



A. INDIKATOR

1. Memahami operasi hitung penjumlahan dengan menggunakan bantuan alat peraga kartu bilangan bermuatan dan garis bilangan.
2. Memahami operasi hitung pengurangan dengan menggunakan bantuan alat peraga kartu bilangan bermuatan dan garis bilangan.
3. Memahami operasi hitung perkalian dengan menggunakan bantuan alat peraga kartu bilangan bermuatan dan garis bilangan.
4. Memahami operasi hitung pembagian dengan menggunakan bantuan alat peraga kartu bilangan bermuatan dan garis bilangan.

B. TUJUAN

1. Setelah mempelajari bahan ajar ini anda diharapkan memahami operasi hitung penjumlahan dengan menggunakan bantuan alat peraga kartu bilangan bermuatan dan garis bilangan.
2. Setelah mempelajari bahan ajar ini anda diharapkan memahami operasi hitung pengurangan dengan menggunakan bantuan alat peraga kartu bilangan bermuatan dan garis bilangan.
3. Setelah mempelajari bahan ajar ini anda diharapkan memahami operasi hitung perkalian dengan menggunakan bantuan alat peraga kartu bilangan bermuatan dan garis bilangan.

4. Setelah mempelajari bahan ajar ini anda diharapkan memahami operasi hitung pembagian dengan menggunakan bantuan alat peraga kartu bilangan bermuatan dan garis bilangan.

C. DESKRIPSI MATERI

1. Konsep Bilangan Bulat

Bilangan adalah sebuah konsep yang kompleks dan multi bentuk (Walle, 2002). Pemahaman yang kaya akan bilangan yang merupakan pemahaman rerasional. Berbicara tentang bilangan maka tidak terlepas dari membilang. Membilang adalah memberitahu berapa banyak anggota di dalam sebuah himpunan. Bilangan juga berhubungan satu sama lainnya melalui bermacam-macam operasi. Sebagai contoh bilangan 6 adalah lebih dari 5, tiga krangnya dari 9. Ada berbagai macam kategori bilangan, mulai dari bilangan kompleks sampai bilangan prima. di antara bilangan tersebut tidak asing bagi kita aadalah bilangan bulat. Dari bilangan bulat diturunkan bilangan negatif dan bilangan cacah. Bilangan cacah menurunkan bilangan asli dan bilangan nol. Terakhir bilangan asli menurunkan bilangan prima, ganjil, genap, dan bilangan komposit. Pada kesempatan berikutnya kita akan membicarakan mengenai bilangan bulat dan operasinya. Dengan mengetahui tentang bilangan bulat, maka anda juga diyakini akan memahami bilangan yang lain turunan dari bilangan bulat.

Bilangan-bilangan bulat memuat ide tentang lawan dalam bilangan, sehingga setiap bilangan mempunyai ukuran positif dan negatif atau hubungan negatif dengan bilangan lain. Bilangan negatif adalah lawan dari bilangan positif dengan ukuran yang sama. Himpunan bilangan bulat dapat dikelompokkan

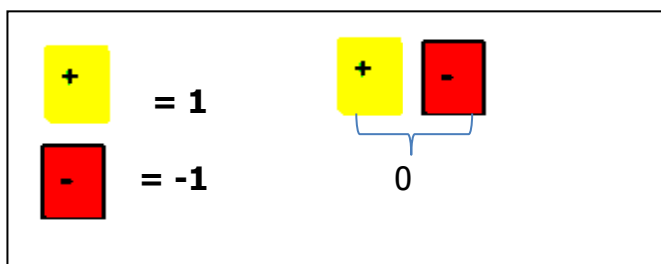
menjadi tiga himpunan bagian, yaitu bilangan bulat positif $\{1,2,3,4,5,\dots\}$, nol $\{0\}$, dan Bilangan bulat negatif $\{\dots,-5,-4,-3,-2,-1\}$.

2. Alat Peraga Operasi Hitung Bilangan Bulat

Sering kita jumpai kasus bahwa siswa sekolah dasar, bahkan siswa sekolah menengah ke atas sekalipun mengalami kesulitan dalam melakukan operasi hitung bilangan bulat. Kesulitan yang sangat sering dialami adalah ketika berhadapan dengan soal operasi hitung bilangan bulat yang melibatkan bilangan negatif atau pada operasi pengurangan, di mana bilangan yang kedua lebih dari bilangan pertama. Sebagai contoh adalah ketika siswa harus mengoperasikan $2 - 4$, mayoritas siswa merespon hasilnya adalah 2, bahkan ada yang menjawab bahwa $2-4$ tidak bisa diselesaikan. Pada penjelasan berikutnya kita akan membahas mengenai model yang digunakan untuk operasi bilangan bulat dan cara penerapannya dalam pembelajaran untuk mengatasi masalah yang telah disebutkan di atas.

Dua model yang populer untuk membantu siswa memahami operasi bilangan bulat. Model yang pertama sering kita kenal dengan nama kartu bilangan bermuatan positif dan negatif. Model ini ditandai dengan adanya dua kartu, yaitu satu kartu bermuatan positif dan satu kartu bermuatan negatif. Untuk menandai dua kartu tersebut berikutnya kita sepakati dua warna untuk mewakili masing-masing positif dan negatif. Dalam penggunaan kartu bilangan ini, maka guru harus menjelaskan dulu kepada siswa mengenai aturan penggunaannya. Adapun beberapa aturan Penggunaan Kartu Bilangan bermuatan adalah sebagai berikut:

- Kartu bilangan bermuatan ini terdiri dari dua warna (boleh warna apa saja) yaitu kartu warna kuning menunjukkan bilangan positif, sedangkan kartu warna merah menunjukkan bilangan negatif.
- Untuk satu kartu warna kuning bernilai +1 dan untuk satu kartu warna merah bernilai -1
- Untuk sebuah kartu yang kuning (positif) dipasangkan dengan kartu yang merah maka hasilnya adalah nol (0)
- Untuk tanda operasi, jika tanda operasi penjumlahan (+), maka kartu bertambah dari semula. Jika tanda operasi pengurangan (-), maka kartu berkurang dari semula.
- Berikut ini ada beberapa contoh Ilustrasi penggunaan kartunya penjumlahan yaitu:



Model lain yang digunakan untuk memahami operasi bilangan adalah garis bilangan. Model ini agak bersifat tradisional dan bersifat matematis. Bilangan-bilangan positif dan negatif diukur dengan arah kekanan dan kekiri dari titik 0. Dengan ketentuan bahwa bilangan negatif berada disebelah kiri nol dan bilangan positif berada di sebelah kanan nol. Seperti halnya pada kartu bilangan, maka pada garis bilangan juga perlu dijelaskan aturan

penggunaannya. Adapun beberapa aturan Penggunaan garis bilangan adalah sebagai berikut:

- 1) Arah panah/gambar orang mula-mula berada pada posisi bilangan 0 dan menghadap ke arah bilangan positif.
- 2) Aturan tanda bilangan.
 - Bilangan positif (+) berarti menunjukkan bahwa arah panah/boneka maju sebanyak bilangan yang tertera.
 - Bilangan negatif (-) berarti menunjukkan bahwa arah panah/boneka mundur sebanyak bilangan yang tertera.
- 3) Aturan Operasi
 - Operasi Penjumlahan (+) berarti arah panah/boneka tetap seperti semula.
 - Operasi Pengurangan (-) berarti arah panah/boneka berubah. Jika sebelumnya kekanan maka menjadi kekiri, begitu juga sebaliknya.



Meskipun dua model tersebut nampak sangat berbeda, keduanya mirip secara matematis. Mengenai model mana yang paling cocok digunakan, maka kedua model tersebut cocok untuk diterapkan. Jika demikian asumsi kita, maka penjelasan berikutnya akan menjelaskan bagaimana cara penerapan kedua model tersebut dalam penyelesaian soal untuk bilangan bulat.

2.1 Penggunaan Kartu Bilangan Bermuatan pada Operasi Bilangan Bulat

2.1.1 Penggunaan Kartu Bilangan pada Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

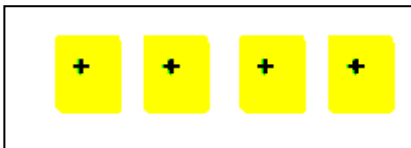
Operasi Hitung Penjumlahan Bilangan Bulat

Berikut ini akan diperagakan beberapa bentuk penjumlahan bilangan bulat.

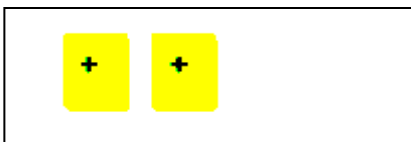
1. Penjumlahan bilangan positif dengan bilangan positif.

$$4 + 2 = \dots?$$

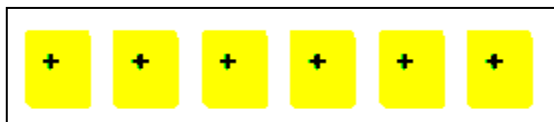
a. Tempatkan 4 kartu warna kuning



b. Tambahkan 2 kartu warna kuning lagi.



c. berdasarkan point a dan b diperoleh jumlah semua kartu warna kuning adalah ada 6 buah kartu.

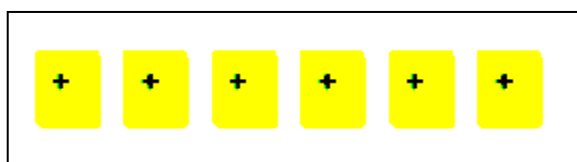


Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $4 + 2 = 6$

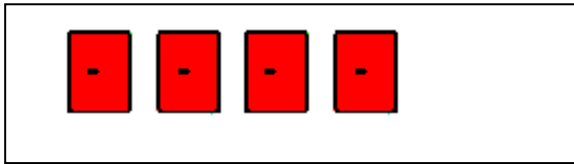
2. Penjumlahan bilangan positif dengan bilangan negatif.

$$6 + (-4) =$$

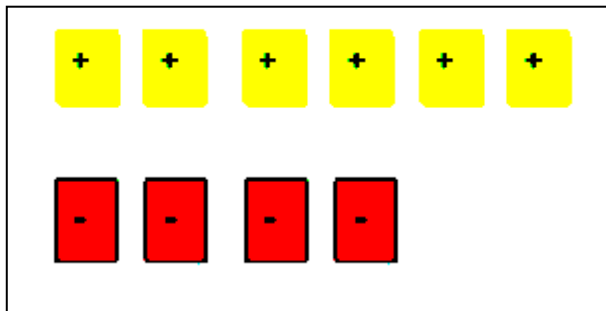
a. Tempatkan 6 kartu warna kuning



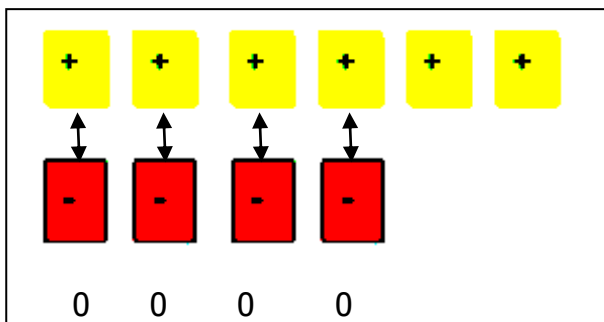
b. Tambahkan 4 kartu warna merah



c. Berdasarkan point a dan b diperoleh jumlah kartu adalah sebagai berikut



d. Karena ada dua jenis kartu (kartu kuning-kartu merah), lalu pasangkan kartu-kartu tersebut untuk pasangan kartu kuning dan kartu merah, nilainya adalah 0 (nol).



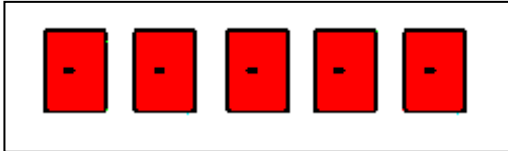
Dari hasil pemasangan kartu diketahui bahwa ada 2 kartu yang tidak ada pasangan, yaitu kartu kuning.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $6 + (-4) = 2$

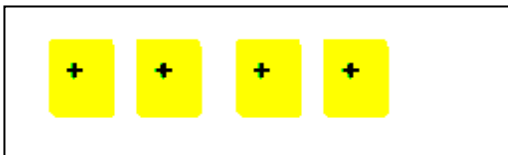
3. Penjumlahan bilangan negatif dengan bilangan positif

$$-5 + 4 = \dots?$$

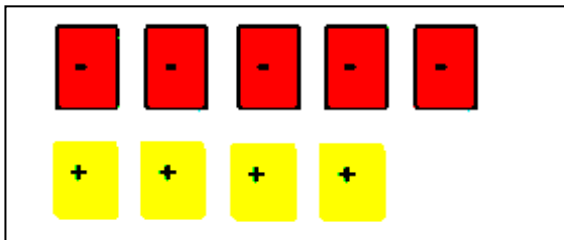
- a. Tempatkan 5 kartu warna merah



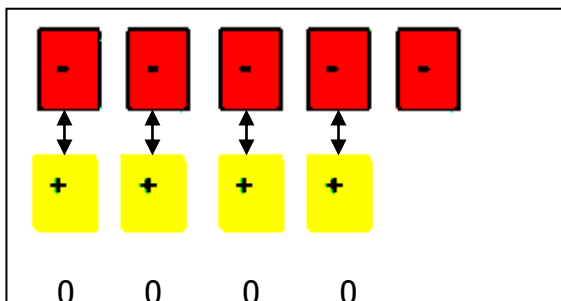
- b. Tambahkan 4 kartu warna kuning



- c. Berdasarkan point a dan b diperoleh jumlah kartu adalah sebagai berikut



- d. Lalu pasangkan kartu-kartu tersebut untuk pasangan kartu kuning dan kartu merah nilainya adalah 0 (nol)



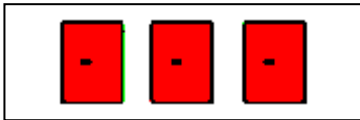
Dari hasil pemasangan kartu diketahui bahwa ada 1 kartu yang tidak ada pasangan, yaitu kartu merah.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $-5 + 4 = -1$

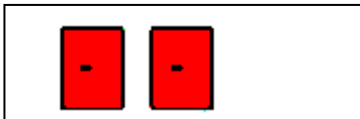
4. Penjumlahan bilangan bulat negative dengan bilangan bulat negatif

$$(-3) + (-2) = \dots ?$$

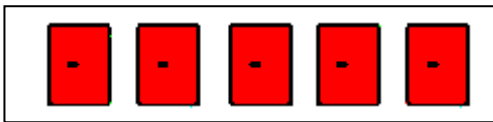
- a. Tempatkan 3 kartu warna merah



- b. Tambahkan lagi 2 kartu warna merah



- c. Berdasarkan point a dan b diperoleh jumlah kartu adalah sebagai berikut



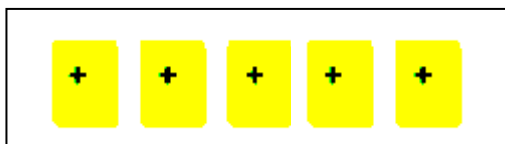
Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(-3) + (-2) = -5$

Operasi Hitung Pengurangan Bilangan Bulat

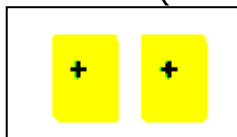
1) Pengurangan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat positif.

$$5 - 2 = \dots ?$$

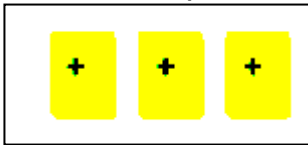
- a. Sediakan 5 kartu warna kuning



- b. Lalu ambil (hilangkan) 2 kartu warna kuning



c. berdasarkan point b, diperoleh siswa kartu warna kuning sebagai berikut.

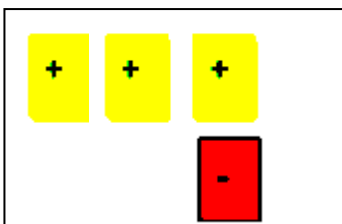


Dengan demikian dapat disimpulkan $5 - 2 = 3$

2) Pengurangan bilangan bulat positif, dimana bilangan kedua lebih dari dari bilangan pertama

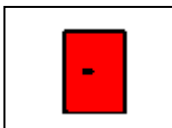
$$2 - 3 = \dots$$

a. Sediakan kartu sebagai berikut



Nilainya tetap sama, yaitu 2

b. Dari kartu yang telah tersedia pada point a, maka ambilkan 3 kartu warna kuning, sehingga kartu yang tersisa adalah satu kartu merah.

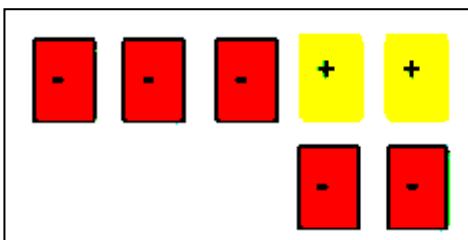


Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $2 - 3 = -1$

3) Pengurangan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat positif

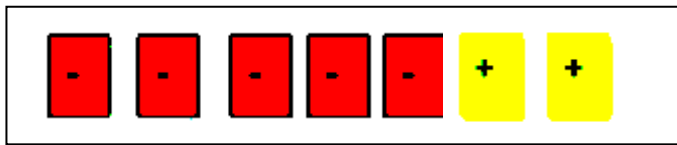
$$-3 - 2 = \dots$$

a. Sediakan kartu seperti berikut ini.

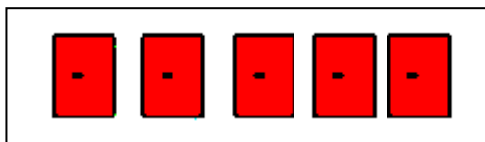


Nilainya tetap sama, yaitu -3

- b. Dari point a dapat diketahui ada 5 kartu berwarna merah dan 2 kartu berwarna kuning



- c. Dari kartu yang tersedia pada point b, lalu buang/hilangkan 2 kartu berwarna kuning

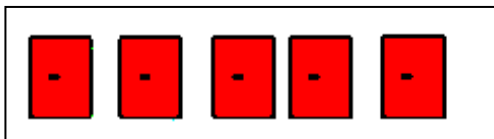


Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $-3 - 2 = -5$

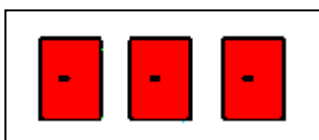
4) Pengurangan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif.

$$-5 - (-3) = \dots\dots$$

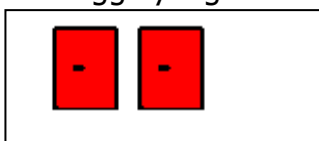
- a. Letakkan/Sediakan 5 kartu berwarna merah



- b. Lalu hilangkan 3 kartu berwarna merah



- c. Sehingga yang tersisa adalah 2 kartu berwarna merah

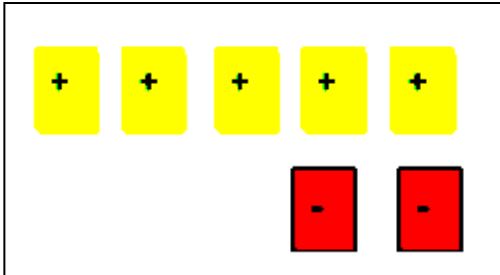


Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $-5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

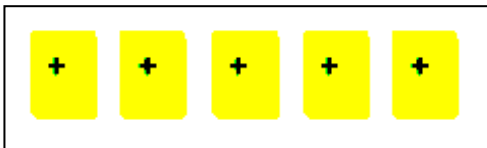
5) Pengurangan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif

$$3 - (-2) = \dots$$

- a. Sediakan kartu seperti berikut ini untuk mendefinisikan 3.



- b. Dari kartu yang tersedia pada point a, lalu buang/hilangkan 2 kartu merah. Sehingga kartu yang tersisa adalah 5 kartu kuning.



Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$

2.2 Penggunaan Kartu Bilangan pada Operasi Perkalian dan Pembagian Bilangan Bulat.

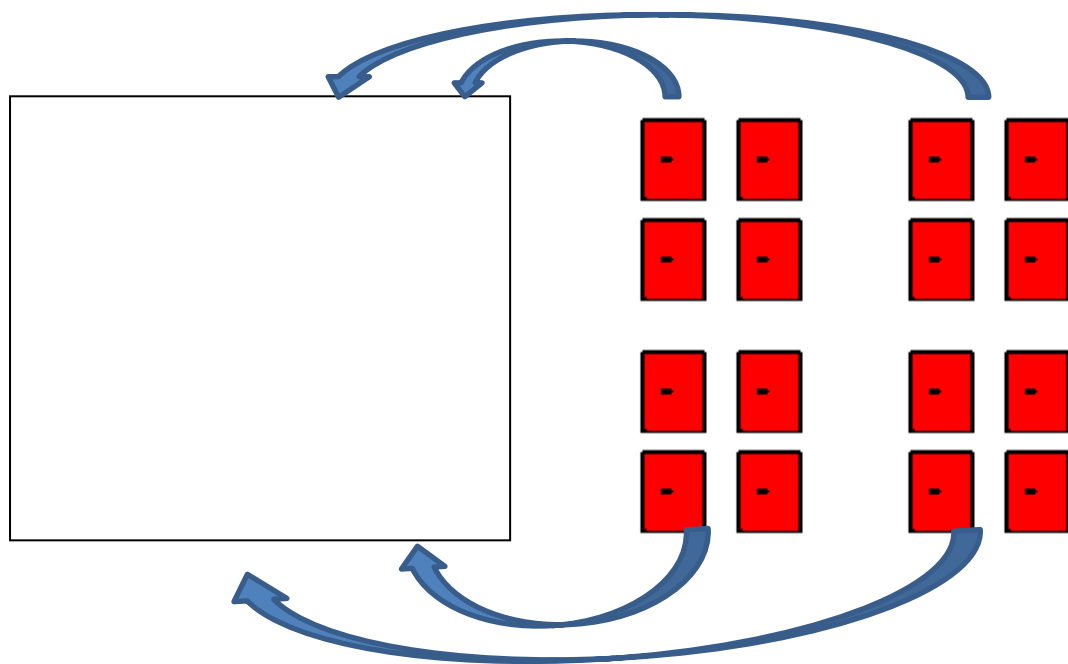
Perkalian bilangan bulat.

Perkalian bilangan bulat seharusnya merupakan perluasan langsung dari perkalian bilangan asli, seperti halnya penjumlahan dan pengurangan yang dikaitkan dengan konsep bilangan asli. Kita sering memandang perkalian bilangan asli sebagai penjumlahan berulang. Faktor pertama menyatakan banyak himpunan (set) yang ada atau berapa banyak dijumlahkan, mulai dari 0. Hal ini dapat diberlakukan pada perkalian bilangan bulat jika faktor pertamanya adalah positif dan apapun tanda dari faktor kedua. Bagaimana jika

kasus berikutnya adalah faktor pertamanya negatif. Menurut Walle (2002:244) Dalam hal ini jika faktor pertama negatif berarti pengulangan berulang (berapa kali dikurangkan dari 0). Berikut ini pemodelan perkalian bilangan bulat dengan menggunakan kartu bilangan.

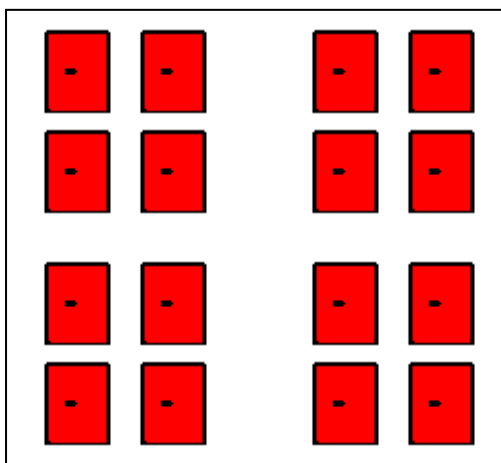
a) $4 \times -4 = \dots?$

Empat kelompok positif dari -4 berarti membuat empat kelompok dari -4 (4 kartu merah) atau menambahkannya ke no.



Mulai dengan nol

tambahkan "4 set kartu merah (-4)



Hasil : ada 12 kartu merah

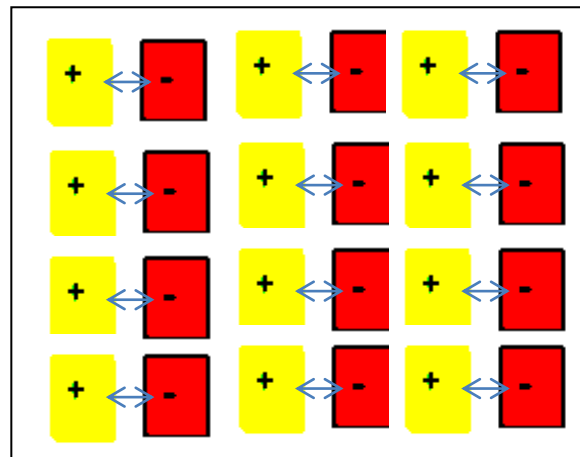
Dengan demikian $4 \times -4 = -16$

b) $-3 \times -4 = \dots?$

Tiga kelompok negatif dari -4 berarti 3 set dari -4 kurang dari 0 atau dengan makna yang lebih sederhana membuang 3 kelompok -4 dari 0. Untuk itu kita perlu menunjukkan 0 dengan 12 kartu negatif.

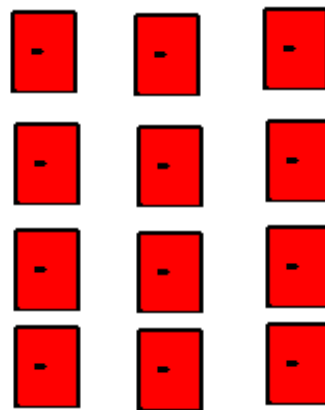
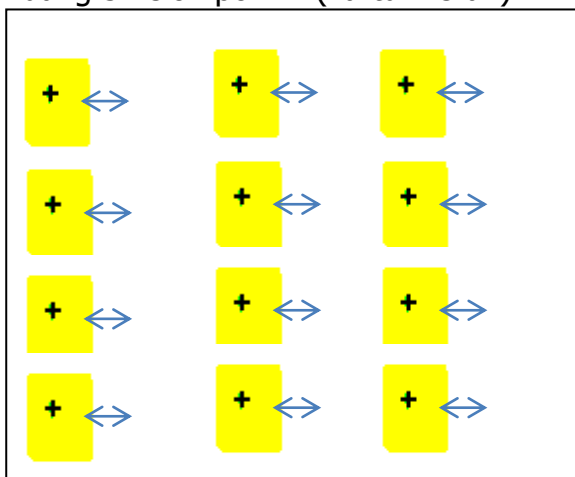


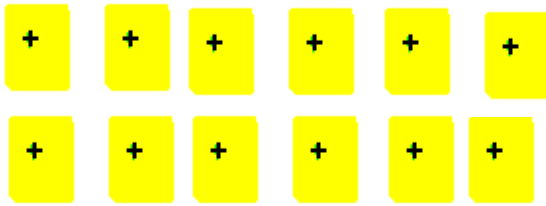
Mulai dengan 0



ini masih bernilai nol

Buang 3 kelompok -4 (kartu merah)





Hasil: 12 Kartu kuning. Jadi $-3 \times -4 = 12$

Pembagian Bilangan Bulat

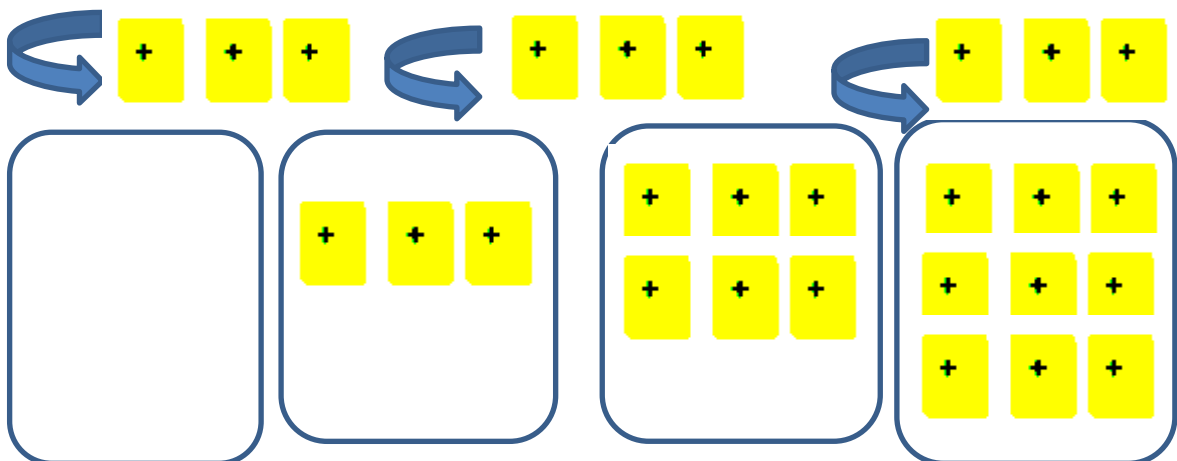
Untuk pembagian bilangan bulat, pertama-tama kita ingat kembali pembagian bilangan asli. Sebagai contoh $8 : 4$ dengan bilangan asli mempunyai dua arti, yaitu Dua ekspresi faktor hilang:

1. $4 \times \dots = 8$, menanyakan "Empat himpunan apa yang akan menghasilkan Delapan.
2. $\dots \times 4 = 8$, menanyakan berapa banyak empat yang akan menghasilkan delapan.

Dari dua ekspresi di atas, maka umumnya pernyataan no.2 ($\dots \times 4 = 8$) yang sering digunakan untuk pembagian bilangan bulat. Berikut ini akan diberikan ilustrasi mengenai kedua model tersebut dapat digunakan untuk pembagian bilangan bulat.

$$9 : 3 = \dots?$$

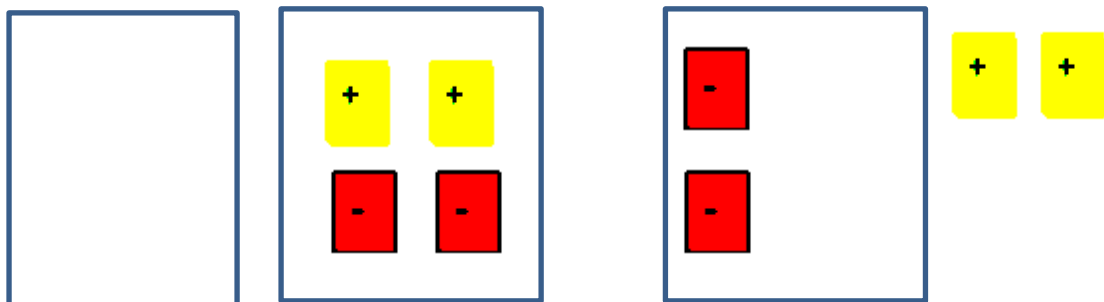
Berapa banyak himpunan 3 yang akan membuat sebuah himpunan berisi 9?



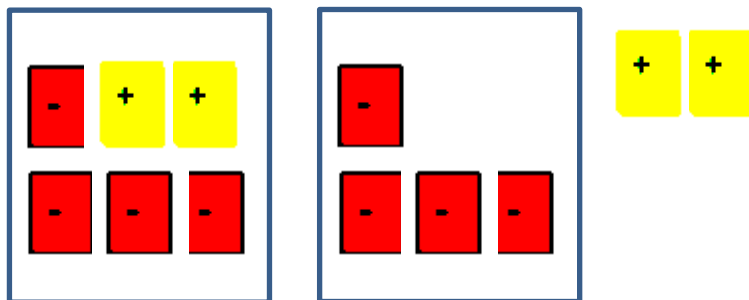
Berdasarkan ilustrasi dapat disimpulkan bahwa perlu 3 himpunan 3 untuk membuat 9. Dengan demikian $9:3 = 3$. Atau dengan pemahaman yang lebih sederhana berapa banyak kelompok yang berisi 3 yang dapat dibuat dari 9.

$-8 : 2 = \dots\dots?$

Dari bentuk operasi di atas dapat kita pahami bahwa berapa banyak himpunan 2 akan membuat -8? Sebagai informasi bahwa jika kita menambahkan +2 dengan nol (2 pasangan kartu) sebanyak sebuah bilangan positif akan menghasilkan jumlah yang positif. Jika +2 ditambahkan sebanyak bilangan negatif (dikurangkan secara berulang), maka hasilnya akan negatif.

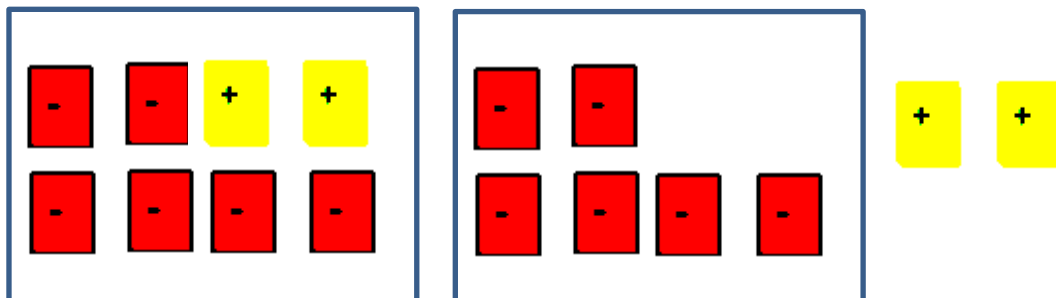


Tambah dua pasang netral Ambil 1himpunan kartu kuning



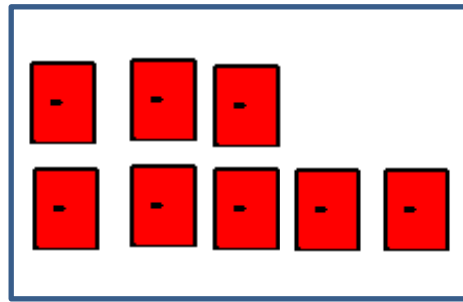
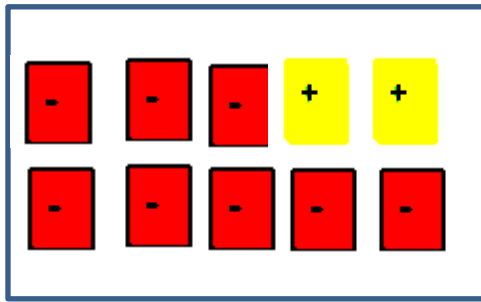
Ulangi

Ambil satu himpunan kartu kuning ke 2.



Ulangi

Ambil himpunan kartu kuning ke 3



Ulangi

ambil set ke 4

Berdasarkan ilustrasi di atas, -4 kali kita "tambah" +2 untuk mendapat -8.

2.3 Penggunaan Garis Bilangan pada Operasi Bilangan Bulat

2.3.1 Operasi Penjumlahan dan pengurangan

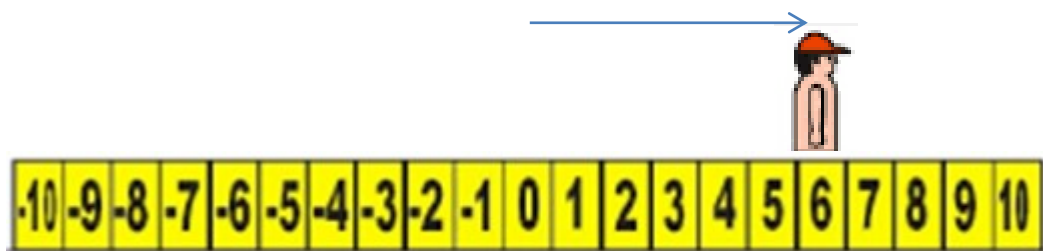
Contoh:

a. $6 + (-2) = \dots?$

Langkah pertama adalah letakkan boneka pada garis bilangan pada posisi 0 dan menghadap ke arah bilangan positif.

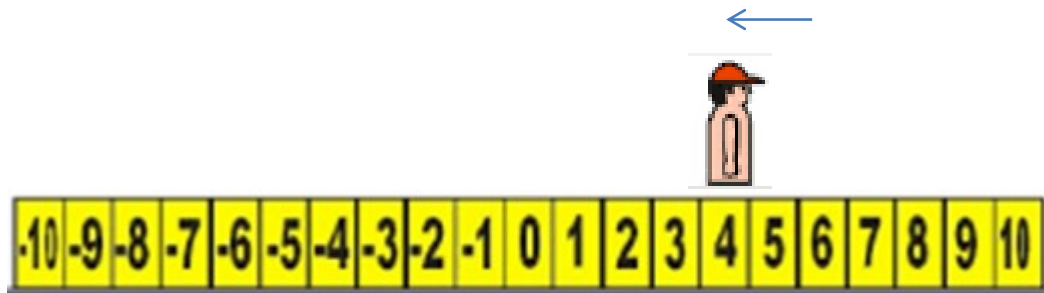


Langkah kedua maju 6 langkah ke arah bilangan positif



Langkah ketiga, perhatikan tanda operasi, karena penjumlahan, maka arah boneka tetap seperti pada langkah 2. Berikutnya kita perhatikan bahwa operasi

penjumlahan dengan bilangan negatif, maka boneka tadi mundur sebanyak 2 langkah. Posisi boneka sekarang dapat dilihat pada sketsa gambar berikut.



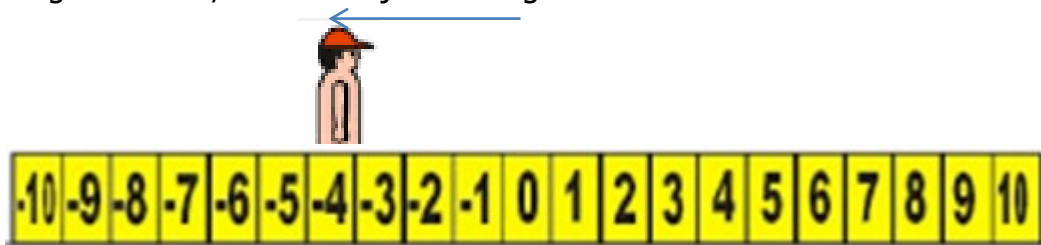
Berdasarkan ilustrasi kita dapatkan bahwa boneka berada pada angka 4. Dengan demikian $6 + (-2) = 4$.

b. $-4 - (-2) = \dots\dots?$

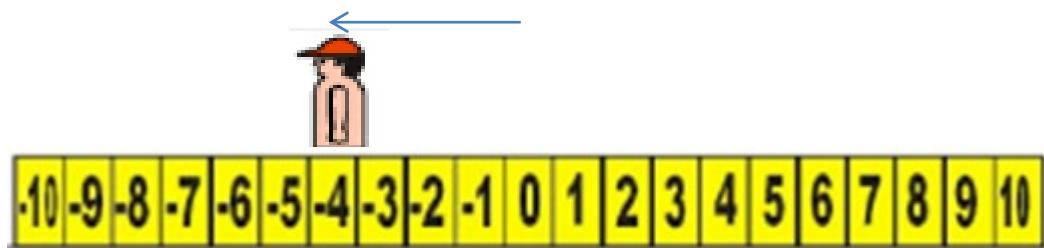
Langkah pertama adalah letakkan boneka pada garis bilangan pada posisi 0 dan menghadap ke arah bilangan positif.



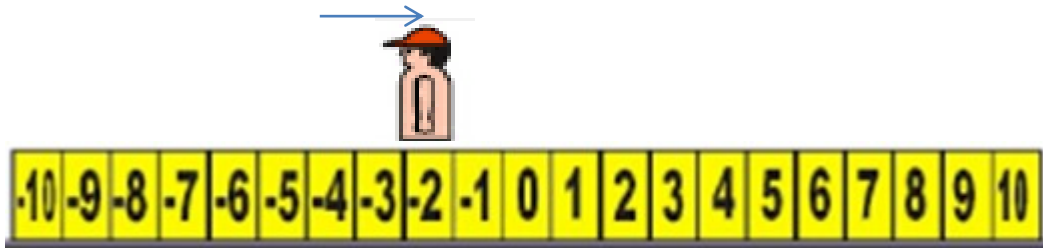
Langkah kedua, mundur sejauh 4 langkah



Langkah ketiga, perhatikan tanda operasi, karena pengurangan, maka arah boneka berubah dan posisi tetap pada -4.



Langkah keempat, mundur sejauh 2 langkah. Posisi boneka sekarang dapat dilihat pada sketsa gambar berikut ini.



Dengan demikian $-4 - (-2) = -2$

2.3.2 Operasi Perkalian dan Pembagian

Perkalian

Perkalian dapat pula diartikan sebagai penjumlahan berulang, sehingga cara menunjukkan perkalian sama dengan menunjukkan penjumlahan.

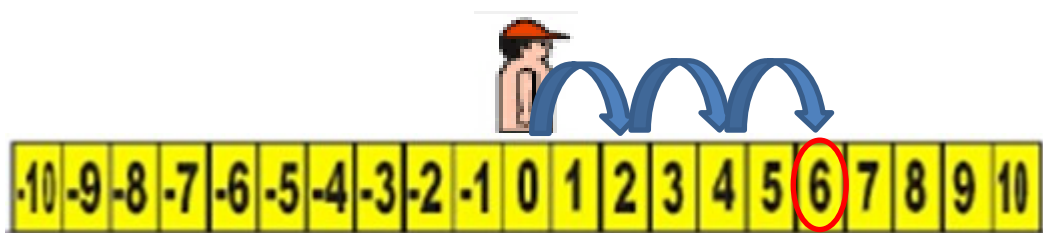
1) Perkalian antara dua bilangan positif.

Misal $3 \times 2 = \dots\dots?$

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2$$

Caranya:

1. Pasang boneka sehingga tepat pada angka nol dan menghadap kearah bilangan positif
2. Langkahkan maju tiga langkah setiap langkah sebanyak 2 skala
3. Kedudukan boneka terakhir adalah hasil 3×2



2) Perkalian antar bilangan positif dan bilangan negatif

Misal $3 \times (-2) = \dots\dots ?$

Caranya:

1. Pasang boneka sehingga tepat pada angka nol dan menghadap ke arah bilangan positif.
2. Langkah mudur tiga langkah dengan setiap langkahnya sebanyak 2 skala.
3. Kedudukan boneka terakhir adalah hasil $3 \times (-2)$

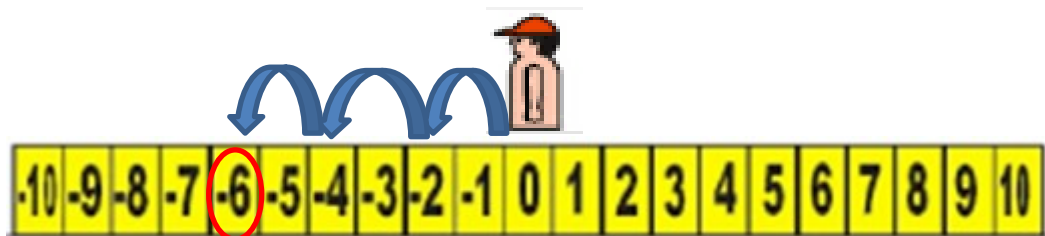


3) Perkalian antara bilangan Negatif dan Positif.

Misal $-3 \times 2 = \dots ?$

Caranya:

1. Pasang boneka sehingga tepat pada angka nol dan menghadap ke arah bilangan negatif.
2. Langkah maju tiga langkah, setiap langkah sebanyak 2 skala.
3. Kedudukan mobil yang terakhir adalah -3×2

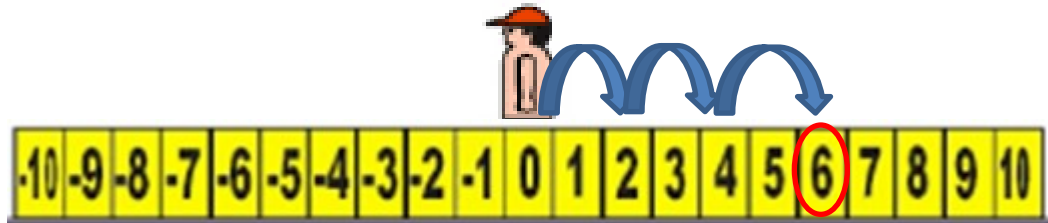


4) Perkalian antar bilangan Negatif dan Bilangan Negatif

$-3 \times -2 = \dots ?$

Caranya:

1. Pasang boneka sehingga tepat pada angka nol dan menghadap ke arah bilangan negatif.
2. Langkah mundur tiga langkah, setiap langkah sebanyak 2 skala.
3. Kedudukan boneka terakhir adalah hasil 3×2 .



Pembagian

Pembagian dapat diartikan sebagai pengurangan berulang yaitu bilangan yang dibagi dikurangi dengan bilangan pembagi. Pengurangan yang dilakukan disini sampai menghasilkan sisa nol.

Misal: $8 : 2 = \dots ?$

Karena pembagian dapat diartikan sebagai pengurangan berulang, maka: $8:2$ berarti $8-2-2-2-2=0$. Sehingga cara menunjukkan $8:2$ sama dengan cara menunjukkan $8-2-2-2-2=0$.

Caranya:

1. Pasang boneka sehingga boneka tepat pada angka nol, dan boneka tersebut harus menghadap ke bilangan positif.
2. Boneka tersebut langkahkan maju satu langkah sebanyak 8 skala.
3. Kemudian langkahkan mundur beberapa langkah, setiap langkah sebanyak 2 skala, sampai pada posisi nol.
4. Hasil $8:2$ adalah banyaknya langkah mundur yang harus dilakukan tersebut sehingga sampai angka nol.



Berdasarkan ilustrasi di atas dapat diketahui bahwa ada 4 kali mundur yang dilakukan oleh boneka sampai ke angka nol. Dengan demikian $8 : 2 = 4$.

D. DAFTAR PUSTAKA

1. Van de Walle, J.A. (2002). *Elementary And Middle School Mathematics*. Pearson Education, Inc.
2. Darhim. (1992). *Workshop Matematika*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.