $\int \csc^2 x \; dx = -\cot x + C$
12) $\int \sec x \tan x \; dx = \sec x + C$
13) $\int \csc x \; \mathrm{ctan}\, x \; dx = -\csc x + C$
14) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
15) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotan}\, x + C$
16) $\int e^x dx = e^x + C$
17) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0)$
18) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C$
19) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C$
20) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$
21) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

$= -\mathrm{arc\,cotan}\, x + C$
22) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a}\right) + C$

$= -\frac{1}{a} \mathrm{arc\,cotan} \left(\frac{x}{a}\right) + C$
23) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

$= -\arccos x + C$
24) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a}\right) + C$

$= -\arccos \left(\frac{x}{a}\right) + C$

25) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

26) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

Rumus-rumus pokok integral tersebut dapat diuji kebenarannya dengan mendiferensir ruas kanan dimana hasilnya harus sama dengan integran ruas kiri.

1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ($n \neq -1$)

Bukti: dicari derivatif $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ sebagai berikut**,**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)}{dx} = \frac{n+1}{n+1} x^{n+1-1} = x^n \quad \text{(terbukti)}$$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

Bukti: dicari derivatif ln |x| + C sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\ln |x| + C)}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{(terbukti)}$$

3) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

Bukti: dicari derivatif - cos x + C sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(-\cos x + C)}{dx} = \sin x \qquad \text{(terbukti)}$$

4) $\int \cos x \; dx = \sin x + C$

Bukti: dicari derivatif sin x + C sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\sin x + C)}{dx} = \cos x \quad \text{(terbukti)}$$

5) $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C$

Bukti: dicari derivatif tan x + C sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\tan x + C)}{dx}$$

$$= \frac{d\,(\frac{\sin x}{\cos x}}{dx} = \frac{\frac{d\,(\sin x)}{dx}.\cos x - \sin x\,\frac{d(\cos x)}{dx}}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x.\cos x - \sin x\,.(-\sin x)}{cos^2 x}$$

$$= \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} \quad \text{(terbukti)}$$

6) $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\,\text{cotan}\, x + C$

Bukti: dicari derivatif - cotan x + C sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(-\,\text{cotan}\, x + C)}{dx} = \frac{d\,(-\frac{\cos x}{\sin x}}{dx}$$

$$= \frac{\frac{d\,(-\cos x)}{dx}.\sin x - (-\cos x)\,\frac{d(\sin x)}{dx}}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x.\sin x - (-\cos x).(\cos x)}{sin^2 x}$$

$$= \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x} = \frac{1}{sin^2 x} \quad \text{(terbukti)}$$

7) $\int e^x \, dx = e^x + C$

Bukti: dicari derivatif e^x + C sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(e^x + C)}{dx} = e^x \text{ (terbukti)}$$

8) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$

Bukti: dicari derivatif $\frac{a^x}{\ln a}$ + C sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\frac{a^x}{\ln a} + C)}{dx} = \frac{d\,(\frac{a^x}{\ln a}}{dx}$$

$$= \frac{\frac{d\,(a^x)}{dx}.\ln a - a^x.\,\frac{d(\ln a)}{dx}}{ln^2 a}$$

$$= \frac{a^x.\ln a.\ \ln a - a^x.\ \frac{1}{a}.\ 0}{ln^2 a}$$

$$= \frac{a^x.\ ln^2 a}{ln^2 a} = a^x \text{ (terbukti)}$$

9) $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$ = arc tan x + C

= - arc cotan x + C

Bukti: **(a)** dicari derivatif arc tan x + C sebagai berikut,

Misal: arc tan x = y $\leftrightarrow$ x = tan y $\leftrightarrow$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(\tan y)}{dy} = \frac{1}{cos^2 y}$$

$$= \frac{cos^2 y + sin^2 y}{cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$$

$$= 1 + x^2$$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ (terbukti)

(b) dicari derivatif - arc cotan x + C sebagai berikut,
Misal: - arc cotan x = y ↔ x = - cotan y ↔

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(-cotan\;y)}{dy} = \frac{1}{sin^2 y}$$
$$= \frac{sin^2 y + cos^2 y}{sin^2 y} = 1 + \text{cotan}^2 y$$
$$= 1 + x^2$$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ (terbukti)

10) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\text{ arc tan }(\frac{x}{a}) + C$

$= -\frac{1}{a}\text{ arc cotan }(\frac{x}{a}) + C$

Bukti: **(a)** dicari derivatif $\frac{1}{a}$ arc tan ($\frac{x}{a}$) + C sebagai berikut,

Misal: $\frac{1}{a}$ arc tan ($\frac{x}{a}$) = y ↔ arc tan ($\frac{x}{a}$) = a y

↔ $\frac{x}{a}$ = tan ay

x = a tan ay ↔ $\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(a\;\tan ay)}{dy}$

$$= a.\ \frac{1}{cos^2 ay}\ .\ a$$
$$= \frac{a^2(cos^2 ay + sin^2 ay)}{cos^2 ay}$$
$$= a^2\,(1 + \tan^2 ay\,)$$

$= a^2 + a^2 \tan^2 ay$

$= a^2 + x^2$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2 + x^2}$ (terbukti)

(b) dicari derivatif $-\frac{1}{a}$ arc cotan $(\frac{x}{a})$ + C sebagai berikut,

Misal: $-\frac{1}{a}$ arc cotan $(\frac{x}{a})$ = y $\leftrightarrow$ - arc cotan $(\frac{x}{a})$ = a y

$\leftrightarrow$ $\frac{x}{a}$ = - cotan a y

x = - a cotan ay

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(-a \text{ cotan } ay)}{dy}$$

$$= a.\ \frac{1}{sin^2 ay}\ .\ a$$

$$= \frac{a^2(sin^2 ay + cos^2 ay)}{sin^2 ay}$$

$$= a^2\,(1 + \text{cotan}^2\, ay\,)$$

$$= a^2 + a^2\, \text{cotan}^2 ay$$

$$= a^2 + x^2$$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2 + x^2}$ (terbukti)

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dx = arc sin x + C

= - arc cos x + C

Bukti: **(a)** dicari derivatif arc sin x + C sebagai berikut,

Misal: arc sin x = y $\leftrightarrow$ x = sin y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(\sin y)}{dy} = \cos y$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1- x^2}}$ (terbukti)

(b) dicari derivatif $-$ arc cos x + C sebagai berikut,
Misal: - arc cos x = y ↔ x = - cos y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(-\cos y)}{dy} = \sin y$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1- x^2}}$ (terbukti)

12) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$ = arc sin ($\frac{x}{a}$) + C

= - arc cos ($\frac{x}{a}$) + C

Bukti: **(a)** dicari derivatif arc sin ($\frac{x}{a}$) + C sebagai berikut,

Misal: arc sin ($\frac{x}{a}$) = y ↔ ($\frac{x}{a}$) = sin y

↔ x = a sin y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(a \sin y)}{dy} = a \cos y$$

$$= a\sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$= a\sqrt{1 - (\tfrac{x}{a})^2}$$

$= \sqrt{a^2 - x^2}$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (terbukti)

(b) dicari derivatif $-$ arc cos($\frac{x}{a}$) + C sebagai berikut,

Misal: - arc cos ($\frac{x}{a}$) = y $\leftrightarrow$ ($\frac{x}{a}$) = - cos y

$\leftrightarrow$ x = - a cos y

$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(-\text{ a} \cos y)}{dy}$ = a sin y

$= \text{a} \sqrt{1 - \ cos^2 y}$

$= \text{a} \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$

$= \sqrt{a^2 - x^2}$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (terbukti)

13) $\int \frac{1}{\text{a}^2 - \text{x}^2}$ dx = $\frac{1}{2a}$ ln | $\frac{a+x}{a-x}$ | + C

Bukti: Dicari derivative dari $\frac{1}{2a}$ ln | $\frac{a+x}{a-x}$ | + C sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\frac{1}{2a} \ln|\frac{a+x}{a-x}| + \text{C})}{dx}$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{a - x}{a + x} \cdot \frac{2\,a}{(\,a - x)^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

Ingat: u = $\frac{a+x}{a-x} \leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(\,a-x) + (\,a+x)}{(\,a-x)^2} = \frac{2\,a}{(\,a-x)^2}$

Jika: $y = \frac{1}{2a} \ln u \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x}{a+x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{2\,a}{(\,a-x)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2-x^2} \quad \text{(terbukti)}$$

14) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx \;=\; \ln |x + \sqrt{x^2 \;\pm\; a^2}| + C$

Bukti: Dicari derivative dari $\ln\,|x + \sqrt{x^2 \;\pm a^2}| + C$ sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C)}{dx} \leftrightarrow$$

$$u = |x + \sqrt{x^2 \;\pm\; a^2}|$$

$$\leftrightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \tfrac{1}{2}\,(\,x^2 \;\pm\; a^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,2\,x$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$y = \ln |x + \sqrt{x^2 \;\pm\; a^2}| \quad \leftrightarrow y = \ln u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \qquad \text{(terbukti)}$$

2. Sifat Integral Tak Tentu:

1) $\int [\, f_1(x) + f_2(x) \,]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx$
2) $\int k.\, f_1(x)\, dx = k. \int f_1(x)\, dx$
3) Bila $\int f_1(x)\, dx = F(x) + C$ dimana $F'(x) = f(x)$, maka:

   a. $\int f(a\,x)\, dx = \frac{1}{a}\,.\, F(a\,x) + C$
   b. $\int f(x + b)\, dx = F(x + b) + C$
   c. $\int f(a\,x + b)\, dx = \frac{1}{a}\,.\, F(a\,x + b) + C$

Soal:

Selesaikan integral di bawah ini,

1. $\int (5\,x^3 - 4 \sin x + 3\sqrt{x}\,)\, dx =$
2. $\int (3\,x^5 - 6\,x^2 + x + 7\,)\, dx =$
3. $\int (\,x + 1\,)^2\, dx =$
4. $\int (2\,x + 5)(\,3x - 2\,)\, dx =$
5. $\int \frac{x^5 - 1}{x^2}\, dx =$
6. $\int \frac{x\,(2x - 3)}{\sqrt{x}}\, dx =$
7. $\int (\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x}} + 2\,x\,\sqrt[4]{x}\,)\, dx =$
8. $\int \cos 4\,x\, dx =$
9. $\int \sin\,(3\,x + 2)\, dx =$
10. $\int \frac{3}{4 - x^2}\, dx =$

11. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2 - 9}}$ dx =

Penyelesaian:

1) $\int (5\ x^3 - 4 \sin x + 3\sqrt{x}\ )\ dx$
$= 5 \int x^3\ dx - 4\int \sin x\ dx + 3 \int \sqrt{x}\ dx$
$= \frac{5}{4} x^4 + 4 \cos x + 2\ x\sqrt{x} + C$

2) $\int (3\ x^5 - 6\ x^2 + x + 7\ )\ dx$
$= 3\int x^5\ dx - 6 \int x^2\ dx + \int x\ dx + \int 7\ dx$
$= \frac{1}{2} x^6 - 2\ x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 7\ x + C$

3) $\int (\ x + 1\ )^2\ dx$
$= \int (x^2 + 2\ x + 1)\ dx$
$= \frac{1}{3} x^3 + x^2 + x + C$

4) $\int (2\ x + 5)(\ 3x - 2\ )\ dx$
$= \int (\ 6x^2 + 11\ x - 10)\ dx$
$= 2\ x^3 + \frac{11}{2} x^2 - 10\ x + C$

5) $\int \frac{x^5 - 1}{x^2}\ dx$
$= \int (x^3 - x^{-2}\ )\ dx$
$= \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{x^3} + C$

6) $\int \frac{x\ (2x - 3)}{\sqrt{x}}\ dx$
$= \int \sqrt{x}\ (2\ x - 3)\ dx$
$= \int (2\ x^{\frac{3}{2}} - 3\ x^{\frac{1}{2}}\ )\ dx$

$=\int (2\, x^{\frac{3}{2}}\ -3\, x^{\frac{1}{2}})\, dx = \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x}\ - 2\, x \sqrt{x}\ + C$

7) $\int (\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x}} + 2\, x \sqrt[4]{x})\, dx$

$= \int (2\, x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} + 2\, x^{\frac{5}{4}})\, dx$

$= 3 \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{8}{9} x^2 \sqrt[4]{x}\ + C$

8) $\int \cos 4\, x\, dx = \frac{1}{4} \sin 4\, x\ + C$

9) $\int \sin(3\, x + 2)\, dx = -\frac{1}{3} \cos(3x + 2)\ + C$

10) $\int \frac{3}{4 - x^2}\, dx = \frac{3}{4} \ln \mathrm{I} \frac{2+x}{2-x} \mathrm{I} + C$

11) $\int \frac{3}{\sqrt{x^2 - 9}}\, dx = 3 \ln \mathrm{I}\ x + \sqrt{x^2 - 9}\ \mathrm{I}\ + C$

B. INTEGRASI DENGAN SUBSITUSI / MENGGANTI VARIABEL

Dalam mencari integral $\int f(x) dx$ seringkali tidak dapat langsung menentukan antiderivatif fungsi f(x). Sebab f(x) bentuknya terselubung dan berlainan dari rumus-rumus integral pokok yang sudah ada.
Cara mengatasinya dilakukan sebagai berikut:

1. Substitusi Perubah Baru Melalui x = Q(t)

Mengganti perubah x dengan perubah baru.
Dengan catatan: diferensial fungsi f(x) diartikan d f(x) = f '(x) dx.
Substitusi x = Q(t) dan tentukan dx = Q'(t) dt.
Pindahkan pada $\int f(x) dx$, mendapat:

$\int f(x)dx = \int f[Q(t)]\ Q'(t)dt$.

Bentuk ini diharapkan mirip salah satu integral pokok, sehingga mempermudah dalam mencari antiderivatifnya.

1) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ **(n ≠ - 1)**

Misal:

a) Carilah $\int \sqrt{x^2 - 4}$. x dx

Penyelesaian:

Substitusi $x^2 - 4 = t \leftrightarrow d(x^2 - 4) = dt \leftrightarrow 2\,x\,dx = dt$

$\leftrightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$

Jadi: $\int \sqrt{x^2 - 4}\,.\,x\,dx = \int \sqrt{t}.\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$= \frac{1}{2}\,.\,\dfrac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{1}{3}\,t\sqrt{t} + C$

$= \frac{1}{3}(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4} + C$

b) Carilah $\int 2\,(1 - 3\,x)^5\,dx$

Penyelesaian:

Substitusi $1 - 3\,x = t \leftrightarrow d(1 - 3x) = dt$

$\leftrightarrow -3\,dx = dt$

$\leftrightarrow dx = -\frac{1}{3}\,dt$

Jadi: $\int 2\,(1 - 3\,x)^5\,dx = -\frac{2}{3}\int t^5\,dt$

$= -\frac{1}{9}\,t^6 + C$

$= -\frac{1}{9}(1 - 3x)^6 + C$

c) $\int \frac{3}{5}\,(4\,x + 3)^9\,dx$

Penyelesaian:

Substitusi $4\,x + 3 = t \quad \leftrightarrow d(4\,x + 3) = dt$

$\leftrightarrow 4\,dx = dt$

$\leftrightarrow \ dx = \frac{1}{4}\ dt$

Jadi: $\int \frac{3}{5}\,(4\,x + 3)^9\,dx \ = \ \int \frac{3}{20}\ t^9\,dt \ = \ \frac{3}{20}\int\ t^9\,dt$

$= \ \frac{3}{200}\,t^{10} + C$

$= \ \frac{3}{200}\,(4x + 3)^{10} + C$

d) $\int \frac{3}{(4-x)^2}\,dx$

Penyelesaian:

Substitusi $4 - x = t \ \leftrightarrow\ d(4 - x) = dt$

$\leftrightarrow -\,dx = dt$

$\leftrightarrow dx = -\,dt$

Jadi: $\int \frac{3}{(4-x)^2}\,dx \ = \int \frac{3}{t^{\,2}}\,(-\,dt\,)$

$= -\,3 \int \frac{dt}{t^{\,2}}$

$= 3\,t^{-1} + C$

$= \ \frac{3}{4-x} + C$

e) $\int \frac{3}{(2\,x+1)^4}\,dx$

Penyelesaian:

Substitusi $2\,x + 1 = t \ \leftrightarrow d(2x + 1) = dt$

$\leftrightarrow 2\,dx = dt$

$$\leftrightarrow dx = \frac{1}{2}\,dt$$

Jadi: $\int \frac{3}{(2x+1)^4}\,dx = \int \frac{3}{2t^4}\,dt = \frac{3}{2}\int t^{-4}\,dt$

$$= -\frac{1}{2}\,t^{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\,(2x+1)^{-3} + C$$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ **dan** $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Misal:

a) Carilah $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

Penyelesaian:

Substitusi $\ln x = t \leftrightarrow d\ln x = dt$

$$\leftrightarrow \frac{1}{x}\,dx = dt$$

Jadi $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{t}.\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$$= \frac{2}{3}\,t\sqrt{t} = \frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x} + C$$

b) Carilah $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

Penyelesaian:

Subsitusi $1 + e^x = t \leftrightarrow d(1+e^x) = dt$

$$\leftrightarrow e^x\,dx = dt$$

Jadi $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$

$$= \int t^{-\frac{3}{2}}\,dt$$

$= -2\,t^{-\frac{1}{2}} + C \quad = -\frac{2}{\sqrt{t}} + C$

$= -\frac{2}{\sqrt{1+e^{x}}} + C$

c) Carilah $\int \frac{3\,x}{5-x^{2}}\,dx$

Penyelesaian:

Substitusi $5 - x^2 = t \quad \leftrightarrow \; d(5 - x^2) = dt$

$\leftrightarrow \; -2x\,dx = dt$

$\leftrightarrow \; x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt$

Jadi: $\int \frac{3\,x}{5-x^{2}}\,dx = \frac{-\frac{3}{2}}{t}\,dt$

$= -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t}$

$= -\frac{3}{2}\ln |t| + C$

$= -\frac{3}{2}\ln |5 - x^2| + C$

3) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

Misal:

Carilah $\int \sin(3x-2)\,dx$

Penyelesaian:

Substitusi $3x - 2 = t \quad \leftrightarrow \; d(3x - 2) = dt$

$\leftrightarrow \; 3\,dx = dt$

$\leftrightarrow \; dx = \frac{1}{3}\,dt$

Jadi: $\int \sin(3x-2)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}\,dt$

$= \frac{1}{3}\int \sin t \,.\, dt$

$= -\frac{1}{3}\cos t + C$

$= -\frac{1}{3}\cos(3x - 2) + C$

4) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\text{arc}\;\tan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Misal:

Carilah $\int \frac{dx}{4x^2-12\,x+13}$

Penyelesaian:

$4\,x^2 - 12\,x + 13 = (2x-3)^2 + 4$

Substitusi $2\,x - 3 = t \;\leftrightarrow\; d(2\,x-3) = dt$

$\leftrightarrow\; 2\,dx = dt$

$\leftrightarrow\; dx = \frac{1}{2}\,dt$

Jadi: $\int \frac{dx}{4x^2-12\,x+13} = \int \frac{dx}{(2x-3)^2+4}$

$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+4}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+4}$

$= \frac{1}{2}\,\text{arc tan}\left(\frac{t}{2}\right) + C$

$= \frac{1}{2}\,\text{arc tan}\left(\frac{2\,x-3}{2}\right) + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

Misal:

Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-12\,x+11}}$

Penyelesaian:

$4\,x^2 - 12\,x + 11 = (2x-3)^2 + 2$

Substitusi $2x - 3 = t \;\leftrightarrow\; d(2x-3) = dt$

$\leftrightarrow\; 2\,dx = dt \;\leftrightarrow\; dx = \frac{1}{2}\,dt$

Jadi: $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12\,x + 11}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-3)^2 + 2}}$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{\sqrt{t^2 + 2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln I\ t + \sqrt{t^2 + 2}\ + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln I\ (2x\text{-}3) + \sqrt{(2x-3)^2 + 2}\ + C$$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ **= arc sin** $\left(\frac{x}{a}\right)$ **+ C**

Misal:

a) Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 6\,x - 5}}$

Penyelesaian:

$-x^2 + 6\,x - 5 = -(x^2 - 6\,x + 5)$

$= -[(x-3)^2 - 4]$

$= 4 - (x-3)^2$

Substitusi $x - 3 = t \leftrightarrow d(x-3) = dt$

$\leftrightarrow dx = dt$

Jadi: $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 6\,x - 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-3)^2}}$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$= \text{arc sin}\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

$$= \text{arc sin}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$$

b) Hitunglah $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Penyelesaian:

Substitusi arc sin x = t $\leftrightarrow$ d(arc sin x) = dt

$$\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dt$$

Jadi: $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$$

c) Carilah $\int \tan x . \sec x\,dx$

Penyelesaian:

$\tan x . \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Substitusi cos x = t $\leftrightarrow$ d(cos x) = dt $\leftrightarrow$ - sin x dx = dt

$\leftrightarrow$ sin x dx = - dt

Jadi: $\int \tan x . \sec x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$$= \int \frac{-dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C$$

$$= \frac{1}{\cos x} + C$$

2. **Substitusi Fungsi Trigonometri**

Jika integran dari fungsi:

$a^2 - x^2$ dengan substitusi $x = a \sin \varphi$
$a^2 + x^2$ dengan substitusi $x = a \tan \varphi$
$x^2 - a^2$ dengan substitusi $x = a \sec \varphi$
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ dengan substitusi $x = \frac{a}{b} \sin y$
$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ dengan substitusi $x = \frac{a}{b} \tan y$
$\sqrt{b^2x - a^2}$ dengan substitusi $x = \frac{a}{b} \sec y$

Misal:

1) Carilah $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Penyelesaian:

Substitusi $x = a \sin \varphi \leftrightarrow dx = d(a \sin \varphi)$
$\leftrightarrow dx = a \cos \varphi\, d\varphi$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin \varphi)^{2}}$$
$$= \sqrt{a^2(1 - \sin \varphi^2)}$$
$$= a \cos \varphi$$

Jadi: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \cos \varphi \,.\, a \cos \varphi \;\; d\varphi$

$$= \int a^2\, cos^2\varphi.\, d\varphi = a^2 \int cos^2\varphi.\, d\varphi$$
$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi$$
$$= \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + C$$
$$= \frac{a^2}{2}.\, \varphi + \frac{a^2}{2} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 2 \sin \varphi \cos \varphi + C$$
$$= \frac{a^2}{2}.\, \varphi + \frac{a^2}{2} \,.\, \sin \varphi \cos \varphi + C$$

$$= \frac{a^2}{2}.\ \text{arc sin}\ (\frac{x}{a}) + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + C$$

$$= \frac{a^2}{2}.\ \text{arc sin}\ (\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}\ x\ \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

2) Carilah $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

Penyelesaian:

$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$

Substitusi $x - 1 = 2 \tan \varphi \leftrightarrow d(x - 1) = d(2 \tan \varphi)$

$$\leftrightarrow dx = \frac{2}{\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

$$(x - 1)^2 + 4 = 4 \tan^2\varphi + 4 = 4 (\tan^2\varphi + 1) = 4 \sec^2\varphi$$

Jadi: $\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$

$$= \int \frac{2\, d\varphi}{4 \sec^2\varphi . \cos^2\varphi}$$

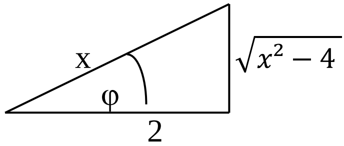
$$= \frac{1}{2} \int d\varphi = \frac{1}{2}\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{arc tan}\ (\frac{x-1}{2}) + C$$

3) Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

Penyelesaian:

Substitusi $x = 2 \sec \varphi \leftrightarrow dx = 2 \sec \varphi \tan \varphi\, d\varphi$



$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{4\,(sec^2\varphi - 1)}$$
$$= 2 \tan \varphi$$

Jadi: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{2\sec\varphi.\tan\varphi d\varphi}{2\tan\varphi}$

$= \int \sec\varphi \; d\varphi \rightarrow$

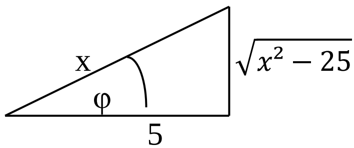
$= \ln |\sec \varphi + \tan \varphi| + C$

$= \ln \frac{1}{2} |x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$

4) Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$

Penyelesaian:

Substitusi $x = 5 \sec \varphi \quad \leftrightarrow \quad dx = 5 \sec \varphi \; \tan \varphi \; d\varphi$



$$\sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{25\,(sec^2\varphi - 1)}$$
$$= 5 \tan \varphi$$

Jadi: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} = \int \frac{5 \sec \varphi . \tan \varphi d\varphi}{5 \tan \varphi}$

$= \int \sec \varphi \, d\varphi$

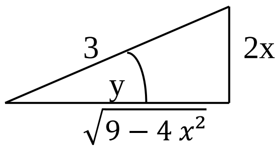
$= \ln |\sec \varphi + \tan \varphi| + C$

$= \ln \frac{1}{5} | x + \sqrt{x^2 - 25} | + C$

5) Carilah $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$

Penyelesaian:

Substitusi $x = \frac{3}{2} \sin y \leftrightarrow dx = \frac{3}{2} \cos y \; dy.$



$\sqrt{9 - 4x^2} = 3 \cos y$

Jadi $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} = \int \frac{3 \cos y}{\frac{3}{2} \sin y} (\frac{3}{2} \cos y \; dy.)$

$= 3 \int \frac{\cos^2 y}{\sin y} dy$

$= 3 \int \frac{1-\sin^2 y}{\sin y} dy$

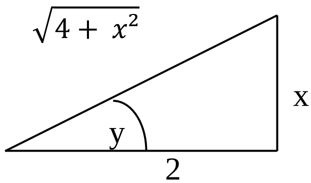
$= 3 \int \csc y \, dy - 3 \int \sin y \, dy$

$= 3 \ln |\csc y - \cot y| + 3 \cos y + C$

$= 3 \ln \left| \frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2\,x} \right| + \sqrt{9-4x^2} + C$

6) Carilah $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

Penyelesaian:
Substitusi x = 2 tan y ↔ dx = 2 sec² y dy.



$\sqrt{4+x^2} = 2 \sec y$

Jadi $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 y\ \ dy}{(4\tan^2 y)(2\sec y)}$

$= \frac{1}{4} \int \frac{\sec y}{\tan^2 y}$ dy

$= \frac{1}{4} \int \frac{\sec y}{\tan^2 y}$ dy

$= \frac{1}{4} \int \sin^{-2} y \cos y\, dy$

$= -\frac{1}{4\sin y} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4\,x} + C$

3. Substitusi Tanpa Perubah Baru

Misal:

1) Carilah $\int \cos(2x + 1)$ dx

Penyelesaian: Ubah dx $= \frac{1}{2}$ d(2x + 1)

Jadi: $\int \cos(2x + 1)\, dx = \frac{1}{2} \int \cos(2x + 1)$ d(2x + 1)

$= \frac{1}{2}$ sin (2x + 1) + C

2) Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}$

Penyelesaian: Ubah $x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3$

$\leftrightarrow$ dx = d(x + 2)

Jadi: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2 - 3}}$

$= \text{In I } (x + 2) + \sqrt{(x + 2)^2 - 3} \text{ I} + C$

$= \ln \text{I } x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 1} + C$

3) Carilah $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

Penyelesaian: ubah e^x dx = d(e^x)

Jadi: $\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^x}{e^x (e^x + 1)}$ dx

$= \int \frac{d(e^x)}{e^x (e^x + 1)}$

$= \int \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{e^x + 1}$ de^x

$= \ln e^x - \ln (e^x + 1) + C$

$= \ln \left(\frac{e^x}{e^x+1} \right) + C$

4) $\int x \sqrt[3]{a^2 - x^2}\, dx$

Penyelesaian: Ubah $x\, dx = -\frac{1}{2}\, d(a^2 - x^2)$

Jadi: $\int x \sqrt[3]{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}\, d(a^2 - x^2)$

$= -\frac{1}{2} \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$

$= -\frac{3}{8} (a^2 - x^2) \sqrt[3]{a^2 - x^2} + C$

C. INTEGRAL FUNGSI KWADRAT BERSUKU TIGA

1. Bentuk: $\mathbf{I_1} = \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}$

$\leftrightarrow$ Ubah $ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right)$

$= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4\, a^2} - \frac{b^2}{4\, a^2} + \frac{c}{a} \right)$

$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4\, a^2} \right]$

$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right]$

Sehingga Integral dapat ditulis:

$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2] \pm k^2}$

Substitusi $x + \frac{b}{2a} = t \quad \leftrightarrow \quad dx = dt$

Jadi : $\mathrm{I}_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$

Misal:

1) Carilah $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 5}$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{2(x^2 - x + \frac{5}{2})}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{4}}$$ Substitusi: $x - \frac{1}{2} = t \quad \leftrightarrow \quad dx = dt$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{t^2 + 2\frac{1}{4}}$$

ingat: $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{2t}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{3}\right) + C$$

2) Carilah $\int \frac{dx}{3x^2 - 6x}$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 6x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$$

$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2 - 1}$ Substitusi $x - 1 = t \leftrightarrow dx = dt$

$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 - 1}$ ingat $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$

$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C$

2. Bentuk: $\mathbf{I_2 = \int \frac{A\,x + B}{a\,x^2 + b\,x + c}\,dx}$

Diferensialkan penyebut: $d(a\,x^2 + b\,x + c) = (2ax + b)\,dx$

Ubahlah pembilang: $A\,x + B = \frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{A\,b}{2a}$

Sehingga Integral dapat ditulis:

$$I_2 = \int \frac{A\,x + B}{a\,x^2 + b\,x + c}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{A\,b}{2a}}{a\,x^2 + b\,x + c}\,dx$$

$$I_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)}{a\,x^2 + b\,x + c}\,dx + \left(B - \frac{A\,b}{2a}\right) \int \frac{dx}{a\,x^2 + b\,x + c}$$

Suku pertama:

$$\frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)}{a\,x^2 + b\,x + c}\,dx = \frac{A}{2a} \ln(a\,x^2 + b\,x + c)$$

Suku kedua: $\left(B - \frac{A\,b}{2a}\right) \int \frac{dx}{a\,x^2 + b\,x + c}$

$$= (B - \frac{A\,b}{2a}).\ \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] \pm k^2}$$

dimana $k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4\,a^2}$

Misal:

1) Carilah $\int \frac{2\,x + 1}{2\,x^2 - 4\,x + 3}\,dx$

Penyelesaian:

Diferensialkan penyebut: $d(2\,x^2 - 4\,x + 3) = (4\,x - 4)\,dx$

Ubahlah pembilang: $2\,x + 1 = \frac{1}{2}(4\,x - 4) + 3$

Sehingga Integral dapat ditulis:

$$\int \frac{2\,x + 1}{2\,x^2 - 4\,x + 3}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(4\,x - 4) + 3}{2\,x^2 - 4\,x + 3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{4\,x - 4}{2\,x^2 - 4\,x + 3}\,dx + 3 \int \frac{dx}{2\,x^2 - 4\,x + 3}$$

Suku pertama:

$$\frac{1}{2} \int \frac{4\,x - 4}{2\,x^2 - 4\,x + 3}\,dx = \frac{1}{2} \ln \mathrm{I}\ 2\,x^2 - 4\,x + 3\ \mathrm{I} + C$$

Suku kedua:

$$3\int \frac{dx}{2\,x^2 - 4\,x + 3} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 2\,x + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \text{ arc tan } \left(\frac{x - 1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \right) + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2}\ \text{arc tan}\ (x - 1)\sqrt{2} + C$$

$$\int \frac{2x+1}{2x^2-4x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln \text{I}2x^2 - 4x + 3\text{I} +$$
$$\frac{3}{2}\sqrt{2}\ \text{arc tan}\ (x - 1)\sqrt{2} + C$$

2) Carilah $\int \frac{2x+3}{x^2+2x-3}\,dx$

Penyelesaian:

Diferensialkan penyebut: d($x^2 + 2x - 3$) = ($2x + 2$) dx
Ubahlah pembilang: $2x + 3 = (2x + 2) + 1$
Sehingga Integral dapat ditulis:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{(2x+2)+1}{x^2+2x-3}\,dx$$
$$= \int \frac{(2x+2)}{x^2+2x-3}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

Suku pertama: $\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x-3}\,dx = \ln \text{I}x^2 + 2x - 3\text{I} + C$

Suku kedua: $\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-4}$
$$= \frac{1}{4}\ln \text{I}\frac{x-1}{x+3}\text{I} + C$$

Jadi: $\int \frac{2x+3}{x^2+2x-3}\,dx = \ln \text{I}x^2 + 2x - 3\text{I} +$
$$\frac{1}{4}\ln I\frac{x-1}{x+3}I + C$$

3. Bentuk: $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Melalui substitusi $x + \frac{b}{2a} = t$ diperoleh:

: $I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ untuk $a > 0$

$I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$ untuk $a < 0$

Misal:

1) Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}$

Penyelesaian:

Ubahlah penyebut $x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3$

Substitusi $x - 1 = t \leftrightarrow d(x - 1) = dt$

$\leftrightarrow dx = dt$

Sehingga Integral dapat ditulis:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 - 3}}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 3}}$$

$$= \ln I\, t + \sqrt{t^2 - 3}\, I + C$$

$$= \ln I\, (x - 1) + \sqrt{(x - 1)^2 - 3}\, I + C$$

2) Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$

Penyelesaian:

Ubahlah penyebut $-x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x - 3)$

$= -[(x-1)^2 - 4]$

$= 4 - (x-1)^2$

Substitusi $x - 1 = t \leftrightarrow d(x-1) = dt$

$\leftrightarrow dx = dt$

Sehingga Integral dapat ditulis:

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{-x^2+2\,x+3}} = \int \frac{d\,x}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

$$= \int \frac{d\,t}{\sqrt{4-t^2}} = \text{arc sin}\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

$$= \text{arc sin}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

4. Bentuk: $\mathbf{I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}\,dx}$

Ubah pembilang: $Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{Ab}{2a}$

$$I_4 = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{Ab}{2a}}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}\,dx$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}$$

Melalui substitusi: $ax^2 + bx + c = t^2$

$\leftrightarrow (2ax+b)\,dx = 2\,t\,dt$

$$\frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2\,t\,dt}{t} = \frac{A}{a}\int dt$$

$$= \frac{A}{a}.\,t + C = \frac{A}{a}\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} + C$$

$$\left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}} = \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{x \pm k^2}}$$

dimana $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = k^2$

Misal: 1) Carilah $\int \frac{2\,x - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$

Peenyelesaian:

$$\int \frac{2\,x - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2}}\,dx = \int \frac{(2\,x + 1) - 4}{\sqrt{x^2 + x + 2}}\,dx$$

$$= \int \frac{(2\,x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}\,dx - 4 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}}$$

$$= 2\sqrt{x^2 + x + 2} - 4 \ln \mathrm{I}\,(x + \frac{1}{2}) + \sqrt{x^2 + x + 2}\ \mathrm{I} + C$$

2) Carilah $\int \frac{3\,x - 1}{\sqrt{-x^2 + 6\,x - 8}}\,dx$

Penyelesaian:

$$\int \frac{3\,x - 1}{\sqrt{-x^2 + 6\,x - 8}}\,dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2\,x + 6) + 8}{\sqrt{-x^2 + 6\,x - 8}}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2} \int \frac{(-2\,x + 6)}{\sqrt{-x^2 + 6\,x - 8}}\,dx + 8 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-3)^2}}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{-x^2 + 6x - 8} + 8 \arcsin (x - 3) + C$$

$$= -3\sqrt{-x^2 + 6x - 8} + 8 \arcsin (x - 3) + C$$

BAB II

INTEGRAL TAK TENTU

A. INTEGRAL PARSIAL

Misalkan u dan v masing-masing fungsi dari x, maka diferensial dari uv adalah: d(uv) = u dv + v du. Dan integrasi kedua ruas adalah:

$$\int d\,(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$
$$\leftrightarrow \quad u.v = \int u\,dv + \int v\,du$$
$$\leftrightarrow \quad \int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

Jadi:

$$\boxed{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}$$

Rumus ini disebut rumus integral parsial.

Misal:

1) Hitunglah $\int \text{arc } \tan x\,dx$

Penyelesaian:

u = arc tan x

$\leftrightarrow$ du = d(arc tan x) = $\dfrac{dx}{1+x^2}$

v = x $\leftrightarrow$ dv = dx

Jadi:

$$\int \text{arc } \tan x\,dx = (\text{arc } \tan x)(x) - \int x\; d(\text{arc } \tan x)$$
$$= x \text{ arc } \tan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$
$$= x \text{ arc } \tan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$
$$= x \text{ arc } \tan x - \frac{1}{2} \ln \mathrm{I}1 + x^2\,\mathrm{I} + C$$

2) Hitunglah $\int x^2 \ln x \; dx$

Penyelesaian:

$u = \ln x \quad \leftrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\, dx$

$x^2\, dx = \frac{1}{3}\, d(x^3) \quad \leftrightarrow \quad v = x^3 \quad \leftrightarrow \quad dv = d\,(x^3)$

Jadi: $\int x^2 \ln x \; dx = \int \ln x .\, x^2 \; dx$

$= \frac{1}{3} \int \ln x .\, d\,(x^3)$

$= \frac{1}{3} (\ln x)(x^3) - \frac{1}{3} \int x^3 \; d\,(\ln x)$

$= \frac{1}{3} (\ln x)(x^3) - \frac{1}{3} \int x^3 .\; \frac{1}{x}\, dx$

$= \frac{1}{3} (\ln x)(x^3) - \frac{1}{9}\, x^3 + C$

3) Carilah $\int (a\,x + b)\; \cos(c\,x + d)\; dx$

Penyelesaian:

$\int \cos(c\,x + d)\, dx = \int \frac{1}{c} \cos(c\,x + d)\; d(c\,x + d)$

$= \frac{1}{c}\, d \sin(c\,x + d)$

Jadi:

$\int (a\,x + b)\; \cos(cx + d)\; dx = \frac{1}{c} \int (ax + b)\; d\,(\sin(cx + d))$

$= \frac{1}{c} (a\,x + b) \sin(c\,x + d) - \frac{1}{c} \int \sin(cx + d)\; d(ax + b)$

$= \frac{1}{c} (a\,x + b) \sin(c\,x + d) - \frac{1}{c} \int \sin(cx + d).\; a\, dx$

$= \frac{1}{c} (a\,x + b) \sin(c\,x + d) - \frac{a}{c^2} \cos(c\,x + d) + C$

4) Carilah $\int x^2 e^x \, dx$

Penyelesaian:
$e^x \, dx = d(e^x)$
Jadi:
$\int x^2 e^x \, dx = \int x^2 \, d(e^x)$
$= x^2 e^x - \int e^x \, d(x^2)$
$= x^2 e^x - \int e^x \, 2x \, dx$
$= x^2 e^x - 2\int x \, d(e^x)$
$= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x \, dx)$
$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

5) Carilah $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

Penyelesaian:
$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$
$= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$
$\leftrightarrow \; x^2 \, dx = -\frac{1}{2} x(-2x \, dx)$
$= -\frac{1}{2} \, d(a^2 - x^2)$
$= a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{x \, d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$= a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \int x \, (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(a^2 - x^2)$
$= a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \int x \, (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$
$= a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x \,.\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

Suku ketiga ruas kanan dipindah ke ruas kiri:

$2 \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ a^2 \text{ arc sin } \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\ x . \sqrt{a^2 - x^2}$

Jadi: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \ a^2 \text{ arc sin } \left(\frac{x}{a}\right) + x . \sqrt{a^2 - x^2}$

B. PECAHAN RASIONAL

1. Pecahan Rasional Parsial dan Integrasinya.

Pecahan rasional mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + b_{m-1}\, x + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n}$$

Ada kemungkinan derajat pembilang lebih tinggi dari derajat penyebut. Untuk ini perlu dilakukan pembagian terlebih dahulu.

Andaikan pembagian itu memperoleh hasil:

$\frac{Q(x)}{f(x)} = \text{M(x)} + \frac{F(x)}{f(x)}$.

maka hasil bagi M(x) tetap berupa polynomial dan F(x) derajatnya sedikitnya satu lebih dari pada f(x).

Misal: $\frac{x^4 - 5}{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 2x + 1 - \frac{4x + 8}{x^2 - 2x + 3}$.

Definisi: Pecahan rasional murni mempunyai bentuk,

I. $\frac{\text{A}}{\text{x} - \text{a}}$

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k bilangan bulat positip ≥ 2)

III. $\frac{A\,x + B}{x^2 + p\,x + q}$

IV. $\frac{A\,x + B}{(\,x^2 + p\,x + q\,)^k}$ (k bilangan bulat positip ≥ 2)

Integrasi pecahan rasional murni di lakukan sebagai berikut:

I. $\int \frac{A}{x-a}$ dx = A ln I x – a I + C.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}$ dx = A $\int (\,x - a)^{-\,k}$ d(x – a)

$= \frac{A\,(\,x-a)^{-\,k+1}}{-\,k+1} + C$ (k ≠ 1)

III. $\int \frac{A\,x + B}{x^2 + p\,x + q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(\,2x + p) + (B - \frac{Ap}{2}\,)}{x^2 + p\,x + q}\,dx$

$= \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p)}{x^2 + p\,x + q}\,dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (q - \frac{p^2}{4})}$

$= \frac{A}{2}$ ln I $x^2 + p\,x + q$ I + $\frac{2\,B - A\,p}{\sqrt{4\,q - p^2}}$ arc tan $\frac{2\,x + p}{\sqrt{4\,q - p^2}}$ + C

IV. $\int \frac{A\,x + B}{(\,x^2 + p\,x + q\,)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(\,2x + p) + (B - \frac{Ap}{2}\,)}{(\,x^2 + p\,x + q\,)^k}\,dx$

$= \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p)}{(\,x^2 + p\,x + q\,)^k}\,dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(\,x^2 + p\,x + q\,)^k}$

$= \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p)}{(\,x^2 + p\,x + q\,)^k}\,dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (q - \frac{p^2}{4})^k}$

↔ ruas kanan: $x^2 + p\,x + q = t$

↔ (2x + p) dx = dt suku pertama

$$x + \frac{p}{2} = t \leftrightarrow dx = dt$$

$$\leftrightarrow q - \frac{p^2}{4} = m^2 \text{ (bila } q - \frac{p^2}{4} > 0) \text{ suku kedua}$$

$$= \int \frac{d\,t}{t^k} + \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k}$$

2. Pecahan Rasional Menjadi Pecahan Rasional Parsial

Dari $\int \frac{Q\,(x)}{f(x)}\,dx = \int M(x)\,dx + \int \frac{F\,(x)}{f(x)}\,dx.$

I. Umpama penyebut f(x) dapat diuraikan atas factor linier $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ …………..$(x - a_n)$, maka pecahan parsial:

$$\frac{F\,(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Dimana $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n$ dapat dicari.

II. Penyebut dapat diuraikan atas faktor-faktor linier diantaranya ada yang rangkap, umpama:
$f\,(x) = (x - a_1)^2\,(x - a_2)\,(x - a_3)^3$

Pecahan parsial ditulis:

$$\frac{F\,(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^2} + \frac{A_2}{(x - a_1)} + \frac{A_3}{(x - a_2)} + \frac{A_4}{(x - a_3)^3} + \frac{A_5}{(x - a_3)^2} + \frac{A_6}{(x - a_3)}\,.$$

III. Diantara factor penyebut derajat dua yang tidak dapat diuraikana:

$f\,(x) = (\,x^2 + p\,x + q)\,(x - a)$

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\mathrm{A\,x + B}}{\mathrm{x^2 + p\,x + q}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x - a}}$$ **atau**

$$= \frac{\mathrm{(2\,x + p)A}}{\mathrm{x^2 + p\,x + q}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{x^2 + p\,x + q}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x - a}}.$$

IV. Faktor penyebut dalam bentuk uraian:

f (x) = (x^2 + p x + q)^2 (x – a)

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A\,x + B}{(x^2 + p\,x + q)^2} + \frac{C\,x + D}{(x^2 + p\,x + q)} + \frac{E}{x - a}$$ **atau**

$$= \frac{(2\,x + p)A}{x^2 + p\,x + q} + \frac{B}{x^2 + p\,x + q} + \frac{(2\,x + p)\,C}{(x^2 + p\,x + q)^2} + \frac{D}{(x^2 + p\,x + q)^2} + \frac{E}{x - a}$$

Misal:

1) Hitunglah $\int \frac{7\,x + 2}{x^3 + 2\,x^2 - x - 2}\,\mathrm{dx}$.

Penyelesaian:

$$\int \frac{7\,x + 2}{x^3 + 2\,x^2 - x - 2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{7\,x + 2}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,\mathrm{dx}$$

Integran jadikan pecahan parsial:

$$\frac{7\,x + 2}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x - 1}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{x + 1}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x + 2}}$$

7 x + 2 = A (x + 1) (x + 2) + B (x – 1) (x + 2) +
C (x – 1) (x + 1)

Koefisien x, ruas kiri dan kanan disamakan:

derajat dua: x^2 0 = A + B + C …… (1)

derajat satu: x 7 = 3 A + B …… (2)

bilangan konstanta: $2 = 2A - 2B - C$ …… (3)

$$\begin{array}{lcl} (1) + (3) & \leftrightarrow & 2 = 3A - B \\ (2) & \leftrightarrow & \underline{7 = 3A + B} \quad + \\ & & 9 = 6A \quad \leftrightarrow A = \frac{3}{2} \end{array}$$

…(2) $\leftrightarrow$ $7 = 3A + B$ $\leftrightarrow$ $B = 2\frac{1}{2}$

…(1) $\leftrightarrow$ $0 = \frac{3}{2} + 2\frac{1}{2} + C$ $\leftrightarrow$ $C = -4$

Jadi: $\int \frac{7x+2}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$

$$= \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{2\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-4}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln /x-1/ + \frac{5}{2}\ln /x+1/ - 4\ln /x+2/ + C.$$

2) $\int \frac{4x^3-2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)^3}\,dx.$

Penyelesaian:

Integran $\frac{4x^3-2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$.

$4x^3 - 2x^2 + x + 1 = A(x+1)^3 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)(x+1) + D(x-2)$

Koefisien x, ruas kiri dan kanan disamakan:

$4 = A + B$

$-2 = 3A + C$

$1 = 3A - 3B - C + D$

$1 = A - 2B - 2C - 2D$

Melalui pengerjaan mendapat: $A = 1$, $B = 3$, $C = -5$, $D = 2$.

Jadi Integral:

$$\int \frac{4\,x^3 - 2\,x^2 + x + 1}{(x-2)(x+1)^3}\,dx = \int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{x+1} - 5\int \frac{dx}{(x+1)^2} + 2\int \frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$= \ln /x - 2/ + 3\ln /x + 1/ + \frac{5}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + C$$

3) $\int \frac{7x^3+20\,x^2+35\,x-13}{x^2(x^2+4x+13)}\,dx.$

Penyelesaian:

$$\frac{7x^3+20\,x^2+35\,x-13}{x^2(x^2+4x+13)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C(2x+4)}{x^2+4x+13} + \frac{D}{x^2+4x+13}.$$

$$7x^3 + 20\,x^2 + 35\,x - 13 = A\,x(x^2 + 4x + 13) + B\,(x^2 + 4x + 13) + C(2x+4)x^2 + D\,x^2.$$

Akan diperoleh: A = 3, B = -1, C = 2, D = 1

Jadi integral:

$$\int \frac{7x^3+20\,x^2+35\,x-13}{x^2(x^2+4x+13)}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{2(2x+4)}{x^2+4x+13}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+4x+13}$$

$$= 3\ln /x/ + \frac{1}{x} + 2\ln /\,x^2 + 4x + 13\,/ + \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C$$

Catatan: $x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 + 9$

Untuk pecahan dengan penyebut $x^2 + 4x + 13$ tidak diambil bentuk

$\frac{C\,x+D}{x^2+4x+13}$ melainkan lebih baik

$\frac{C(2x+4)}{x^2+4x+13} + \frac{D}{x^2+4x+13}$ karena integrasi

$\int \frac{2(2x+4)}{x^2+4x+13}$ dx = C ln / x^2 + 4x + 13 /

dan $\int \frac{D}{x^2+4x+13}$ dx = $\int \frac{D}{x+2)^2+9}$ dx = $\frac{D}{3}$ arc tan $\frac{x+2}{3}$

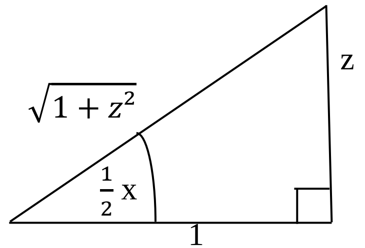
C. INTEGRASI FUNGSI TRIGONOMETRI

1. Bentuk: $\int \boldsymbol{R\ (\sin x, \cos x) dx}$

Disini dilakukan substitusi: tan $\frac{1}{2}$ x = z →

$\frac{1}{2}$ x = arc tan z → x = 2 arc tan z

dx = $\frac{2\,dz}{1+z^2}$



sin x = 2 sin $\frac{1}{2}$ x cos $\frac{1}{2}$ x

= 2. $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ = $\frac{2\,z}{1+z^2}$

cos x = cos^2 $\frac{1}{2}$ x - sin^2 $\frac{1}{2}$ x

= $\frac{1}{1+z^2}$ - $\frac{z^2}{1+z^2}$ = $\frac{1-z^2}{1+z^2}$

Misal:

1) $\int \frac{dx}{\sin x} =$

Penyelesaian:

ambil z = tan $\frac{1}{2}$ x → x = 2 arc tan z → dx = $\frac{2\,dz}{1+z^2}$

sin x = $\frac{2\,z}{1+z^2}$, sehingga:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{2\,z}\,dz$$
$$= \int \frac{dz}{z}$$
$$= \ln / z / + C$$
$$= \ln / \tan \tfrac{1}{2} x / + C$$

2) $\int \frac{dx}{5+4\cos x} =$

Penyelesaian:

ambil z = tan $\frac{1}{2}$ x → x = 2 arc tan z → dx = $\frac{2\,dz}{1+z^2}$

cos x = $\frac{1-z^2}{1+z^2}$, sehingga:

5 + 4 cos x = 5 + 4. $\frac{1-z^2}{1+z^2} = \frac{9+z^2}{1+z^2}$

Jadi:

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \int \frac{2}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{9+z^2}\,dz$$
$$= 2\int \frac{dz}{9+z^2}$$
$$= \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{z}{3}\right) + C$$
$$= \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{\tan \frac{1}{2} x}{3}\right) + C$$

a) $\int \boldsymbol{R\ (sin\ x)\ cos\ x\ dx}$

Disini dilakukan substitusi: sin x = t $\rightarrow$ cos x dx = dt

$\int R\ (sin\ x)\ cos\ x\ dx\ = \int R\ (\ t\ )$ dt.

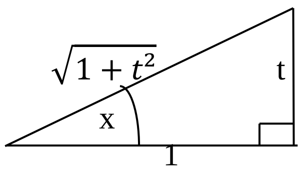
b) $\int \boldsymbol{R\ (cos\ x)\ sin\ x\ dx}$

Disini dilakukan substitusi: cos x = t $\rightarrow$ sin x dx = - dt

$\int R\ (cos\ x)\ sin\ x\ dx\ = - \int R\ (\ t\ )$ dt.

c) $\int \boldsymbol{R\ (tan\ x)\ dx}$

Disini dilakukan substitusi: tan x = t $\rightarrow$ x = arc tan t



dx = $\frac{dt}{1+t^2}$

Jadi $\int R\ (tan\ x)\ dx = \int \frac{R\ (\ t\ )dt}{1+\ t^2}$

Misal:

1) $\int \frac{sin^3 x}{2 + cos\ x}$ dx.

Penyelesaian:

Ini dari bentuk: $\int R\ (cos\ x)\ sin\ x\ dx$

cos x = t $\rightarrow$ sin x dx = - dt

$\rightarrow \int \frac{sin^3 x}{2 + cos\ x}$ dx = $\int \frac{sin^2 x\ .sin\ x\ \ dx}{2 + cos\ x}$

= $\int \frac{1-t^2}{2+t}$. (- dt)

$$= \int \frac{t^2-1}{t+2}\, dt$$
$$= \int \left(t - 2 + \frac{3}{t+2} \right) dt$$
$$= \frac{1}{2} t^2 - 2\,t + 3 \ln / t + 2 / + C$$
$$= \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln / \cos x + 2 / + C.$$

2) $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$

Penyelesaian:

ambil $\tan x = t \;\rightarrow\; x = \arc\tan t \;\rightarrow\; dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ (lht. Gb.)

$2 - \sin^2 x = 2 - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{2+t^2}{1+t^2}$

Jadi: $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{1+t^2}{2+t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$
$$= \int \frac{dt}{2+t^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tan } \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tan } \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ arc tan } \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \tan x\right) + C.$$

2. Bentuk: $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

a) $\boxed{\mathbf{n = 2\,p + 1}}$ (bilangan ganjil **)**

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\, dx$$

$= \int sin^m x\ (1 - sin^2 x)^p \cos x\ dx$

ambil $\sin x = t \rightarrow \cos x\ dx = dt$.

Jadi: $\int sin^m x\ cos^{2p+1} x\ dx = \int t^m\ (1 - t^2)^p\ dt$

menjadi integrasi fungsi rasional dalam t.

b) $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{m = 2\,p} \\ \mathbf{n = 2\,q} \end{array}}$ (kedua duanya genap)

$\int sin^m x\ cos^n x\ dx$ diselesaikan melalui:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ dan $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Jadi:

$$\int sin^{2p} x\ cos^{2q} x\ dx = \int \left(\frac{1 - cos\ 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + cos\ 2x}{2}\right) dx$$

Integran akan mempunyai pangkat ganjil dan genap untuk cos 2x

Misal:

1) $\int sin^2 x\ cos^3 x\ dx = \int sin^2 x\ cos^2 x \cos x\ dx$

$\sin x = t \rightarrow \cos x\ dx = dt$

$= \int sin^2 x\ (1 - sin^2 x) \cos x\ dx$

$= \int t^2\ (1 - t^2)\ dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 + C$

$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

2) $\int sin^2 x\ cos^2 x\ dx \rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin^2 x\ \cos^2 x = \frac{1 - \cos^2 2x}{4}$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

Jadi:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Cara lain mengubah integran:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}(2 \sin x \cos x)^2$$
$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x.$$

3. Bentuk: $\int \sin mx \cos nx \, dx$

a) $\int \cos mx \cos nx \, dx$

Integran diubah: $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n) + \cos(m-n)]$

b) $\int \sin mx \cos nx \, dx$

Integran diubah: $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n) + \sin(m-n)]$

c) $\int \sin mx \sin nx \, dx$

Integran diubah: $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n) + \cos(m-n)]$

Rumusan berikut diperlukan untuk menemukan integral-integral Trigonometri:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
$\sin^2 x = ½ (1 – \cos 2x)$
$\cos^2 x = ½ (1 + \cos 2x)$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$a^2 = b^2 + c^2 – 2 bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 – 2 ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 – 2 ab \cos C$
$\frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} = 2 R$
$2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x – y)$
$2 \sin x \sin y = \cos (x - y) - \cos (x + y)$
$2 \sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x – y)$
$2 \cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x – y)$
$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin (x - y) = \sin x \cos y – \cos x \sin y$
$\cos (x + y) = \cos x \cos y – \sin x \sin y$
$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\tan (x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cot (x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$
$\cot (x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$
$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x + y}{2} \right) \cos \left(\frac{x - y}{2} \right)$
$\sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x + y}{2} \right) \sin \left(\frac{x - y}{2} \right)$
$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x + y}{2} \right) \cos \left(\frac{x - y}{2} \right)$
$\cos x - \cos y = - 2 \sin \left(\frac{x + y}{2} \right) \sin \left(\frac{x - y}{2} \right)$

Misal:

1) $\int \sin 5x \ \sin 3x \, dx = \int \frac{1}{2} [- \cos 8x + \cos 2x] \, dx$

$$= - \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

2) $\int \sin^2 x \ dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx$

$$= \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{4} \sin 2x + C$$

3) $\int \sin 3x \cos 5x \ dx$

$$= \int \frac{1}{2} \ \{ \sin (3x - 5x) + \sin (3x + 5x) \} \ dx$$

$$= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$$

4) $\int \cos 4x \cos 2x \ dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 6x) \, dx$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{12} \sin 6x + C$$

D. RUMUS REDUKSI

Gunakan integral parsial pada integral $\int x^n e^x$ dx sebagai berikut:

$\int x^n e^x \, dx = \int x^n \, d(e^x) = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$

Sedang $\int x^{n-1} e^x \, dx = \int x^{n-1} \, d(e^x) = x^{n-1} e^x - (n-1) \int x^{n-2} e^x \, dx$

Jadi:

$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \, x^{n-1} e^x + n (n-1) \int x^{n-2} e^x \, dx$

Jika suku terakhir diperlakukan dengan integral parsial maka integran $x^{n-2} e^x$ akan turun satu tingkat menjadi

$x^{n-3}e^x$. Demikian seterusnya akhirnya akan tinggal bentuk integral $\int e^x$ dx = e^x + C saja.
Bentuk $\int x^n e^x$ dx = $x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x$ dx, disebut rumus reduksi.

1) $\boldsymbol{\int cos^n}$ **x dx =** $\boldsymbol{\frac{1}{n} cos^{n-1}}$ **x sin x +** $\boldsymbol{\frac{n-1}{n} \int cos^{n-2}}$ **x dx**

$\int cos^n$ x dx = $\int cos^{n-1} x$ d(sin x)

= cos^{n-1} x. sin x + (n – 1) $\int cos^{n-2} x.\ sin^2$x dx

= cos^{n-1} x. sin x + (n – 1) $\int cos^{n-2} x$ ($1 - cos^2$x) dx

$\int cos^n$ x dx = cos^{n-1} x. sin x + (n – 1) $\int cos^{n-2} x$ –

(n – 1) $\int cos^n$ dx

Suku terakhir ruas kanan di pindah ke ruas kiri:

n $\int cos^n$ x dx = cos^{n-1} x. sin x + (n – 1) $\int cos^{n-2} x$ dx

Jadi:

$\boldsymbol{\int cos^n}$ **x dx =** $\boldsymbol{\frac{1}{n}\ cos^{n-1}}$ **x. sin x +** $\boldsymbol{\frac{n-1}{n} \int cos^{n-2} x}$ **dx.**

Misal: $\int cos^6$ x dx

Penyelesaian:

$\int cos^6$ x dx = $\frac{1}{6}\ cos^5$ x. sin x + $\frac{5}{6} \int cos^4 x$ dx

$\int cos^4$ x dx = $\frac{1}{4}\ cos^3$ x. sin x + $\frac{3}{4} \int cos^2 x$ dx

$\int cos^2$ x dx = $\frac{1}{2}$ cos x. sin x + $\frac{1}{2} \int cos^0 x$ dx

= $\frac{1}{2}$ cos x. sin x + $\frac{1}{2}$ x + C

Jadi:

$\int cos^6$ x dx = $\frac{1}{6}\ cos^5$ x. sin x + $\frac{5}{6}$ ($\frac{1}{4}\ cos^3$ x. sin x

+ $\frac{3}{4}$ ($\frac{1}{2}$ cos x. sin x + $\frac{1}{2}$ x)) + C

$\int cos^6$ x dx =

$\frac{1}{6}$ cos^5x sin x + $\frac{5}{6}$ ($\frac{1}{4}$ cos^3 x.sin x + $\frac{3}{8}$ cos x sin x + $\frac{3}{8}$ x) + C

= $\frac{1}{6}$ cos^5x sin x + $\frac{5}{24}$ cos^3 x sin x + $\frac{15}{48}$ cos x sin x + $\frac{15}{48}$ x + C

2) $\int \boldsymbol{sin^n}$ x dx = - $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{sin^{n-1}}$ x cos x + $\frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n}}\int \boldsymbol{sin^{n-2}}$ x dx

$\int sin^n$ x dx = $-\int sin^{n-1}x$ d(cos x)

= - sin^{n-1} x. cos x + (n – 1) $\int sin^{n-2}x.\ cos^2$x dx

= $-$ sin^{n-1} x cos x + (n – 1) $\int sin^{n-2}x$ ($1 - sin^2$x) dx

$\int sin^n$ x dx = - sin^{n-1} x. cos x + (n – 1) $\int sin^{n-2}x$ –

(n – 1) $\int sin^n$ dx

Suku terakhir ruas kanan di pindah ke ruas kiri:

n $\int sin^n$ x dx = - sin^{n-1} x. cos x + (n – 1) $\int sin^{n-2}x$ dx

Jadi:

$\int \boldsymbol{sin^n}$ x dx = - $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{sin^{n-1}}$ x. cos x + $\frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n}}$ $\int \boldsymbol{sin^{n-2}x}$ dx.

Misal: $\int sin^6$ x dx =

Penyelesaian:

$\int sin^6$ x dx = $-$ $\frac{1}{6}$ sin^5 x. cos x + $\frac{5}{6}$ $\int sin^4 x$ dx

$\int sin^4$ x dx = $-$ $\frac{1}{4}$ sin^3 x. cos x + $\frac{3}{4}$ $\int sin^2 x$ dx

$\int sin^2$ x dx = - $\frac{1}{2}$ sin x. cos x + $\frac{1}{2}$ $\int sin^0 x$ dx

= - $\frac{1}{2}$ sin x. cos x + $\frac{1}{2}$ x + C

Jadi:

$\int sin^6$ x dx = - $\frac{1}{6}$ sin^5 x. cos x + $\frac{5}{6}$ ($-\frac{1}{4}$ sin^3 x. cos x

+ $\frac{3}{4}$ ($-\frac{1}{2}$ sin x. cos x + $\frac{1}{2}$ x)) + C

$$= -\frac{1}{6}\ sin^5\text{x cos x} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\ sin^3\text{ x. cos x} - \frac{3}{8}\text{sin x cos x} + \frac{3}{8}\text{x}\right) + \text{C}$$

$$= -\ \frac{1}{6}\ sin^5\text{x cos x} - \frac{5}{24}sin^3\text{ x cos x} - \frac{15}{48}\text{sin x cos x} + \frac{15}{48}\text{ x + C.}$$

Rumus reduksi (1) dan (2) dipakai jika n positip.

3) $\int \frac{dx}{cos^m x} = \frac{sin\ x}{(m-1)cos^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{cos^{m-2}x}$ **, m > 1.**

Dari rumus (1) :

$\int cos^n\text{ x dx } = \frac{1}{n}\ cos^{n-1}\text{ x. sin x} + \frac{n-1}{n}\ \int cos^{n-2}x\text{ dx}$

Ditulis: $\int cos^{n-2}x\text{ dx} = \frac{-\,cos^{n-1}x\sin x}{n-1} + \frac{n}{n-1}\ \int cos^n x\text{ dx}$

Ambil: n – 2 = - m, (m > 1)

→ n = - m + 2

→ n – 1 = - m + 1, diperoleh:

$$\int cos^{-\,m}x\text{ dx} = \frac{-\,cos^{-\,(m-1)}x\sin x}{-\,(m-1)} + \frac{-\,(m-2)}{-(m-1)}\ \int cos^{-(m-2)}x\text{ dx}$$

Jadi:

$$\int \frac{dx}{cos^m x} = \frac{sin\ x}{(m-1)cos^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{cos^{m-2}x}, \quad \text{m > 1.}$$

Misal: $\int \frac{dx}{cos^4 x} =$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{cos^4\, x} = \frac{sin\, x}{4\, cos^3\, x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{cos^2 x}$$
$$= \frac{sin\, x}{4\, cos^3\, x} + \frac{2}{3} \tan x + C.$$

4). $\int \frac{dx}{sin^m\, x} = \frac{-\cos x}{(m-1)sin^{m-1}\, x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{sin^{m-2}x}$**, m > 1**

Dari rumus (2) :

$\int sin^n$ x dx = - $\frac{1}{n}$ sin^{n-1} x. cos x + $\frac{n-1}{n}$ $\int sin^{n-2}x$ dx

Ditulis: $\int sin^{n-2}x$ dx = $\frac{sin^{n-1}x \cos x}{n-1} + \frac{n}{n-1}\int sin^n x$ dx

Ambil: n – 2 = - m, (m > 1)

→n = - m + 2

→ n – 1 = - m + 1, diperoleh:

$\int sin^{-m}x$ dx = $\frac{sin^{-(m-1)}x\, cos\, x}{-(m-1)} + \frac{-(m-2)}{-(m-1)}$ $\int sin^{-(m-2)}x$ dx

Jadi:

$$\int \frac{dx}{sin^m\, x} = \frac{-\cos x}{(m-1)sin^{m-1}\, x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{sin^{m-2}x}, \quad m > 1.$$

Misal: $\int \frac{dx}{sin^6\, x} =$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{sin^6\, x} = \frac{-\cos x}{5\, sin^5\, x} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{sin^4 x}$$
$$= \frac{-\cos x}{5\, sin^5\, x} + \frac{4}{5}\left(\frac{-\cos x}{3\, sin^3\, x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{sin^2 x}\right)$$

$$= \frac{-\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4}{15}\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{8}{15}\int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4}{15}\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{8}{15}\left(\frac{-\cos x}{\sin x} + \frac{0}{1}\int \frac{dx}{\sin^0 x}\right)$$

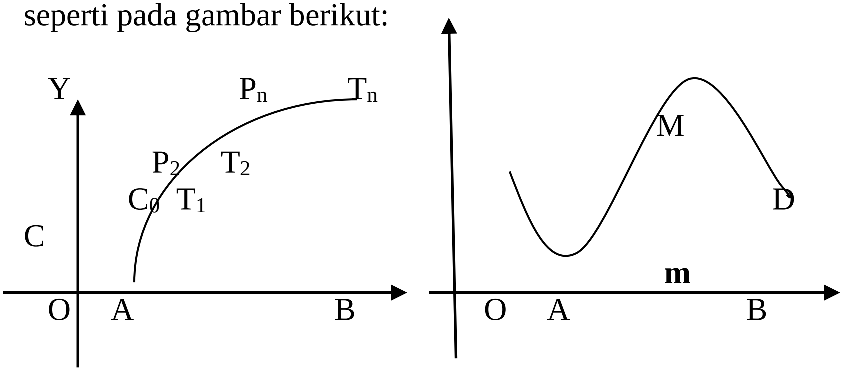
$$= \frac{-\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4}{15}\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{8}{15}\,\mathrm{ctan}\ x + C$$

BAB III
INTEGRAL TERTENTU

A. LUAS DAERAH DATAR

1. Jumlah Terbawah dan Jumlah Teratas

Suatu fungsi y = f(x) umpama kontinu dalam selang (a, b) seperti pada gambar berikut:



M dan m merupakan harga terbesar dan terkecil fungsi. Bagilah selang (a, b) kedalam n bagian yang tidak perlu sama, yaitu dengan menempatkan titik-titik bagi:

$a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.., x_{n-1}, x_n = b$ sehingga:

$x_0 < x_1 < x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..< x_{n-1} < x_n$

dan tetapkan $x_1 - x_0 = \Delta x_1$

$x_2 - x_1 = \Delta x_2$

……………..

……………..

$X_n - x_{n-1} = \Delta x_n$

Kemudian carilah harga fungsi terkecil dan terbesar dalam tiap selang bagian karena fungsi kontinu pada selang (a,b). Misalkan mendapat:

(x_0, x_1) dengan m_1 dan M_1

(x_1, x_2) dengan m_2 dan M_2

………………………………

………………………………

(x_{n-1}, x_n) dengan m_n dan M_n

Dibentuk jumlah sebagai berikut:

$\underline{S_n} = m_1 \,\Delta\, x_1 + m_2 \,\Delta\, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, m_n \,\Delta\, x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

Ini dinamakan jumlah terbawah.

$\overline{S_n} = M_1 \,\Delta\, x_1 + M_2 \,\Delta\, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, M_n \,\Delta\, x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

Ini dinamakan jumlah teratas.

m (b – a) = luas ABCD

M (b – a) = luas AEFB

$\underline{Sn}$ = jumlah terbawah atau jumlah luas empat persegi dalam.

$\overline{Sn}$ = jumlah teratas atau jumlah luas empat persegi luar.

2. Integral Tertentu

Dalam setiap selang bagian (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3)….. (x_{n-1}, x_n) tempatkan titik-titik ε_1, ε_2, ε_3, ……. ε_n dengan ketentuan:

$x_0 < \varepsilon_1 < x_1$, $x_1 < \varepsilon_2 < x_2$, ………. $X_{n-1} < \varepsilon_n < x_n$

Harga fungsi di titik-titik tersebut adalah: $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$, ……….. $f(\varepsilon_n)$, dan

$Sn = f(\varepsilon_1)\,\Delta\, x_1 + f(\varepsilon_2)\,\Delta\, x_2 + f(\varepsilon_3)\,\Delta\, x_3 + \ldots\ldots + f(\varepsilon_n)\,\Delta\, x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta\, x_i$

Jumlah demikian disebut jumlah integral fungsi f(x) pada selang (a, b).

Jika $n \to \infty$ maka jumlah integral fungsi dimungkinkan $\Delta x_i \to 0$

$$\text{Jadi } \lim_{\Delta x_i \to 0} Sn = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta\, x_i = S$$

Definisi:

Bila pada sembarang selang bagian dari (a, b) berlaku sedemikian rupa max. $\Delta x_i \to 0$ dan untuk setiap pilihan titik Δx_i dari selang (x_{i-1}, x_i), jumlah integral menuju suatu jawaban dan sama dengan limit S, maka limit ini disebut integral tertentu dari fungsi f(x) dalam selang (a, b).

Ditulis dengan lambang:

$$\int_a^b f(x)dx$$

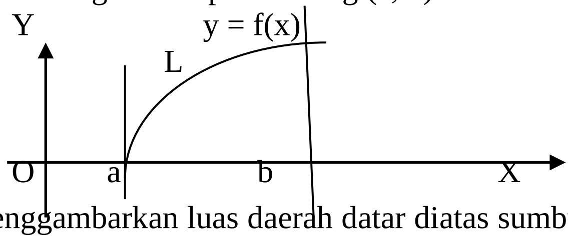
Ringkasnya: limit $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$\Delta x_i \to 0$

Bilangan a disebut limit bawah dari integral, bilangan b disebut limit atas dari integral . Selang (a, b) disebut selang integrasi dan x merupakan perubah dari integrasi.

Definisi:

Jika untuk fungsi f(x) limit itu ada, maka dapat dikatakan fungsi itu dapat diintegrasikan pada selang (a, b).



$\int_a^b f(x)\,dx$ menggambarkan luas daerah datar diatas sumbu x, dibatasi kurva y = f(x) , garis tegak x = a, x = b, dan sumbu x.

3. Sifat Dasar Integral Tertentu.

1) $\boldsymbol{\int_a^b k\, f(x)\, dx = \mathbf{k} \int_a^b f(x)\, dx}$

Bukti:

$\int_a^b k\, f(x)\, dx = \lim\limits_{\max.\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\ f(\varepsilon_i)\, \Delta x_i$

$= k \lim\limits_{\max.\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\, \Delta x_i$

$= k \int_a^b f(x)\, dx$

Jadi:

$$\boxed{\int_a^b k\, f(x)\, dx = \mathrm{k} \int_a^b f(x)\, dx}$$

2) $\boldsymbol{\int_a^b / f_1(x) + f_2(x) /\, dx = \int_a^b f_1(x)\ \mathbf{dx} + \int_a^b f_2(x)\ \mathbf{dx}}$

Bukti:

$\int_a^b / f_1(x) + f_2(x) /\, dx$

$= \lim\limits_{\max.\Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\varepsilon_1)\, \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\varepsilon_2)\, \Delta x_i \right]$

$= \lim\limits_{\max.\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\varepsilon_1)\, \Delta x_i + \lim\limits_{\max.\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\varepsilon_2)\, \Delta x_i$

$= \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$

Jadi:

$$\boxed{\int_a^b / f_1(x) + f_2(x) /\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx}$$

3) **Untuk tiga bilangan a, b, dan c dipenuhi:**

$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, \mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\, \mathrm{dx}}$ **dengan syarat bahwa ketiga integral ini ada.**

Bukti: $\sum_a^b f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i = \sum_a^c f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i + \sum_c^b f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i$ dimana $a < c < b$.

Selanjutnya dikenakan limit max. $\Delta x_i \to 0$, mendapatkan hasil:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, \mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\, \mathrm{dx}$$

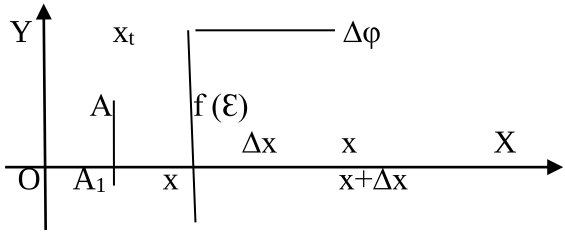
Jadi:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, \mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\, \mathrm{dx}}$$

4. Menilai Integral Tertentu

Rumus Newton-Leibniz: Pada Integral tertentu $\int_a^b f(x)\, dx$, misalkan batas bawah a tertentu sedang batas atas b berubah-ubah. Hanya integral turut berubah-ubah. Jadi integral merpakan fungsi dari pada limit atas.

Kita ambil limit atas dengan x dan perubah integrasi dengan t sehingga integral baru adalah: $\int_a^x f(t)\, dt$. Untuk a bilangan tetap, integral ini berupa fungsi dari limit atas x. Fungsi dapat ditulis: φ(x) = $\int_{a}^{x} f(t)\, dt$.



Jika f (t) bukan fungsi negative, maka besaran φ (x) berupa luas gambar A_1 A X_t yang merupakan fungsi x. Kemudian kita akan mencari derivative dari φ (x) menuju x atau derivative integral tertentu terhadap limit atas.

Teorema 1:

Bila f (x) fungsi kontinu dan φ (x) = $\int_{a}^{x} f(t)$ dt, maka mendapatkan persamaan: $\frac{d\varphi\,(x)}{dx}$ = f (x).

Bukti:

φ (x + Δ x) = $\int_{a}^{x+\Delta x} f(t)$ dt = $\int_{a}^{x} f(t)$ dt + $\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)$ dt

Pertambahan dari φ (x) ialah:

Δ φ = φ (x + Δ x) - φ (x)

= $\int_{a}^{x} f(t)$ dt + $\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)$ dt

= $\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)$ dt

Jadi: $\Delta\,\varphi = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt$

Mengingat: $\Delta\,\varphi = f\,(\mathcal{E})\,(x + \Delta\,x - x) = f\,(\mathcal{E}).\,\Delta\,x$ dimana $x < \mathcal{E} < x + \Delta\,x$, maka: $\frac{\Delta\,\varphi}{\Delta\,x} = \frac{f\,(\mathcal{E})\,.\Delta\,x}{\Delta\,x} = f\,(\mathcal{E})$

Jadi: $\varphi'\,(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\,\varphi}{\Delta\,x} = \lim_{\Delta x \to 0} f\,(\mathcal{E})$

Teorema 2:

Jika F(x) suatu antiderivatif dari fungsi kontinu f(x), maka:

$\int_a^b f\,(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Ini disebut Rumus NEWTON – LEIBNIZ.

Bukti:

F(x) dan F(x) + C

dua fungsi antiderivatif dari f (x) (kedua fungsi hanya berbeda pada bilangan tetap C)

$\int_a^x f\,(t)\,dt = F(x) + C$

Dan $\int_a^a f\,(t)\,dt = 0 = F(a) + C \;\rightarrow C = -\,F(a)$

$\int_a^x f\,(t)\,dt = F(x) - F(a)$

dengan mengubah x = b dan menggunakan rumus Newton – Leibniz diperoleh:

$\int_a^b f\,(t)\,dt = F(b) - F(a)$

atau mengganti variabel integrasi t dengan x

Mendapat: $\int_a^b f\,(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Kita ganti penulisan $F(b) - F(a) = [\,F(x)\,]_a^b$

Jadi:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [\ F(x)\ ]_a^b = F(b) - F(a)$$

Misal:

1) $\int_1^4 x^2\, dx =$

Penyelesaian:

$\int_1^4 x^2\, dx = [\ \frac{x^{2+1}}{2+1}\ ]_1^4$

$= (\frac{4^3}{3}) - (\frac{1^3}{3})$

$= 21.$

2) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2} =$

Penyelesaian:

$\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = [\ \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\ ]_1^4$

$= (\frac{4^{-1}}{-1}) - (\frac{1^{-1}}{-1})$

$= \frac{3}{4}$

3) $\int_0^{3/5} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

Penyelesaian:

$\int_0^{3/5} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\ -\sqrt{1-x^2}\ ]_0^{3/5}$

$= - \left(\sqrt{(1 - \frac{9}{25})} - 1 \right) \;=\; \frac{1}{5}\,.$

Atau: $1 - x^2 = t \rightarrow d(1 - x^2) = dt \rightarrow -2\,x\,dx = dt \rightarrow x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt$

$x = 0 \rightarrow t = 1$

$x = \frac{3}{5} \rightarrow t = \frac{4}{5}$

$$\int_0^{3/5} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{16/25} \frac{-\frac{1}{2}\,dt}{t^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{16/25} t^{-1/2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\,2\;t^{1/2}\,\right]_1^{16/25}$$

$$= -\left[\,\sqrt{t}\,\right]_1^{16/25}$$

$$= -\left[\,\frac{4}{5} - 1\,\right]$$

$$= \frac{1}{5}\,.$$

4) $\int_a^b \frac{dx}{x} =$

Penyelesaian:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\;\ln x\;\right]_a^b$$

$$= \ln b - \ln a$$

$$= \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

5) $\int_1^2 (4x + 6)\, dx =$

Penyelesaian:

$\int_1^2 (4x + 6)\, dx = [\, 2\, x^2 + 6\, x\ ]_1^2$

$= (8 + 12) – (2 + 6) = 12$

6) $\int_0^2 \sqrt{4\,x + 1}\ dx =$

Penyelesaian:

$\int_0^2 \sqrt{4\,x + 1}\ dx = ¼\ \int_0^2 (4\,x + 1)^{1/2}\, d(4x + 1)$

$= ¼\ .[\, 2/3\ (4\ x + 1)^{3/2}\ ]_0^2$

$= ¼\ (\, 2/3\ (\, 8 + 1\,)^{3/2} – 2/3\ (\, 0 + 1)^{3/2})$

$= ¼\ ((\, 2/3\ .\ 27) – (\, 2/3\ .\ 1)$

$= \frac{13}{3}$

5. Mengganti Variabel kedalam Integral Tertentu

Teorema:

Diketahui $\int_a^b f\,(x)$ dx dimana f (x) kontinu pada selang (a, b), masukkan perubah baru t melalui rumus x = φ (t).

Jika:
a) φ (α) = a, dan φ (β) = b
b) φ (t) dan φ' (t) = masing-masing kontinu pada (α, β)
c) f [φ (t)] terdefinisi dan kontinu pada selang (α, β),
maka: $\int_a^b f\ (x)$ dx = $\int_\alpha^\beta f$ (φ (t)) φ' (t) dt.

Bukti:
Umpama F (x) antiderivatif dari f (x), kemudian $\int f$ (x) dx = F(x) + C, dan
$\int f$ φ (t)) φ' (t) dt = + C.

Persamaan ini diuji melalui mendeferensir kedua ruas menuju t, kemudian ditulis atau ditambah batas a dan b.
$\int_a^b f$ (x) dx = [F (t) $]_a^b$ = F (b) – F (a)
$\int_\alpha^\beta f$ φ (t)) φ' (t) dt = F [φ (t) $]_\alpha^\beta$ = F (β) – F (α)
Misal:
1) Hitung $\int_0^r f\ \sqrt{r^2 - x^2}$ dx

Penyelesaian:
Perubah x diganti melalui x = r sin t → dx = r cos t dt
Jika x = 0 → 0 = r sin t → t = 0
x = r → r = r sin t → t = Л/2

Jadi:
$\int_0^r f\ \sqrt{r^2 - x^2}$ dx = $\int_0^{Л/2} \sqrt{r^2 - r^2 sin^2 t}$. r cos t dt

$$= \int_0^{Л/2} \sqrt{r^2(1 - sin^2 t)} \;.\; \text{r cos t dt}$$
$$= r^2 \int_0^{Л/2} \sqrt{cos^2 t} \;.\; \text{cos t dt}$$
$$= r^2 \int_0^{Л/2} cos^2 \text{ t dt} \quad \rightarrow \text{gunakan reduksi}$$
$$= r^2 \int_0^{Л/2} \frac{1 + cos\ 2t}{2} \text{ dt}$$
$$= \frac{r^2}{2} \left[\text{t} + \frac{1}{2} \text{sin 2 t} \right]_0^{Л/2}$$
$$= \frac{r^2}{2} ((Л/2 + \frac{1}{2} \text{sin 2 . } Л/2 \;) - (\; 0 + \frac{1}{2} \text{sin 2 . 0}))$$
$$= \frac{Л\, r^2}{4} \text{ adalah luas seperempat lingkaran dengan jari-jari r}$$

2) Hitung $\int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2}$

Penyelesaian:

Ambil x = 2 tan t $\rightarrow$ dx = $\frac{2}{cos^2 t}$ dt

$4 + x^2$ = 4 + 4 $\tan^2$ t = 4 (1 + $\tan^2$ t) = 4 $\sec^2$ t

x = 0 $\rightarrow$ 0 = 2 tan t $\rightarrow$ t = 0

x = 2 $\rightarrow$ 2 = 2 tan t $\rightarrow$ t = Л/4

Jadi:

$$\int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2} = \int_0^{Л/4} \frac{2\, dt}{4\, sec^2 t\; cos^2 t}$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{Л/4} \frac{dt}{sec^2 t\; cos^2 t}$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{Л/4} \text{dt}$$
$$= \frac{1}{2} \left[\text{ t } \right]_0^{Л/4}$$
$$= \frac{Л}{8}.$$

6. Integral Tertentu pada Integral Parsial

Umpama u dan v masing-masing fungsi dari x maka: (u v)' = u'v + u v'
Kedua ruas diintegrir dengan batas-batas a ke b, sehingga:

$$\int_a^b (u\,v)'\,dx = \int_a^b u'\,v\,dx + \int_a^b u\,v'\,dx$$

Karena $\int_a^b (u\,v)'\,dx = u\,v + C$, maka $\int_a^b (u\,v)'\,dx = [\,u\,v\,]_a^b$

Jadi: $[\,u\,v\,]_a^b = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du$, atau

$$\int_a^b u\,dv = [\,u\,v\,]_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\int_a^b u\,dv = \left[\,u\,v\,\right]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Misal:

1) Hitung $\int_2^e \ln x\,dx$

Penyelesaian:

$u = \ln x \;\rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$v = x \;\rightarrow dv = dx$

Jadi: $\int_2^e \ln x\,dx = [\,x \ln x\,]_2^e - \int_2^e x\,\frac{1}{x}\,dx$

$= [\,x \ln x\,]_2^e - [\,x\,]_2^e$

$= e \ln e - 2 \ln 2 - e + 2$

$= e \ln e - e + 2(1 - \ln 2)$

2) Hitung $\int_{\text{Л}}^{0} x \cos x\,dx$

Penyelesaian:

$u = x \rightarrow du = dx$

$\cos x\ dx = dv \rightarrow d \sin x = dv \rightarrow \sin x = v \rightarrow \int u\, dv = u\, v - \int u\, dv$

Jadi: $\int_{Л}^{0} x \cos x\ dx = [\, x \sin x\ ]_{Л}^{0} - \int_{Л}^{0} \sin x\ dx$

$= [\, x \sin x\ ]_{Л}^{0} + [\, \cos x\ ]_{Л}^{0}$

$= (\, 0 \sin 0 - Л \sin Л) + (\, \cos 0 - \cos Л)$

$= (0 - 0) + (1 - (-1))$

$= 2$

B. INTEGRAL TIDAK SEBENARNYA

1. Integral dengan Limit Tak Berhingga.

Umpama f (x) didefinisi dan kontinu untuk semua x dalam selang

$a \leq x \leq +\infty$, dan I (b) = $\int_{a}^{b} f(x)\ dx$, maka integral ini mempunyai arti tiap b > a perubahannya mengikuti b. Jadi sebagai fungsi b yang kontinu.

Definisi:

Bila ada suatu limit berhingga untuk $\lim\limits_{b \rightarrow +\infty} f(x)\, dx$, maka limit ini disebut :

Integral tak sebenarnya dari fungsi f (x) pada selang (a, + ∞), ditulis dengan lambang: $\int_{a}^{+\infty} f(x)\ dx$

Menurut definisi: $\int_{a}^{+\infty} f(x)\ dx = \lim\limits_{b \rightarrow +\infty} \int_{a}^{b} f(x)\ dx$

Integral tersebut disebut **<u>Konvergen</u>** apabila ada, sebaliknya disebut **<u>Divergen</u>** apabila hasil integral tidak ada.

Misal:

1) Selesaikan $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

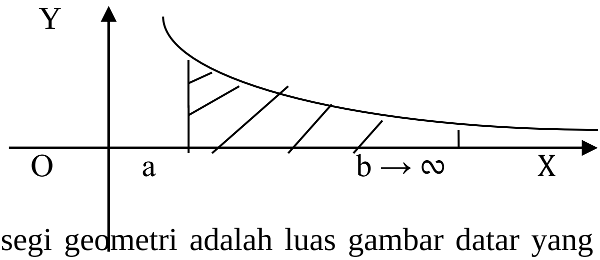
Penyelesaian:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right)$$

$= 1$ (Integral ini disebut konvergen).



Ditinjau dari segi geometri adalah luas gambar datar yang diarsir yaitu dibatasi kurva $y = \frac{1}{x^2}$, sumbu x, garis tegak x = 1, dan x = b kemudian bergerak menuju 1 + ∞.

2) Hitung $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Penyelesaian:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} [\text{ arc tan x }]_a^0 + \lim_{b \to +\infty} [\text{ arc tan x }]_0^b$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (\text{arc tan } 0 - \text{arc tan a}) + \lim_{b \to +\infty} (\text{arc tan b} - \text{arc tan } 0)$$

$$= + \frac{Л}{2} + \frac{Л}{2} = = Л \quad \text{(Integral konvergen).}$$

3) Hitung $\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^2-x+3}\, dx$

Penyelesaian:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^2-x+3}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{d(x^2-x+3)}{x^2-x+3}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{d(x^2-x+3)}{x^2-x+3}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} [\ln / x^2 - x + 3 /]_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (\ln / b^2 - b + 3 / - \ln / 1^2 - 1 + 3 /)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (\ln / b^2 - b + 3 / - \ln 3)$$

$$= + \infty \quad \text{(Integral divergen)}$$

Teorema 1:

Apabila untuk semua x ≥ a berlaku ketidaksamaan $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ dan apabila $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ adalah konvergen, maka $\int_a^{+\infty} f$ (x) dx juga konvergen dan $\int_a^{+\infty} f$ (x) dx $\leq$ $\int_a^{+\infty} \varphi$ (x) dx .

Misal:

Selidiki konvergensi integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(\,1+e^x\,)}$

Penyelesaian:

Untuk x ≥ 1 maka: $\frac{1}{x^2(\,1+e^x\,)} < \frac{1}{x^2}$

$$\text{Sedangkan } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{d\,x}{x^2}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right)$$

$$= 1$$

Jadi: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(\,1+e^x\,)}$ juga konvergen dan nilainya kurang dari 1.

Teorema 2:

Apabila untuk semua x ≥ a, berlaku ketidaksamaan: 0 ≤ φ (x) ≤ f (x) dan apabila $\int_1^{+\infty} \varphi$ (x) dx adalah divergen, maka integral $\int_1^{+\infty} f$ (x) dx juga divergen.

Misal:

Selidiki konvergen / divergen untuk $\int_1^{+\infty} \frac{x\,+\,1}{\sqrt{x^3}}$ dx

Penyelesaian:

Untuk x ≥ 1 berlaku hubungan: $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Untuk $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{d\,x}{\sqrt{x^3}}$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[2\sqrt{x} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(2\sqrt{b} - 2\sqrt{1} \right)$$

$$= +\infty$$

Jadi: $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}$ dx adalah divergen.

Teorema 3:

Jika $\int_a^{+\infty} /f(x)/$ dx konvergen, → $\int_a^{+\infty} f(x)$ dx juga konvergen.

Misal:

Selidiki konvergen / divergen untuk integral $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}$ dx

Penyelesaian:

Integran $\frac{\sin x}{x^3}$ adalah fungsi bergantian tanda maka: $/ \frac{\sin x}{x^3} / \leq \frac{1}{x^3}$, Sedangkan $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{d\,x}{x^3}$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{-1}{2\,x^2} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{2\,b^2} - \frac{-1}{2\,.1^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Jadi: $\int_{a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}$ dx juga konvergen.

2. Integral dari Fungsi Diskontinu

Fungsi f (x) didefinisikan dan kontinu pada selang a $\leq$ x $\leq$ C dan tidak didefinisikan atau diskontinu untuk x = C. Pada keadaan demikian tidak dapat diselesaikan $\int_{a}^{c} f\,(x)$ dx sebagai limit jumlah integral, sebab f (x) diskontinu dalam selang (a, c) dan untuk alas an ini limitnya tidak ada.

Integral $\int_{a}^{c} f\,(x)$ dx dari fungsi f (x) dimana diskontinu pada titik x = C didefinisikan sebagai berikut:

$$\int_{a}^{c} f\,(x)\,dx = \lim_{b \to C^-} \int_{a}^{b} f\,(x)\,dx$$

Jika limit dari ruas kanan ini ada, integral diatas disebut integral tak sebenarnya yang konvergen dan sebaliknya jika limitnya tidak ada disebut divergen. Apabila f (x) diskontinu pada titik x = a, maka didefinisikan:

$$\int_{a}^{c} f\,(x)\,dx = \lim_{b \to a^+} \int_{a}^{c} f\,(x)\,dx$$

Apabila f (x) diskontinu disembarang titik x = x_0 dalam selang (a, c) dimana a < x_0 < c, didefinisikan:

$$\int_{a}^{c} f\,(x)\,dx = \int_{a}^{x_0} f\,(x)\,dx + \int_{x_0}^{c} f\,(x)\,dx$$ dengan ketentuan bahwa ruas kanan mempunyai limit berhingga.

Misal:

1) Hitung $\int_{0}^{1} \frac{d\,x}{\sqrt{1-x}}$ dx

Penyelesaian:

f (x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ diskontinu pada titik x = 1

Jadi: $\int_0^1 \frac{d\,x}{\sqrt{1-x}}$ dx = limit $\int_0^b \frac{d\,x}{\sqrt{1-x}}$
$b \to 1^-$

= - limit $[\,2\sqrt{1-x}\,]_0^b$
$b \to 1^-$

= limit - ($2\sqrt{1-b}$ - $2\sqrt{1-0}$) = 2
$b \to 1^-$

2) Hitung $\int_{-1}^{+1} \frac{d\,x}{x^2}$

Penyelesaian:

f (x) = $\frac{1}{x^2}$ diskontinu pada titik x = 0

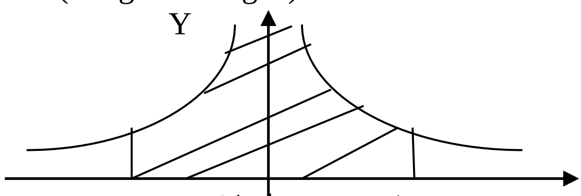
$\int_{-1}^{+1} \frac{d\,x}{x^2}$ = lim $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ + lim $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$
$\varepsilon_1 \to 0^-$ $\varepsilon_2 \to 0^+$

= limit $[-\frac{1}{x}]_{-1}^{\varepsilon_1}$ + limit $[-\frac{1}{x}]_{\varepsilon_2}^{1}$
$\varepsilon_1 \to 0^-$ $\varepsilon_2 \to 0^+$

= limit ($\frac{-1}{\varepsilon_1}$ + 1) + limit $(-1 + \frac{1}{\varepsilon_2})$
$\varepsilon_1 \to 0^-$ $\varepsilon_2 \to 0^+$

= ∞ (Integral divergen)

Catatan:



Seandainya dihitung langsung $\int_{-1}^{+1} \frac{d\,x}{x^2}$ = $[-\frac{1}{x}]_{-1}^{1}$ = - 2 , Ini tidaklah benar, sebab sumbu y merupakan asimtot dimana didekati menjulang ke atas, sehingga luas gambar tidak dapat ditentukan luasnya dengan menggunakan limit.

Teorema 4:

Apabila dalam selang (a, c) fungsi f (x) dan φ (x) masing-masing diskontinu pada titik x = c dan pada semua titik lain dari selang itu φ (x) dipenuhi φ (x) $\geq$ f (x), sedangkan $\int_a^c \varphi$ (x) dx konvergen, maka $\int_a^c f\ (x)$ dx juga konvergen.

Teorema 5:

Apabila f (x) fungsi yang bergantian tanda dalam selang (a, c) dan diskontinu pada x = c, sedangkan integral tidak sebenarnya $\int_a^c /f$ (x) $/$ dx dari nilai mutlak fungsinya itu konvergen a, maka

$\int_a^c f\ (x)$ dx juga konvergen.

Misal:

Apakah integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+ 4\,x^3}$ dx konvergen

Penyelesaian:

Integran adalah diskontinu pada titik x = 0 dari selang (0, 1). Bandingkan fungsi ini dengan fungsi f (x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$, maka:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+ 4\,x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}} \text{, dan } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{a \to 0^+} 2\ [\ \sqrt{x}\ ]_a^1$$

$$= \lim \ \ (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}$$

$a \to 0^+$

$= 2$ adalah konvergen,

maka: $\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}$ juga konvergen.

BAB IV
APLIKASI INTEGRAL TERTENTU

A. LUAS GAMBAR DATAR

1. Menggunakan Koordinat Ortogonal

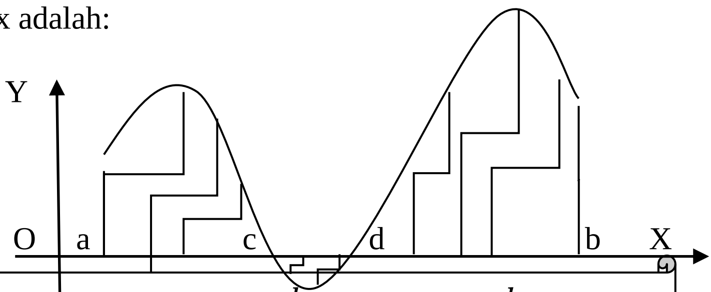
Apabila pada selang (a, b) fungsi f (x) ≥ 0, maka luas gambar dibatasi kurva y = f (x), garis-garis tegak x = a, x = b, dan sumbu x adalah:

$$\text{Luas} = \int_a^b f\ (x)\ dx\ ,\ \text{jika}\ \ f\ (x) \geq 0$$

Jika f (x) ≤ 0, maka integral tertentu $\int_a^b f$ (x) dx juga ≤ 0, maka luas gambar dibatasi kurva y = f (x), garis-garis tegak x = a, x = b, dan sumbu x adalah:

$$\text{Luas} = -\int_a^b f\ (x)\ dx\ ,\ \text{jika}\ \ f\ (x) \leq 0$$

Jika f (x) dalam selang (a, b) merupakan perubahan tanda positip dan negatip (lihat gambar), maka luas gambar dibatasi kurva y = f (x), garis-garis tegak x = a, x = b, dan sumbu x adalah:



$$\text{Luas} = \int_a^c f\ (x)\ dx\ - \int_c^d f\ (x)\ dx + \int_d^b f\ (x)\ dx$$

Misal:

Hitung luas gambar datar dibatasi kurva : $y = x^3 + x^2 - 2x$ dan sumbu x.

Penyelesaian:

$y = x^3 + x^2 - 2x$

$= x(x + 2)(x - 1)$

Perlu diselidiki kapan kurva ada diatas sumbu x dan dibawah sumbu x.

Untuk itu diselidiki tanda-tanda positip-negatif y.

Pakai garis bilangan:

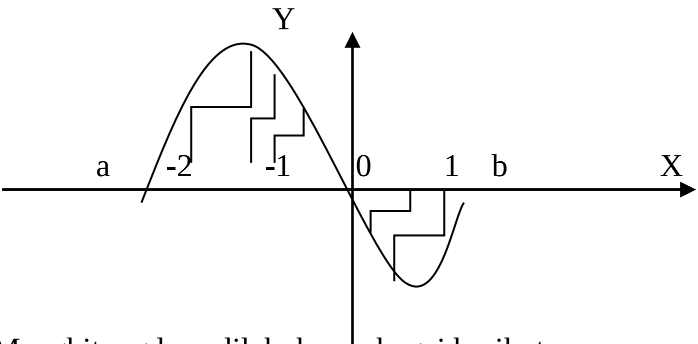
- - | + + + | - - | + +

-2 **0** **1**

tanda positip y : $y > 0$ untuk $-2 < x < 0$ dan $x > 1$

tanda negatip y : $y < 0$ untuk $x < -2$ dan $0 < x < 1$

Maka luas gambar dibatasi kurva $y = f(x)$, garis-garis tegak $x = a$, $x = b$, dan sumbu x adalah:



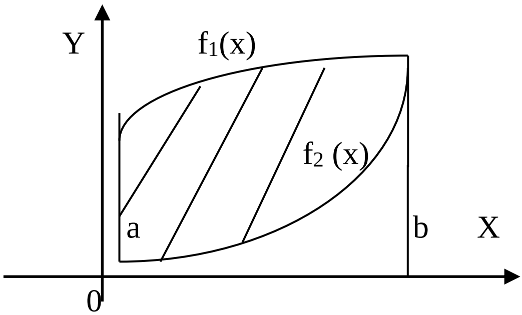
Menghitung luas dilakukan sebagai berikut:

$$\text{Luas} = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{5}{12}$$
$$= 3\,\frac{1}{12}$$

Apabila kita akan menghitung luas gambar dibatasi kurva $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ordinat $x = a$, dan $x = b$, dan umpama $f_1(x) \geq f_2(x)$, seperti pada gambar:



Maka luasnya adalah:

$$\text{Luas} = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx$$
$$= \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

Misal:

1) Cari luas gambar datar dibatasi kurva $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$

Penyelesaian:

Dicari titik potong dari $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$

$\rightarrow x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x^4 = x$

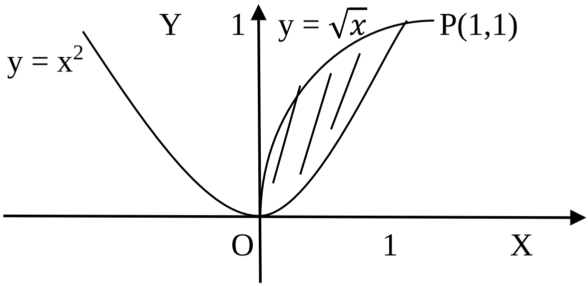
$\rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

$x_1 = 0$ dan $x_2 = 1$

$x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0 \rightarrow$ titik O(0,0)

$x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \rightarrow$ titik P(1,1)

diperoleh titik potong dua fungsi di O(0,0) dan P(1,1)



Jadi: luas gambar datar dibatasi kurva $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$ adalah:

$$\text{Luas} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

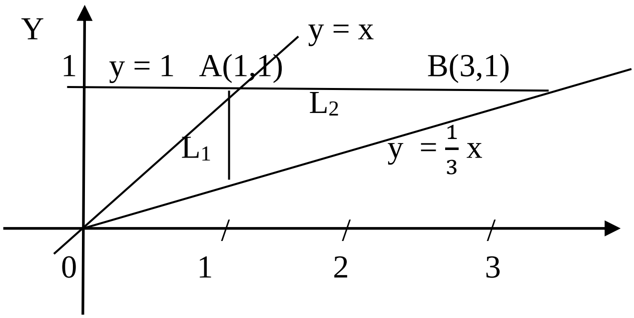
2) Cari luas gambar datar dibatasi garis-garis $y = x$, $y = \frac{1}{3}x$, dan $y = 1$.

Penyelesaian:

Dicari titik potong dari $y = x$ dan $y = \frac{1}{3}x \rightarrow O\,(0,0)$

Titik potong dari $y = x$ dan $y = 1 \rightarrow A(1,1)$

Titik potong dari $y = \frac{1}{3}x$ dan $y = 1 \rightarrow B(3,1)$



Jadi: Luas = $L_1 + L_2$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}x \right) dx + \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{3}x \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^2 \right]_0^1 + \left[x - \frac{1}{6}x^2 \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{6}$$

$$= 1$$

Cara lain:

Luas = $\int_0^1 (3y - y)\, dy$

$$= \int_0^1 (2y)\, dy$$

$$= \left[y^2 \right]_0^1$$

$$= 1$$

2. Menggunakan Fungsi Parameter

Luas gambar datar dibatasi kurva dalam fungsi parameter $x = \varphi(t)$, $y = \text{Ų}(t)$ dimana $\alpha \leq t \leq \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Dari rumus luas = $\int_a^b f\ (x)\, dx$.

$y = f(x) = f\,[\,\varphi(t)\,] = \text{Ų}(t)$

$dx = \varphi'(t)\, dt$

Jadi: Luas = $\int_a^b f\ (x)\, dx$

$= \int_\alpha^\beta f\ [\,\varphi(t)\,]\ \varphi'(t)\ dt$

$= \int_\alpha^\beta \text{Ų}(t)\, \varphi'(t)\ dt$

$$\boxed{\text{Luas} = \int_\alpha^\beta \text{Ų}(t)\, \varphi'(t)\ dt}$$

Misal:

1) Cari luas elips dengan persamaan x = cos t, y = b sin t.

Penyelesaian:

x bergerak dari – a ke + a, jadi parameter t bergerak dari t =Л ke t = 0.

Luas elips $= 2 \int_{\text{Л}}^{0} b \sin t\, (-a \sin t)\, dt$

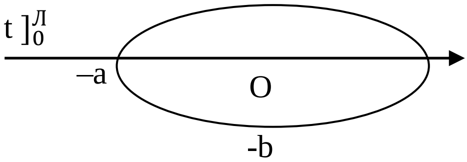
$= -2ab \int_{\text{Л}}^{0} \sin^2 t\, dt$

$= 2ab \int_0^{\text{Л}} \sin^2 t\, dt$

$= ab \int_0^{\text{Л}} (1 - \cos 2t)\ dt$

$= a\,b\ \left[\, t - \frac{1}{2} \sin 2\,t \,\right]_0^{\text{Л}}$

$= \text{Л}\ a\,b.$



2) Buktikan luas lingkaran dengan persamaan parameter x = Л cos t, y = Л sin t sama dengan Л r^2.

Penyelesaian:

x = Л cos t , dx = - r sin t dt

y = Л sin t ,

x bergerak dari – r ke + r, jadi parameter t bergerak dari t =Л ke t = 0.

Luas lingkaran $= \int_a^b\ y\ dx$

$= 2 \int_1^0\ r \sin t\,(-\,r \sin t)\,dt$

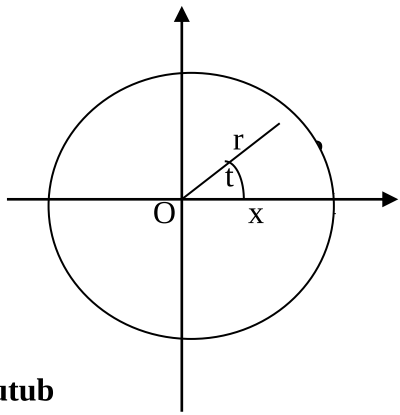
$= -\,2\,r^2 \int_{\text{Л}}^0\ \sin^2 t\,dt$

$= 2\,r^2 \int_0^{\text{Л}}\ \sin^2 t\,dt$

$= r^2 \int_0^{\text{Л}}\ (1 - \cos 2\,t)\,dt$

$= r^2 \left[\, t - \frac{1}{2} \sin 2\,t \,\right]_0^{\text{Л}}$

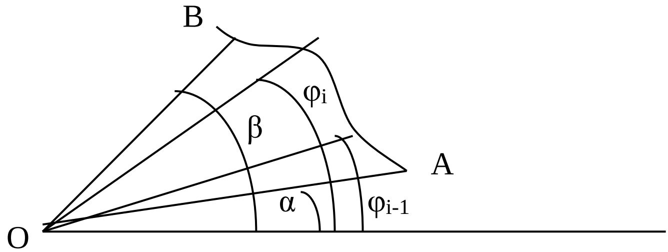
$= \text{Л}\ r^2.$



3. Menggunakan Koordinat Kutub

Umpama dalam sistem koordinat polar ditentukan persamaan kurva: r = f (φ), dimana f (φ) fungsi kontinu untuk $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Akan dihitung luas L dari gambar dibatasi oleh jari-jari pengantar dengan sudut $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, dan kurva tersebut (L = luas OAB).



Sumbu kutub

Bagilah daerah datar oleh jari-jari pengantar dengan menempatkan pembagian sudut dalam n bagian,

$\alpha = \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_{i-1}, \varphi_i, \ldots\ldots \varphi_n = \beta$

$\Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$

Tempatkan sembarang jari-jari pengantar r_i dalam sudut pusat $\Delta \varphi_i$.

Luas sector lingkaran bagian sudut pusat $\Delta \varphi_i$ dan jari-jari r_i adalah:

$\Delta L_i = \frac{1}{2} r_i^{\;}. \ \Delta \varphi_i$

Jumlah luas sector-sektor lingkaran yang ada:

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 . \Delta \varphi_i$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)^2 \cdot \Delta \varphi_i$$

Karena jumlah ini adalah jumlah integral dari fungsi $r^2 = [\,f(x)\,]^2$

Dalam selang $\alpha \le \varphi \le \beta$, maka jumlah limitnya untuk $n \to \infty$ adalah:

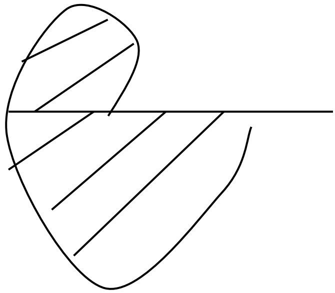
Limit $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\, f\ (\varphi_i)\ ]^2 \cdot \Delta\ \varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2\ (\varphi_i)\ d\varphi$

$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\ \ d\varphi$

Misal:

1) Cari luas spiral Archimedes r = a φ (a > 0) dibatasi jari-jari r dari φ = 0 hingga φ = 2 Л

Penyelesaian:



r = a φ

Luas = $\frac{1}{2}\int_{0}^{2Л} r^2\ \ d\varphi$

$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} a^2\ \varphi^2\ \ d\varphi$

$= \frac{1}{2}\,[\ \frac{1}{3}\,\varphi^2\ ]_0^{2Л}$

$= \frac{4}{3}$ Л a^3

.

2) Cari luas daerah yang tertutup oleh Folium Descartes dengan persamaan: $x^3 - 3\ a\ x\ y + y^3 = 0$

Penyelesaian:

x + y + a = 0 merupakan asimtot.

Substitusi x = r cos φ dan y = r sin φ pada persamaan:

$x^3 - 3\ a\ x\ y + y^3 = 0 \rightarrow$

$(r \cos\varphi)^3 - 3\ a\ (r\cos\varphi)(r \sin\varphi) + (r\sin\varphi)^3 = 0$

$r = \frac{3\,a \sin\varphi \cos\varphi}{sin^3\varphi + cos^3\varphi}$

Daerah tertutup (bagian yang diarsir)

Mempunyai batas jari-jari pengantar

Dengan sudut φ = 0 hingga φ = $\frac{Л}{2}$

Luas = $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2$ dφ

$= \frac{9}{2}$ a^2 $\int_0^{2Л} \frac{3\, a \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{(sin^3\varphi + cos^3\varphi)^2}$ dφ

$= \frac{9}{2}$ a^2 $\int_0^{2Л} \frac{\tan^2\varphi \;\; d(\tan\varphi)}{(tan^3\varphi + 1)^2}$

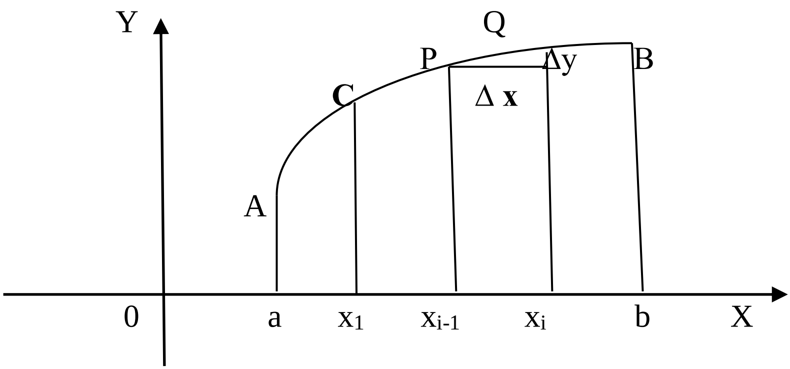
$= [\frac{3}{2}$ a^2 - $\frac{1}{tan^3\varphi + 1}$ $]_0^{2Л}$

$= \frac{3}{2}$ a^2

B. PANJANG BUSUR KURVA

1. Panjang Busur Kurva Datar dalam Koordinat Orthogonal

Diketahui y = f (x) persamaan kurva dalam koordinat orthogonal.
Akan dicari panjang busur AB antara dua garis tegak x = a dan x = b.



Selang (a, b) dibagi dalam n bagian dengan menempatkan titik bagi:

$a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_{i-1}, x_i, \ldots\ldots. x_n = b$

Titik bagi pada kurva yang sesuai dengan titik pada sumbu x, kita hubungkan berurutan garis patah: AC ……PQ……B

Segmen garis PQ ujumg-ujungnya dengan absis x_{i-1} dan x_i mempunyai panjang: PQ = $\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

Selanjutnya kita lihat fungsi y = f)x) dan turunan y' kontinu pada (a, b);

Jumlah garis patah AC ……..PQ……..B sama dengan:

$$AB = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Menurut teorema pertengahan harga:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$= f'(\xi_i) \quad \text{dimana } x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Umpama PQ = ΔS_i maka:

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

Jadi panjang busur yang antara x = a dan x = b adalah:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Jika fungsi diketahui dalam persamaan parameter:

$x = x(t)$

y = y (t) maka dicari dahulu: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, sehingga:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ dx$$

$$= \int_{ta}^{tb} \sqrt{1 + (\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}})^2 \cdot \frac{dx}{dt}} \cdot\ dt$$

$$= \int_{ta}^{tb} \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{dx}{dt}}} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot\ dt$$

$$= \int_{ta}^{tb} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\ dt$$

Jadi panjang busur dalam persamaan parameter adalah:

$$S = \int_{ta}^{tb} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\ dt$$

Misal:

1) Cari keliling lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

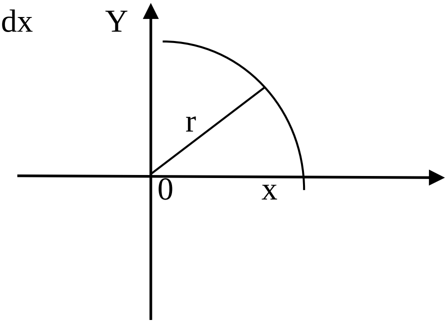
Penyelesaian:

$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\frac{1}{4} S = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ dx$$

$= \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\ dx$



$= \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ dx$

$= \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$

$= [\ r \text{ arc sin } \frac{x}{r}\ ]_0^r$

Jadi: $\frac{1}{4}$ S = r . $\frac{Л}{2}$

→ S = 2 Л r

2) Cari keliling lingkaran x = r cos t dan y = r sin t.

Penyelesaian:

x = r cos t → $\frac{dx}{dt}$ = - r sin t

y = r sin t → $\frac{dy}{dt}$ = r cos t

$\frac{1}{4}$ S = $\int_0^{\frac{Л}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$

$= \int_0^{\frac{Л}{2}} \sqrt{r^2\, sin^2 t + r^2 cos^2 t}\ dt$

$= \int_0^{\frac{Л}{2}} r\ dt$

$= r\ [\ t\ ]_0^{\frac{Л}{2}}$

Jadi: $\frac{1}{4}$ S = r . $\frac{Л}{2}$

→ S = 2 Л r

2. Panjang Busur Kurva Datar Koordinat Kutub

Jika kurva dengan persamaan $r = f(\varphi)$ maka hubungan koordinat polar dan koordinat orthogonal adalah:

$$x = r \cos \varphi \rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \rightarrow \frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi\right)^2$$

$$S^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2$$

Jadi: $S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\, d\varphi$

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\, d\varphi$$

Misal:

1) Cari panjang busur kardioda $r = a(1 + \cos \varphi)$

Penyelesaian:

$r = a(1 + \cos \varphi) \rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -a \sin \varphi$

φ bergerak dari $\varphi = 0$ hingga Л memperoleh setengah panjang busur.

Jadi: S = $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2}$ dφ

S = 2 $\int_0^{\text{Л}} \sqrt{(-\text{ a sin } \varphi\ )^2 + a^2(1 + \cos\varphi)^2}$ dφ

= 2 $\int_0^{\text{Л}} \sqrt{a^2 sin^2\varphi + a^2(1 + 2\cos\varphi + cos^2\varphi)}$ dφ

= 2 $\int_0^{\text{Л}} \sqrt{a^2(sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + cos^2\varphi)}$ dφ

= 2 a $\int_0^{\text{Л}} \sqrt{(2 + 2\cos\varphi)}$ dφ

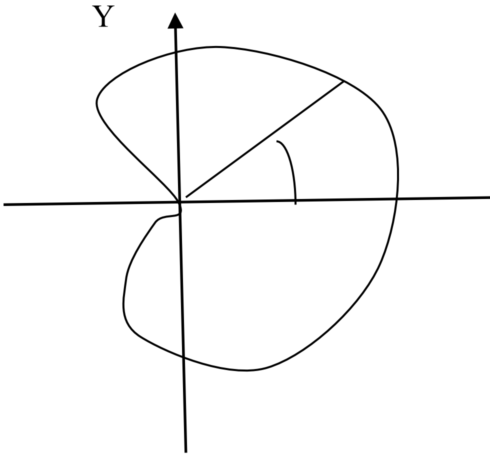
= 2 a $\int_0^{\text{Л}} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}$ dφ

= 2 a $\int_0^{\text{Л}} \sqrt{2(2\, cos^2 \frac{1}{2}\ \varphi)}$ dφ

= 4 a $\int_0^{\text{Л}} \cos\frac{1}{2}\ \varphi$ d φ

= $[\ 8 \text{ a sin } \frac{\varphi}{2}\ ]_0^{\text{Л}}$

= 8 a



2) Cari panjang busur lingkaran r = 2 a cos φ

Penyelesaian:

r = 2 a cos φ $\rightarrow \frac{dr}{d\varphi}$ = - 2 a sin φ

φ bergerak dari φ = 0 hingga $\frac{\text{Л}}{2}$ memperoleh setengah keliling lingkaran.

Jadi: S = $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2}$ dφ

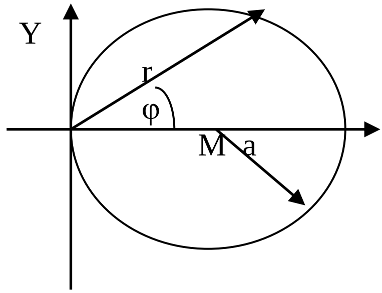
S = 2 $\int_0^{\frac{\text{Л}}{2}} \sqrt{(-\text{ 2 a sin } \varphi\ )^2 + (\text{ 2 a cos } \varphi\ )^2}$ dφ

$$S = 2\int_0^{\frac{Л}{2}} \sqrt{4\,a^2 sin^2\varphi + \ 4\,a^2 cos^2\varphi}\quad d\varphi$$

$$= 4\,a\ \int_0^{\frac{Л}{2}} d\varphi$$

$$= 4\,a\,[\ \varphi\ ]_0^{\frac{Л}{2}}$$

$$= 2\ Л\ a$$

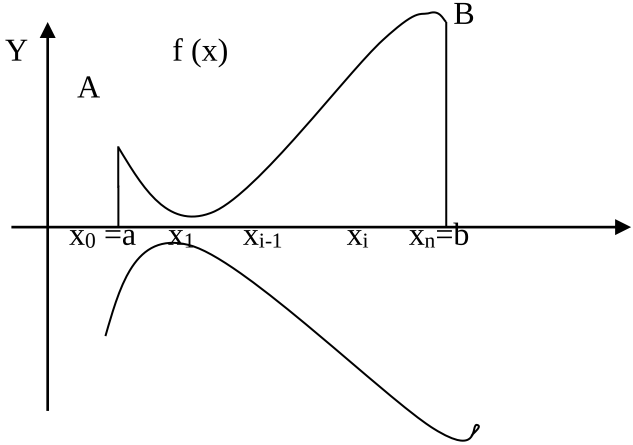


C. BENDA PUTARAN

1. Menghitung Isi Benda Putaran

Suatu gambar datar dibatasi kurva $y = f\ (x)$, $x = a$, $x = b$, dan sumbu x.

Fungsi $y = f\ (x)$ kontinu pada selang (a, b).



Bagilah selang (a, b) dalam n bagian dengan meletakkan titik bagi $x_0 = a$, x_1, x_2, …….. x_{i-1} , x_i ,,,,,, $x_n = b$
Umpama ξ_i titik pada selang bagian (x_{i-1} , x_i) jadi $x_{i-1} < \xi_i < x_i$
Persegi panjang φ lebar $\Delta x_i = (x_{i-1}, x_i)$ dan tinggi $f(\xi_i)$ jika berputar keliling sumbu x :
Isinya = $\Delta v_i = \pi [f(\xi_i)]^2 . \Delta x_i$
Jadi jumlah isi semacam ini adalah: $\sum_{i=1}^{n} \pi [f(\xi_i)]^2 . \Delta x_i$
Untuk $n \to \infty$ maka max. $\Delta x_i \to 0$ mendapat isi benda putaran:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

Misal:

1) Hitung isi bola dengan jari-jari r

Penyelesaian:

Lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ kita putar keliling sumbu x, dimulai dari x = - r hingga x = + r.

$$\begin{aligned} \text{Isi bola} &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} y^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \tfrac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r} \\ &= \pi \left(r^3 - \tfrac{1}{3} r^3 \right) - \pi \left(-r^3 + \tfrac{1}{3} r^3 \right) \\ &= \tfrac{2}{3} \pi r^3 + \tfrac{2}{3} \pi r^3 \\ &= \tfrac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

2) Bidang segitiga dibatasi garis $\frac{x}{r} + \frac{y}{t} = 1$ dan kedua sumbu koordinat. Hitung isinya apabila diputar:
   a. Keliling sumbu x
   b. Keliling sumbu y.

Penyelesaian:

a. Isi bidang segitiga dibatasi garis $\frac{x}{r} + \frac{y}{t} = 1$ dan kedua sumbu koordinat apabila diputar mengelilingi sumbu x:

Isi $= Л \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$

$$= Л \int_a^b y^2 \, dx$$

$$= Л \int_0^r t^2 \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2 dx$$

$$= Л \int_0^r t^2 \left(1 - 2\frac{x}{r} + \frac{x^2}{r^2}\right) dx$$

$$= Л \int_0^r \left(t^2 - 2\frac{t^2x}{r} + \frac{t^2x^2}{r^2}\right) dx$$

$$= Л \left[t^2 x - \frac{t^2x^2}{r} + \frac{t^2x^3}{3r^2}\right]_0^r$$

$$= Л \left(t^2 r - \frac{t^2r^2}{r} + \frac{t^2r^3}{3r^2}\right) - 0$$

$$= Л \left(t^2 r - t^2 r + \frac{1}{3} t^2 r\right)$$

$$= \frac{1}{3} Л \, t^2 r$$

b. Isi bidang segitiga dibatasi garis $\frac{x}{r} + \frac{y}{t} = 1$ dan kedua sumbu koordinat apabila diputar mengelilingi sumbu y:

Isi = $\pi \int_c^d [f(y)]^2\, dy$

$= \pi \int_c^d x^2\, dy$

$= \pi \int_0^t r^2 \left(1 - \frac{y}{t}\right)^2 dy$

$= \pi \int_0^t r^2 \left(1 - 2\frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2}\right) dy$

$= \pi \int_0^t \left(r^2 - 2\frac{r^2 y}{t} + \frac{r^2 y^2}{t^2}\right) dy$

$= \pi \left[r^2 y - \frac{r^2 y^2}{t} + \frac{r^2 y^3}{3t^2} \right]_0^t$

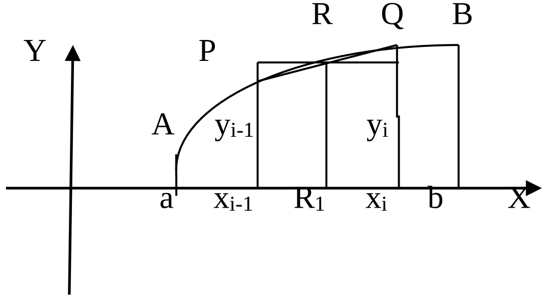
$= \pi \left(r^2 t - \frac{r^2 t^2}{t} + \frac{r^2 t^3}{3t^2} \right) - 0$

$= \pi \left(r^2 t - r^2 t + \frac{1}{3} r^2 t \right)$

$= \frac{1}{3} \pi r^2 t$

2. Menghitung Luas Benda Putar

Jika fungsi y = f (x)kontinu pada selang [a, b], dan dan f (x) $\geq$ 0 dalam selang tersebut, dan jika kurva y = f (x) diputar sekeliling sumbu x, maka terjadilah benda putar.



Menentukan berapa luas benda putar, dapat dilakukan sebagai berikut. Bagilah selang [a, b] dalam bagian dengan titik bagi:

$a = x_0, \; x_1, \; x_2, \; \ldots\ldots x_{i-1}, \; x_i, \; \ldots, x_n = b.$

Pada kurva diletakkan titik-titik yang mempunyai absis sesuai dengan pembagian $x_0, \; x_1, \; \ldots\ldots, x_n.$

Umpama P (x_{i-1}, y_{i-1}) dan Q (x_i, y_i),

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$
$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

Pada putaran keliling sumbu x garis PQ melukis permukaan kerucut dengan jari-jari y_i dan y_{i-1} dan tinggi Δx_i .

Luas (PQ) = Л luas garis PQ diputar keliling sumbu x

= Л $(y_i - y_{i-1})$.

PQ (ini sesuai rumus luas mantel kerucut =

Л $(r_1 + r_2)$. a). Л $(y_i - y_{i-1})$. PQ = 2 Л RR_1. PQ,

dimana R tengah-tengah PQ.

Karena $RR_1 = \dfrac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$ dan

$PQ = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ maka luas PQ adalah:

Luas (PQ) =

$$2Л.\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Karena f (x) kontinu pada [a, b], maka:

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} = f(\xi_i) \text{ dimana } x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

Jika derivative f (x) yaitu f ‘ (x) kontinu pada [a, b], maka menurut teorema pertengahan harga:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \text{ dengan}$$

$x_{i-1} \leq \xi_i' \leq x_i$

Jumlah luas garis patah A → P, Q → B, adalah:

$\sum_{i=1}^{n} 2\ \pi\ \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$2\ \pi \sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i)\ \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\ \Delta x_i$

Jika $n \to \infty$ sedang max. $\Delta x_i \to 0$ didapat:

Max. limit $2\ \pi\ \sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i)\ \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\ \Delta x_i$

$\Delta x_i \to 0$

$= 2\ \pi \int_a^b f\ (x)\ \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ dx. Jadi:

Luas benda putaran = $2\ \pi \int_a^b f\ (x)\ \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ dx

Luas benda putaran = $2\ \pi \int_a^b f\ (x)\ \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ dx

Misal:

1) Hitung luas bidang bola berjari-jari r

Penyelesaian:

Bidang bola terjadi dari lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ diputar pada sumbu x.

$$x^2 + y^2 = r^2 \ \to y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Luas benda putaran = $2\ \pi \int_a^b f\ (x)\ \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ dx

$$= 2\ \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ \sqrt{1 + \left\{\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right\}^2}\ dx$$

$$= 2\ \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ dx$$

$$= 2\,Л \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\,Л \int_{-r}^{r} r\, dx$$

$$= 2\,Л\ [\, r\,x\,]_{-r}^{r}$$

$$= 2\,Л\ .\ 2\,r^2$$

$$= 4\,Л\ r^2$$

2) Hitung luas mantel kerucut yang mempunyai jari-jari alas r, tinggi t dan apotema a.

Penyelesaian:

Persamaan garis $\frac{x}{r} + \frac{y}{t} = 1$

$$\rightarrow x = r\ (1 - \frac{y}{t}) \rightarrow \frac{dx}{dy} = -\ \frac{r}{t}$$

$\rightarrow$ x = r (1 - $\frac{y}{t}$) diputar keliling sumbu y dengan rumus:

$$\text{Luas} = 2\,Л \int_{c}^{d} f\ (y) \sqrt{1 + \{f'(y)\}^2}\ dy$$

$$= 2\,Л \int_{0}^{t} r\ (1 - \frac{y}{t}) \sqrt{1 + \{-\frac{r}{t}\}^2}\ dy$$

$$= 2\,Л \int_{0}^{t} r\ (1 - \frac{y}{t})\ \frac{\sqrt{t^2 + r^2}}{t}\ dy$$

$$= 2\,Л \int_{0}^{t} r\ (1 - \frac{y}{t})\ \frac{a}{t}\ dy$$

$$= \frac{2\,Л\,a\,r}{t}\ [\, y - \frac{y^2}{2\,t}\,]_{0}^{t}$$

$$= \frac{2\,Л\,a\,r}{t}\ .\ \frac{t}{2}$$

$$= Л\,a\,r$$