UAD PRESS

LOGIKA MATEMATIKA DAN HIMPUNAN

Syariful Fahmi
Soffi Widyanesti Priwantoro

Logika Matematika dan Himpunan

Syariful Fahmi
Soffi Widyanesti Priwantoro

UAD PRESS

Logika Matematika dan Himpunan

Syariful Fahmi
Soffi Widyanesti Priwantoro

UAD PRESS

Logika Matematika dan Himpunan

ISBN: 978-602-0737-69-0
e-ISBN: 978-602-0737-70-6
16 x 24 cm, viii + 96 hlm
Cetakan Pertama, Juli 2021

Penulis:
Syariful Fahmi
Soffi Widyanesti Priwantoro

Editor: Dyah Intan P.
Layout: Dyah Intan P.
Cover: Hafidz Irfana

Diterbitkan oleh:
UAD PRESS
(Anggota IKAPI dan APPTI)

Alamat Penerbit:
Kampus II Universitas Ahmad Dahlan
Jl. Pramuka No.46, Sidikan, Umbulharjo, Yogyakarta
Telp. (0274) 563515, Phone (+62) 882 3949 9820

PRAKATA

Alhamdulillah penulis sampaikan ke Allah SWT atas terselesaikannya buku ajar ini. Materi buku ajar ini berisi teori tentang logika matematika dan himpunan sebagai buku ajar untuk mata kuliah Logika Matematika dan Himpunan. Buku ini dirancang dengan menggunakan banyak contoh sehingga akan memudahkan pembaca untuk memahami konsep dalam logika matematika dan himpunan.

Materi Logika Matematika dan Himpunan tidak hanya sekedar membahas teori tentang logika matematika, akan tetapi lebih menitikberatkan pada proses penalaran dan pembuktian melalui materi operasi pada himpunan, fungsi, dan relasi. Pembaca atau mahasiswa diharapkan dapat berpikir logis, kritis, dan sistematis. Oleh karena itu, penulis menyusun buku ajar ini dengan dilengkapi contoh dan latihan supaya mudah dipelajari.

Akhir kata, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah banyak membantu, sehingga pembuatan buku ini dapat terselesaikan. Saran dan kritik dari pembaca selalu penulis tunggu untuk perbaikan kualitas buku ini.

Yogyakarta, Agustus 2018

Penulis

Daftar Isi

BAB 1

Pernyataan atau Proposisi

Manusia diberi akal oleh Allah untuk menjadi khalifah di muka bumi. Dengan akal tersebut, manusia dapat mengemukakan pendapat atau memberikan suatu pernyataan. Dengan akal itu pula manusia dapat menilai suatu pernyataan itu bernilai benar atau bernilai salah.

Menurut Anda, adakah suatu pernyataan bernilai benar dan sekaligus bernilai salah?

Perhatikan kalimat-kalimat di bawah ini.

a. Banjarnegara berada di Jawa Tengah.
b. $3 + 1 = 4$
c. Garis $y = 2x + 5$ sejajar dengan garis $2 = 6x - 7$.
d. Al Qur'an buatan Nabi Muhammad.
e. Siapa pencipta alam semesta?
f. 4 adalah bilangan genap.
g. Tolong, belikan saya ayam goreng!
h. Semoga kamu selamat dalam perjalananmu.

Dari kalimat-kalimat di atas, tentukanlah mana kalimat yang bernilai benar dan mana kalimat yang bernilai salah. Adakah kalimat yang bernilai benar dan sekaligus bernilai salah? Ada pulakah kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya?

Kalimat-kalimat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya disebut pernyataan atau kalimat deklaratif. Kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya, tidak dapat disebut pernyataan.

Dalam Logika Matematika, tidak akan membicarakan kalimat-kalimat seperti contoh-contoh berikut ini, misalnya:

1. Apakah kamu sudah makan? (Kalimat tanya)
2. Bagus sekali rumah ini! (Kalimat yang mengungkapkan suatu perasaan)
3. Belikan ayah nasi goreng! (Kalimat perintah)
4. Mudah-mudahan IPK-mu lebih dari 3. (Kalimat yang berisi harapan)

Secara umum bisa dijelaskan melalui bagan berikut:

- Kalimat
  - Pernyataan (Proposisi)
    - Benar
    - Salah
  - Bukan Pernyataan

Latihan 1

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut.

1. Yogyakarta pernah menjadi ibukota Republik Indonesia.
2. Lapisan ozon di atmosfer bumi semakin menipis.
3. Presiden Republik Indonesia saat ini adalah Susilo Bambang Yudhoyono.
4. Harga sebuah durian lebih mahal dari harga sebuah pisang.
5. Bunga melati berwarna merah.
6. Tidak ada mahasiswa yang masih belajar di SMP.

7. Bilangan yang berakhir dengan angka 6 dapat habis dibagi 3.
8. Tahun 1982 adalah tahun kabisat.
9. Hipotenusa segitiga siku-siku lebih panjang daripada sisi-sisi lainnya.
10. Grafik $y = x^2 - 2x + 1$ memotong sumbu X di dua titik berbeda.
11. ${}^3\log 45 - {}^3\log 5 = 2$
12. 113 adalah bilangan genap.
13. Grafik $y = 2x^2 + 3x + 5$ tidak pernah menyentuh sumbu X.
14. $2^4 \cdot 2^2 = 2^8$
15. ${}^3\log(4 \cdot 2) = {}^3\log 4 \cdot {}^3\log 2$
16. Grafik $y = 2x^2 - 2x + 7$ berpotongan dengan grafik $y = x^2 + x + 6$.
17. $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^3$
18. Grafik $y = 2x^2 - 3x + 2$ berpotongan dengan grafik $y = x^2 + x - 1$ di dua titik yang sama.
19. Diskriminan suatu fungsi kuadrat yang mempunyai dua akar kembar adalah 0.
20. Pak guru masih sakit dan sudah sembuh.
21. Luas permukaan balok adalah 4x(panjang + lebar + tinggi).
22. Belah ketupat mempunyai 4 sisi yang sama panjang.
23. Volume kerucut dengan jari-jari 8 cm dan tinggi 2 cm sama dengan volume tabung dengan jari-jari 8 cm dan tinggi 2 cm.
24. Garis $y = 6x + 7$ tegak lurus garis $y = -\dfrac{1}{6}x + 7$.
25. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = 0{,}625$

> *Info*
>
> Kalimat yang mengandung variabel, misalnya $5 = x + 2$ adalah kalimat terbuka, yaitu kalimat yang belum mempunyai nilai kebenaran. Kalimat ini bernilai benar untuk $x = 3$ dan bernilai salah untuk $x = 4$

BAB 2

Pernyataan Majemuk dan Tabel Kebenaran

Pada pembahasan ini dan seterusnya, kita hanya membicarakan pernyataan-pernyataan saja. Pernyataan-pernyataan sederhana digandakan menjadi pernyataan majemuk (tersusun) dengan menggunakan kata-kata perangkai (penghubung). Kata-kata perangkai itu adalah:

1. "atau" dengan symbol "$\vee$"
2. "dan" dengan symbol "&" atau "$\wedge$"
3. "apabila… maka…" dengan symbol "$\Rightarrow$"
4. "bila dan hanya bila" dengan symbol "$\Leftrightarrow$"

Sedangkan negasi (sangkalan) suatu pernyataan menggunakan kata-kata "tidak benar bahwa" yang diberi simbol "-" di depan pernyataan yang disangkal (diingkar). Pernyataan-pernyataan diberi simbol dengan huruf alfabet kecil: a, b, c, d,…, sedangkan nilai "Benar" atau "Salah" suatu pernyataan disingkat berturut-turut dengan "B" atau "S".

A. Negasi (Sangkalan/Ingkaran)

Definisi 1:

Negasi suatu pernyataan ialah suatu pernyataan yang bernilai salah apabila pernyataan semula bernilai benar, dan bernilai benar apabila pernyataan semula bernilai salah.

Jika p suatu pernyataan, ingkaran p atau negasi p dinyatakan dengan simbol $\sim p$ atau $\overline{p}$.

Info

$\sim p$ atau $\overline{p}$ dibaca:

- Tidak p, atau
- Bukan p, atau
- Tidak benar bahwa p

Perhatikan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut.

1) p : 3 adalah bilangan prima. (B)
   $\sim p$: 3 bukan bilangan prima. (S)
2) p : $3+3=7$. (S)
   $\sim p$: $3+3\neq 7$. (B)

Simpulkan

Jika p bernilai benar, maka $\sim p$ bernilai ...

Jika p bernilai salah, maka $\sim p$ bernilai ...

Kesimpulan tersebut dapat disajikan dalam tabel (yang disebut tabel kebenaran) sebagai berikut:

Salin dan Lengkapilah

Tabel kebenaran pernyataan

p	$\sim p$
B	...
S	...

Uji Pemahaman

Tentukan ingkaran dan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Massa bumi lebih besar daripada massa matahari.

2. Bulan dapat memancarkan cahayanya sendiri.
3. Presiden Indonesia dapat membubarkan DPR-RI.
4. Tumbuhan monokotil adalah tumbuhan berkeping dua.
5. Papua New Guenia adalah bagian dari Indonesia.
6. Jabatan Gubernur Bank Indonesia setingkat dengan menteri.
7. Jaksa bertugas membela terdakwa dalam persidangan.
8. Besi merupakan suatu senyawa.
9. Nilai minimum $y = -3\cos x$ adalah -3.
10. Daerah asal fungsi $f(x) = \sqrt{x-1}$ adalah $\{x \mid x \in R\}$.
11. Grafik $y = 2x^2 - 3x + 2$ berpotongan dengan garis $y = -1$ di dua titik berbeda.
12. $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$
13. $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = -1$
14. Persegi mempunyai 4 sisi yang sama panjang.
15. ${}^2\log(4-3) = {}^2\log 4 - {}^2\log 3$
16. $(5^2)^3 = 5^5$
17. Gradien garis yang melalui titik $(-2,7)$ dan $(3,4)$ adalah 6.
18. Grafik $y = 3x + 7$ tegak lurus grafik $y = -3x - 7$
19. Volume kubus dengan sisi *r* adalah r^3.
20. Luas lingkaran dengan jari-jari *r* sama dengan luas bola dengan jari-jari *r*.
21. Grafik $y = 2x^2 + 7$ berpotongan dengan grafik $y = 2x - 3$ di dua titik berbeda.
22. Sudut-sudut yang saling berhadapan pada jajaran genjang sama besar.
23. Diagonal-diagonal belah ketupat saling tegak lurus.
24. Persegi panjang mempunyai 2 sisi sama panjang.
25. Sudut-sudut suatu segitiga sama sisi adalah sama besar.

B. Konjungsi Dua Pernyataan

Contoh 1:

"Jono kaya dan bahagia" merupakan singkatan dari "Jono kaya dan Jono bahagia". Apabila "a" menyatakan "Jono kaya" dan "b" menyatakan Jono bahagia'. Pernyataan-pernyataan "a" maupun "b" masing-masing disebut pernyataan tunggal (pernyataan prima/pernyataan atom). Sedangkan "a & b" disebut konjungsi a dan b.

Definisi 2:

Konjungsi dua pernyataan a dan b ditulis "a & b" (dibaca "a dan b") bernilai B (benar). Hanya apabila kedua pernyataan tunggalnya bernilai B, dan untuk nilai-nilai kebenaran adan b lainnya, maka "a & b" bernilai S (salah).

Definisi tersebut dapat dinyatakan dalam suatu tabel kebenaran (tabel 1) konjungsi dua pernyataan a dan b.

Tabel 1. Tabel nilai kebenaran Konjungsi Dua Pernyataan a dan b

a	b	a & b
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Catatan:

Nilai kebenaran konjungsi dua pernyataan ditentukan oleh nilai-nilai kebenaran pernyataan-pernyataan tunggalnya, dan tidak perlu memperhatikan ada tidaknya hubungan pernyataan-pernyataan tunggalnya.

Contoh 2:

1) "Jakarta ialah ibukota Negara Republik Indonesia dan 3 x 4 = 12" adalah suatu konjungsi yang bernilai B, sebab kedua pernyataan

tunggalnya bernilai B, meskipun tak ada hubungan antara pernyataan-pernyataan tunggalnya.

2) Ingatlah definisi irisan dua himpunan A dan B yang menggunakan kalimat konjungsi, definisinys dapat dilukiskan sebagai berikut:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}$$

3) Apabila x dan y menyatakan bilangan-bilangan nyata apakah syarat bagi x dan y agar $x^2 + y^2 = 0$? Agar $x^2 + y^2 = 0$ haruslah dipenuhi bahwa x = 0 & y = 0. Syarat agar $x^2 + y^2 = 0$, ternyata menggunakan kalimat konjungsi.

C. Diskonjungsi Dua Pernyataan

Definisi 3:

Disjungsi dua pernyataan a dan b ditulis "a ∨ b" (dibaca: "a atau b") bernilai S hanya apabila dua pernyataan tunggalnya bernilai S, sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran a dan b lainya, maka a ∨ b" bernilai B.

Definisi ini dapat dinyatakan dalam suatu tabel kebenaran disjungsi dua pernyataan a dan b (tabel 2) sebagai berikut:

Tabel 2. Tabel nilai kebenaran Disjungsi Dua Pernyataan a dan b

a	b	a ∨ b
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Definisi 3 dapat pula dikatakan bahwa disjungsi dua pernyataan bernilai B, apabila sekurang-kurangnya satu dari pernyataan tunggalnya bernilai B.

Contoh 3:

1) "7 adalah bilangan prima atau 7 lebih besar dari 8" adalah disjungsi yang bernilai benar (sesuai baris kedua dari tabel 2).

2) "5 adalah bilangan prima atau 5 membagi habis 20" adalah suatu disjungsi yang bernilai benar.
3) "6 adalah faktor dari 9 atau 4 + 7 = 10" adalah suatu disjungsi yang bernilai salah.
4) Apabila x bilangan nyata, maka $(x - 1)(x - 5) = 0$ dipenuhi jika $x = 1 \vee x = 5$.

Disjungsi dua pernyataan yang didefinisikan sesuai dengan tabel 2 disebut **disjungsi inklusif.** Disjungsi jenis lain disebut **disjungsi eksklusif.** Disjungsi eksklusif dua pernyataan a dan b disimbolkan sebagai "a $\veebar$ b" (dibaca atau a atau b") dan didefinisikan sesuai dengan tabel 2 dalam buku ini, apabila ditentukan suatu disjungsi tanpa keterangan sps-sps, maka yang dimaksud adalah disjungsi inklusif.

Contoh 4:

Pada jam 06.30, Badu sedang mandi atau sedang makan pagi. Dua pernyataan ini tidak dapat diselesaikan oleh Badu dalam saat yang bersamaan. Menurut katentuan di atas dikatakan: "Atau Badu sedang mandi atau Badu sedang makan pagi'.

Tabel 3. Tabel nilai Kebenaran Disjungsi Eksklusif dari a dan b.

a	b	a $\veebar$ b
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

D. Implikasi (Kondisional) Dua Pernyataan

Implikasi dua pernyataan a dan b diberi simbol "$a \Rightarrow b$" (dibaca "apabila a maka *b*"). *a* disebut *pendahulu (antecedent)* dan *b* disebut *pengikut (consequent).*

Definisi 4:

Implikasi "$a \Rightarrow b$" bernilai S hanya apabila pendahulu *a* bernilai b dan pengikut b bernilai S, untuk nilai-nilai kebenaran a dan b lainnya, maka implikasi "$a \Rightarrow b$" bernilai B.

Definisi tersebut dapat dinyatakan dalam suatu tabel kebenaran implikasi $a \Rightarrow b$ (tabel 4) berikut.

Tabel 4. Tabel Nilai Kebenaran Implikasi $a \Rightarrow b$

A	b	$a \Rightarrow b$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dalam percakapan sehari-hari pernyataan majemuk "apabila … maka …" biasanya ada suatu hubungan antara pendahulu dan pengikut.

Contoh 5:

1) Apabila kamu lulus ujian, maka saya membelikan sepeda motor untukmu (suatu janji).
2) Apabila bel berdering tiga kali, maka pertanda kuliah diakhiri (suatu pertanda).
3) Apabila Anda biasa terlambat makan, maka Anda akan menderita penyakit perut (sebab akibat).
4) Apabila dua segitiga siku-siku sama kaki, maka dua segitiga itu sebangun (pengikut diturunkan dari pendahulu).

Pada contoh 5, pendahulu dan pengikut suatu implikasi itu mempunyai hubungan yang ditunjukan dengan kata-kata dalam kurung di belakang tiap-tiap kalimat. Dalam matematika, hubungan antara pendahulu dan pengikut tidak disyaratkan, walaupun adanya hubungan diperbolehkan pula. Berarti atau tidaknya implikasi hanya bergantung pada berarti atau tidaknya pendahulu atau pengikut dari implikasi itu. Begitu pula nilai kebenaran suatu implikasi **hanya didasarkan** atas nilai-nilai kebenaran dari pendahulu dan pengikutnya.

Contoh 6:

Apabila matahari terbit dari barat, maka Siti lulus ujian.

Kalimat ini sering kita dengar, dan dimaksudkan bahwa mustahil Siti akan lulus dalam menempuh ujiannya. Meskipun dalam implikasi itu tidak ada hubungan antara pendahulu (matahari terbit dari barat) dan pengikut (Siti lulus ujian). Implikasi itu bernilai benar, sebab pendahulunya bernilai salah.

Perhatikan tabel nilai kebenaran implikasi (tabel 4), maka kita dapat menyimpulkan:

1) *Implikasi selalu bernilai Benar, apabila pendahulunya bernilai Salah,* tanpa *memperhatikan nilai kebenaran pengikutnya* (sesuai baris ke 3 dan 4 dalam tabel 4). Nilai kebenaran pengikutnya, baik Benar atau Salah, jika pendahulunya bernilai Salah, maka implikasi tersebut bernilai Benar.
2) *Implikasi selalu bernilai Benar, apabila pengikutnya bernilai Benar, tanpa memperhatikan nilai kebenaran dari pendahulunya* (sesuai baris ke 2 dan 3). Tanpa mengetahui nilai kebenaran pendahulu, jika diketahui pengikutnya bernilai Benar, maka implikasi bernilai Benar.

Implikasi yang dipelajari dalam Matematika adalah implikasi yang didefinisikan seperti dalam tabel 4. Implikasi semacam ini disebut **implikasi material,** sedangkan implikasi yang dijumpai dalam percakapan sehari-hari disebut **implikasi biasa** *(ordinary implication).*

Apabila diketahui bahwa "$a \Rightarrow b$" bernilai benar maka:

(1) a disebut *syarat cukup* bagi b, atau

(2) *b* disebut syarat perlu *bagi a.*

Perhatikan bahwa suatu syarat perlu belum tentu merupakan syarat cukup.

Contoh 7:

Segi empat ABCD belah ketupat $\Rightarrow$ diagonal-diagonalnya potong-memotong di tengah-tengah.

Implikasi ini jelas bernilai benar. Syarat perlu segi empat ABCD merupakan belah ketupat ialah diagonal-diagonalnya potong-memotong di tengah-tengah. Namun, walaupun segi empat ABCD merupakan belah ketupat ialah diagonal-diagonalnya potong-memotong di tengah-tengah (syarat perlu), tetapi belum cukup untuk menghasilkan ABCD suatu belah ketupat, yaitu ada segi empat yang diagonal-diagonalnya berpotongan di tengah-tengahnya, tetapi segi empat tersebut bukan suatu belah ketupat.

Contoh 8:

Apabila keempat sisi segitiga ABCD sama panjang, maka ABCD suatu jajar genjang.

Implikasi ini bernilai benar. Syarat cukupnya ialah "keempat sisi segi empat ABCD sama panjang" dan syarat perlunya ialah "ABCD suatu jajar genjang". Perhatikan bahwa syarat cukup **tidak harus** merupakan syarat perlu. Pada contoh ini, memang pendahulu "keempat sisi segi empat ABCD sama panjang" merupakan syarat cukup untuk mengakibatkan "ABCD suatu jajar genjang" (pengikut). ABCD suatu jajar genjang (pengikut) mutlak diperlukan, karena ada suatu jajar genjang yang keempat sisinya tidak sama panjang.

Contoh 9:

Apabila segitiga ABCD sama kaki maka sudut-sudut alasnya sama besar.

Jelas implikasi ini bernilai benar. Segitiga ABC sama kaki (pendahulu) merupakan syarat cukup bagi pengikut (sudut alasnya sama besar). Sebaliknya pengikut juga merupakan syarat cukup bagi pendahulu. Sehingga pendahulu merupakan syarat perlu pula bagi pengikut. Dikatakan bahwa pendahulu merupakan syarat cukup dan perlu bagi pengikut. Hal seperti ini akan dibicarakan lebih detail dalam biimplikasi.

Definisi 5:

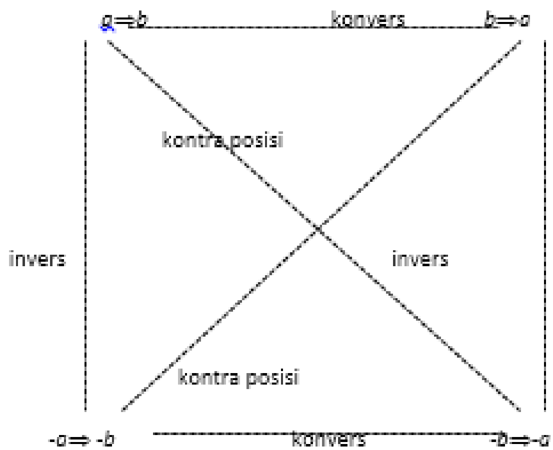
Apabila diketahui "$a \Rightarrow b$" maka

(1) $b \Rightarrow a$ disebut **konvers** dari $a \Rightarrow b$

(2) $-a \Rightarrow -b$ disebut **invers dari** $a \Rightarrow b$

(3) $-b \Rightarrow -a$ disebut **kontraposisi (kontrapositif)** dari $a \Rightarrow b$

Definisi 3.5 ini dapat dinyatakan dengan skema sebagai berikut:



Tabel 6 adalah tabel nilai kebenaran suatu implikasi beserta konvers, invers, dan kontraposisinya.

Apabila memperhatikan tabel 6 ini, kita dapat menarik beberapa kesimpulan, yaitu:

(1) Implikasi mula-mula ($a \Rightarrow b$) dan konversnya tidak selalu mempunyai nilai kebenaran yang sama.

(2) Implikasi mula-mula dan inversnya tidak selalu mempunyai nilai kebenaran yang sama.

(3) Implikasi mula-mula selalu mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan kontraposisinya, dikatakan bahwa "$a \Rightarrow b$ ekuivalen dengan $-b \Rightarrow -a$" dan ditulis

$$a \Rightarrow b \text{ ek } -b \Rightarrow -a$$

Tabel 6. Tabel Nilai Kebenaran Implikasi $a \Rightarrow b$ besarta Konvers, Invers dan Kontraposisinya

A	*B*	*-a*	*-b*	*a⇒b*	*b⇒a*	*-a ⇒-b*	*-b ⇒-a*
B	B	S	S				
B	S	S	B				
S	B	B	S				
S	S	B	B				

Apakah $-a \Rightarrow -b$ merupakan kontraposisi dari $b \Rightarrow a$? Dan bagaimanakah tentang nilai-nilai kebenarannya? Kesimpulan ketiga di atas banyak digunakan sebagai suatu teknik untuk membuktikan secara tidak langsung beberapa teorema. Perhatikan contoh berikut:

Contoh 10:

Apakah kuadrat suatu bilangan bulat adalah ganjil, maka bilangan bulat itu ganjil pula. Atau ditulis: x^2 suatu bilangan ganjil $\Rightarrow x$ bilangan ganjil.

Untuk membuktikan kebenaran pernyataan ini ditempuh cara tidak langsung, yaitu pembuktian kontraposisinya.
Kontraposisi dari implikasi itu ialah:

x bukan suatu bilangan ganjil $\Rightarrow x^2$ bukan suatu bilangan ganjil.

Atau, x suatu bilangan genap.

Karena x suatu bilangan genap, maka $x = 2n$ (n suatu bilangan bulat), sehingga $x^2 = 4n^2$. Terlihat bahwa x^2 memuat faktor 2, berarti x^2 suatu bilangan genap.

Jadi x suatu bilangan genap $\Rightarrow x^2$ suatu bilangan genap. Sehingga benar pula bahwa:

x^2suatu bilangan ganjil $\Rightarrow x$ suatu bilangan ganjil.

E. Biimplikasi (Bikodisional)

Definisi 6:

Biimplikasi *a* dan *b* (disimbolkan dengan "$a \Leftrightarrow b$") bernilai benar apabila kedua pernyataan tunggalnya mempunyai nilai kebenaran yang sama, dan mempunyai bernilai salah apabila kedua pernyataan tunggalnya mempunyai nilai kebenaran yang berbeda.

Definisi 6 ini dapat dinyatakan dalam suatu tabel nilai kebenaran (tabel 7) sebagai berikut:

Tabel 7. Tabel Nilai Kebenaran Biimplikasi dari *a* dan *b*.

A	B	$a \Leftrightarrow b$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Teorema 1:

$a \Leftrightarrow b$ ek $(a \Rightarrow b)$ & $(b \Rightarrow a)$

Bukti: Untuk membuktikan kebenaran teorema itu diperlihatkan tabel kebenarannya sebagai berikut:

Tabel 8.

A	*B*	$a \Leftrightarrow b$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b)$ & $(b \Rightarrow a)$
B	B	B			
B	S	S			
S	B	S			
S	S	B			
1	2	3			

Terlihat bahwa urutan nilai kebenaran pada kolom 3 sama dengan urutan nilai kebenaran pada kolom 6, berarti:

$$a \Leftrightarrow b \text{ ek } (a \Rightarrow b) \ \& \ (b \Rightarrow a)$$

Pada implikasi $a \Rightarrow b$, *a* adalah syarat cukup bagi *b*, dan pada implikasi $b \Rightarrow a$, *a* adalah syarat perlu bagi *b*. sehingga $a \Leftrightarrow b$ berarti *a* adalah syarat cukup dan perlu bagi *b* dan sebaliknya.

Contoh 11:

1) Segi empat ABCD suatu jajar genjang bila dan hanya bila diagonal-diagonalnya saling berpotongan di tengah-tengah.
2) Segitiga ABC sama sisi bila dan hanya bila sudut-sudutnya sama besar.
3) Segi empat ABCD suatu persegi bila dan hanya bila diagonal-diagonalnya sama panjang.
4) $x = 3$ $x^2 = 9$.

Nilai kebenaran dari contoh biimplikasi-biimplikasi 1), 2), 3), dan 4) berturut-turut adalah B, B, S, dan S.

Apabila kita hendak membuktikan kebenaran pernyataan majemuk $a \Leftrightarrow b$ ditempuh langkah-langkah sebagai berikut:

(i) Dibuktikan $a \Rightarrow b$, yaitu pernyataan *a* diambil sebagai ketentuan dan dibutuhkan kebenaran pernyataan *b*.

(ii) Dibuktikan $b \Rightarrow a$, yaitu pernyataan *b* diambil sebagai ketentuan dan dibuktikan kebenaran pernyataan *a*.

Jika kedua langkah ini terselesaikan, barulah disimpulkan bahwa $a \Leftrightarrow b$ terbukti.

Dari pembicaraan di atas jelas bahwa dalam Matematika, antara implikasi dan biimplikasi harus dibedakan secara tajam. Kedua pengartian ini tidak boleh dicampuradukkan. Dalam buku-buku Matematika ada suatu kekecualian, yaitu dalam setiap rumusan definisi terdapat ungkapan "apabila…maka…" dimaksudkan "…bila dan hanya bila…".

Contoh 12:

Apabila ketiga sisi segitiga sama panjang maka segitiga itu sama sisi. Dimaksudkan bahwa "ketiga sisi segitiga sama panjang bila dan hanya bila segitiga itu sama sisi".

Selanjutnya kata perangkai "bila dan hanya bila" disingkat "bhb" kita telah menggunakan singkatan "ek" untuk "ekuivalen". Dua pernyataan dikatakan ekuivalen apabila nilai-nilai kebenarannya sama. Bandingkan $a \Leftrightarrow b$ dengan a ek b.

Kedua pernyataan ini mempunyai nilai kebenaran sama.

F. Negasi-negasi dari Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, dan Biimplikasi

Untuk menentukan negasi-negasi konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi, disusun tabel-tabel kebenarannya dalam suatu tabel (tabel 9) sebagai berikut.

Tabel 9

A	B	$-a$	$-b$	$a \& b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$-(a \& b)$	$-(a \vee b)$	$-(a \Rightarrow b)$
B	B								
B	S								
S	B								

S	S								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Misalkan kita akan menentukan negasi dari (a&b), yaitu -(a&b), nilai-nilai kebenaranya terlihat pada kolom ke-8. Nilai-nilai kebenaran pada kolom itu terdiri atas satu S dan diikuti berturut-turut tiga B. hal ini hanya terjadi pada penyataan majemuk dengan kata Penghubung "$\vee$", yaitu -a $\vee$ -b.

Jadi - (a &b) ek -$a$$\vee$ -b

Nilai-nilai kebenaran dari - (a $\vee$$b$) berturut terdiri atas tiga S dan satu B (lihat kolom 9). Hal ini hanya terjadi pada pernyataan majemuk dengan kata penghubung "&", yaitu -a& -b.

Jadi -(a $\vee$$b$) ek -$a$& -$b$.

Nilai-nilai kebenaran dari -($a \Rightarrow b$) terdiri atas tiga S dan satu B (lihat kolom 10). Hal ini hanya terjadi pada nilai-nilai kebenaran pernyataan majemuk dengan kata penghubung "&", yaitu a& -b.

Jadi -($a \Rightarrow b$) ek a& -b.

Kita telah mengetahui bahwa $a \Leftrightarrow b$ ek ($a \Rightarrow b$) & ($b \Rightarrow a$).

Maka -($a \Leftrightarrow b$) ek –(($a \Rightarrow b$) & ($b \Rightarrow a$))

ek –(($a \Rightarrow b$) $\vee$ ($b \Rightarrow a$))

ek ((a&- b) $\vee$ (b& -a))

Maka -($a \Leftrightarrow b$) ek ((a&- b) $\vee$ (b& -a)).

Rangkuman:

- (a &b) ek -$a$$\vee$ -b

- (a $\vee$$b$) ek -$a$& -$b$

- ($a \Rightarrow b$) ek a& -b

- ($a \Leftrightarrow b$) ek (a&- b) $\vee$ (b& -a).

Selanjutnya untuk menghindari banyaknya tanda kurung yang digunakan dalam penulisan simbol-simbol dalam pernyataan majemuk, maka diadakan perjanjian tentang urutan kekuatan menghubung dari kata-kata penghubung sebagai berikut:

$\Leftrightarrow$ sebagai penghubung paling kuat, diikuti oleh $\Rightarrow$ selanjutnya diikuti & dan $\vee$ yang mempunyai kekuatan penghubung sama, dan akhirnya – (negasi) merupakan penghubung yang paling lemah.

Contoh 13:

$a\&b\Rightarrow c$ dimaksudkan $(a\&b) \Rightarrow c$

$a\Leftrightarrow b\Rightarrow c$ dimaksudkan $a\Leftrightarrow(b\Rightarrow c)$

$-a\vee b\Rightarrow -c\&d$ dimaksudkan $-(a)\vee(b) \Rightarrow ((-c) \&d)$

$a\vee b\Rightarrow(c\Leftrightarrow a\&-\mathrm{e})$ dimaksudkan $(a\vee b)\Rightarrow(c\Leftrightarrow (d\& (-\mathrm{e})))$

$a\vee b\Rightarrow(c\Leftrightarrow d\&\mathrm{e})$ dimaksudkan $((a\vee b) \Rightarrow c) \Leftrightarrow (d\&\mathrm{e})$.

BAB 3

Menentukan Nilai Kebenaran Suatu Pernyataan Majemuk

Selain menggunakan tabel kebenaran, cara lain untuk menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk adalah dengan menggunakan prosedur aritmetika. Berikut prosedurnya:

Pernyataan Majemuk	Prosedur Aritmetika
$-a$	$1+a$
$a \& b$	$a+b+ab$
$a \vee b$	ab
$a \Rightarrow b$	$(1+a)b$
$a \Leftrightarrow b$	$a+b$

Apabila suatu pernyataan majemuk mempunyai nilai kebenaran B atau S, maka hasil perhitungan dengan prosedur aritmetika diperoleh berturut-turut 0 dan 1. Selanjutnya, prosedur perhitungan dalam aritmetika seperti pada lazimnya, kecuali $1+1=0$. Dengan ketentuan-ketentuan di atas dan mengingat totologi sederhana dapat dimengerti bahwa dalam prosedur aritmetika berlaku bahwa $a^2=a, 2a=0, a(a+1)=0$ untuk setiap pernyataan a. Ingat bahwa $a \vee a$ ek a, dalam prosedur aritmetika dinyatakan sebagai $aa = a, a \Leftrightarrow a$ dalam prosedur aritmetika dinyatakan sebagai $a + a$ atau $2a$, mengingat bahwa $a \Leftrightarrow a$ selalu bernilai B, maka $2a = 0, a(a + 1 = 0)$ sebab $a \vee -a$ suatu totologi.

Contoh 1:

Tentukan nilai kebenaran dari $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \,\&\, b \Rightarrow c)$ dengan menggunakan prosedur aritmetika.

Penyelesaian:

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \,\&\, b \Rightarrow c)$$
$$(1 + (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)))(a \,\&\, b \Rightarrow c)$$
$$(1 + (1 + a)(b \Rightarrow c))((1 + (a \,\&\, b))c)$$
$$(1 + (1 + a)(1 + b)c)((1 + a + b + ab)c) =$$
$$(1 + (1 + a + b + ab)c)((1 + a + b + ab)c) =$$
$$(1 + a + b + ab)c + (1 + a + b + ab)^2 c^2 =$$
$$(1 + a + b + ab)c + (1 + a + b + ab)\mathrm{c} = 0$$

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa $(a \Rightarrow b \,\&\, -b) \Rightarrow -a$ adalah suatu totologi! Gunakan prosedur aritmetika untuk menentukan nilai kebenarannya!

Penyelesaian:

$$(a \Rightarrow b \,\&\, -b) \Rightarrow -a$$
$$(1 + (a \Rightarrow b \,\&\, -b))(1 + a)$$
$$(1 + (1 + a)(b \,\&\, -b))(1 + a)$$
$$(1 + (1 + a)(b + (1 + b) + (1 + b)b))(1 + a) =$$
$$(1 + (1 + a)(2b + 1 + 0))(1 + \mathrm{a}) =$$
$$(1 + (1 + a)(0 + 1))(1 + \mathrm{a}) =$$
$$(1 + (1 + a))(1 + \mathrm{a}) = 0$$

Latihan 3

1. Bentuk-bentuk pernyataan berikut, manakah yang merupakan totologi?
   1. $a \Leftrightarrow b$
   2. $(a \Rightarrow b \Leftrightarrow b) \Rightarrow a$
   3. $(a \Leftrightarrow a) \Leftrightarrow a$
   4. $a \Rightarrow (-a \Rightarrow b)$
   5. $a \Rightarrow (b \Rightarrow (b \Rightarrow a))$
   6. $a \,\&\, b \Rightarrow ((a \,\&\, -a \Rightarrow b \vee -b) \,\&\, (b \Rightarrow b))$
2. Bentuk pernyataan $-p \vee q$ adalah totologi kondisional dengan bentuk-bentuk pernyataan mana saja di antara:
   1. p
   2. $q \Rightarrow p$
   3. $p \Rightarrow q$
   4. $-q \Rightarrow -p$
   5. $-p \,\&\, q$

3. p adalah totologi biimplikasi dengan bentuk-bentuk pernyataan mana saja di antara:
   1. $p \vee q$
   2. $p \vee -p$
   3. $p \,\&\, p$
   4. $p \Rightarrow p$
   5. $-p \Rightarrow p$
   6. $p \Rightarrow -p$
   7. $q \vee -q$

4. Tuliskanlah dengan notasi fungsi, bentuk-bentuk pernyataan berikut ini dan tentukanlah nilai kebenaranya, jika diketahui pernyataan-pernyataan $p, q, r,$ dan s berturut-turut bernilai B, S, S, dan B.

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. $p \vee r \Rightarrow r \,\&\, (s \vee -p)$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (s \,\&\, -p \Rightarrow q)$
4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow s))$
5. $(p \Rightarrow -q) \Rightarrow (s \Leftrightarrow r)$

5. Tunjukkanlah bahwa bentuk-bentuk pernyataan-pernyataan berikut adalah totologi (dengan prosedur dalam matriks).
   1. $(a \Rightarrow b \,\&\, -b) \Rightarrow -a$
   2. $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \,\&\, b \Rightarrow c)$
   3. $a \Rightarrow (b \Rightarrow a \,\&\, b)$
   4. $(a \Rightarrow b) \,\&\, (c \Rightarrow b) \Rightarrow (a \vee c \Rightarrow b)$
   5. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$

6. Tentukanlah nilai-nilai kebenaran bentuk-bentuk pernyataan berikut dengan menggunakan prosedur dalam aritmetika?
   1. $p \Rightarrow (-p \vee q)$
   2. $(p \,\&\, -q) \Rightarrow (-p \vee q)$
   3. $p \,\&\, (-q \Rightarrow p) \,\&\, -((p \Leftrightarrow -q) \Rightarrow (q \vee -p))$
   4. $(p \vee (q \Rightarrow -r)) \,\&\, ((-p \vee r) \Leftrightarrow -q)$

Selanjutnya untuk menyingkat penulisan dalam memberikan alasan dinyatakan tiga aturan sebagai berikut:

1. **Aturan p**: Suatu pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk yang ditentukan adalah premis (disingkat "p").
2. **Aturan t**: Pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk A_1, A_2, ..., A_n sebagai pendahulu diturunkannya C sedemikian sehingga $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\ldots\&\, A_n \Rightarrow C$ suatu totologi disingkat "t".

3. **Aturan cp**: Jika C ialah suatu kesimpulan dari premis-premis A_1, A_2, ..., A_n dan D maka $D \Rightarrow C$ merupakan suatu kesimpulan dari premis-premis A_1, A_2, ..., A_n. Aturan ini disebut aturan bukti bersyarat (*the rule of conditional proof*) dan disingkat "cp".

Selanjutnya konstruksi keabsahan argumen pada contoh 5.6 di atas dapat ditulis lebih singkat menjadi:

(1)	1.	$c \Rightarrow (d \Rightarrow e)$	p
(2)	2.	$-g \vee c$	p
(3)	3.	d	p
(4)	4.	g	p (premis tambahan)
(2, 4)	5.	c	2, 4 t
(1, 2, 4)	6.	$d \Rightarrow e$	1, 5 t
(1, 2, 3, 4)	7.	e	3, 6 t
(1, 2, 3)	8.	$g \Rightarrow e$	4, 7 cp.

Ingat bahwa aturan cp hanya digunakan apabila kesimpulan berbentuk kondisional (implikasi). Pembentukan kondisional (penggunaan aturan cp) pada baris 8, pendahulu harus diambil dari baris 4, yaitu premis tambahan. Dengan menggunakan premis tambahan sebagai pendahulu suatu implikasi dengan pengikut kesimpulan yang diturunkan dari premis-premis (1), (2), (3), dan (4), berarti implikasi yang terbentuk sebagai kesimpulan terakhir itu hanya menggunakan premis-premis (1), (2), dan (3) saja (sesuai teorema 5.2). Memang kita dapat menuliskan pada baris 8 dengan $g \Rightarrow e$ yang bernilai benar pula, tetapi implikasi ini diturunkan tidak dengan aturan cp, melainkan diturunkan dari premis-premis (1), (2), (3), dan (4).

Kadang-kadang kesimpulan suatu argumen tidak berbentuk suatu implikasi, misalkan berbentuk disjungsi. Jika kita ingin mengkonstruksikan keabsahan argumen itu dengan menggunakan aturan cp, maka disjungsi tersebut dapat diubah menjadi suatu implikasi yang ekuivalen dengan disjungsi itu.

$$c \vee d \quad ek \quad -c \Rightarrow d$$

Contoh 3:

Konstruksikan penurunan kesimpulan dari argumen:

$$a \vee e,\ a \Rightarrow c,\ \ e \Rightarrow d \quad \models \quad c \vee d$$

Penyelesaian:

Argumen tersebut ekuivalen dengan argumen:

$$a \vee e,\ a \Rightarrow c,\ \ e \Rightarrow d \quad \models \quad -c \Rightarrow d$$

Konstruksi keabsahan argumen ini adalah sebagai berikut:

(1)	1.	$a \vee e$	p
(2)	2.	$a \Rightarrow c$	p
(3)	3.	$e \Rightarrow d$	p
(4)	4.	$-c$	p (premis tambahan)
(2, 4)	5.	$-a$	2, 4 t
(1, 2, 4)	6.	e	1, 5 t
(1, 2, 3, 4)	7.	d	3, 6 t
(1, 2, 3)	8.	$-c \Rightarrow d$	4, 7 cp.
(1, 2, 3)	9.	$c \vee d$	8 t.

Kita dapat pula mengkonstruksikan keabsahan argumen pada contoh 5.7 ini tanpa menggunakan aturan cp. Konstruksi keabsahannya adalah sebagai berikut:

(1)	1.	$a \vee e$	p
(2)	2.	$a \Rightarrow c$	p
(3)	3.	$e \Rightarrow d$	p
(1)	4.	$e \vee a$	1 t
(1)	5.	$-e \Rightarrow a$	4 t
(1, 2)	6.	$-e \Rightarrow c$	2, 5 t
(1, 2)	7.	$-c \Rightarrow e$	6 t
(1, 2, 3)	8.	$-c \Rightarrow d$	3, 7 t

(1, 2, 3)	9.	$c \vee d$	8 t.

Contoh 4:

Tunjukkan bahwa pernyataan berikut suatu totologi!

$$(w \vee p \Rightarrow i) \& (i \Rightarrow c \vee e) \& (e \Rightarrow u) \& (-c \& -u) \Rightarrow -w$$

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa pernyataan majemuk ini suatu totologi, karena terdapat 6 pernyataan tunggal maka diperlukan 64 baris untuk menyusun tabel kebenarannya. Oleh karena itu, suatu cara penyelesaian yang singkat apabila kita dapat menyatakan pernyataan majemuk tersebut menjadi suatu argumen dan seterusnya menunjukkan keabsahan penurunan kesimpulan dari argumen itu. Pernyataan majemuk itu ekuivalen dengan argumen berikut:

$$(w \vee p \Rightarrow i), \ (i \Rightarrow c \vee e), \ (e \Rightarrow u), \ (-c \& -u) \ \models -w$$

Konstruksi keabsahan argumen ini adalah sebagai berikut:

(1)	1.	$w \vee p \Rightarrow i$	p
(2)	2.	$i \Rightarrow c \vee e$	p
(3)	3.	$e \Rightarrow u$	p
(4)	4.	$-c \& -u$	p
(4)	5.	$-u$	4 t
(3, 4)	6.	$-e$	3, 5 t
(4)	7.	$-c$	4 t
(3, 4)	8.	$-c \& e$	6, 7 t
(3, 4)	9.	$-(c \vee e)$	8 t
(2, 3, 4)	10.	$-i$	2, 9 t
(1, 2, 3, 4)	11.	$-(w \vee p)$	1, 10 t
(1, 2, 3, 4)	12.	$-w \& p$	11 t
(1, 2, 3, 4)	13.	$-w$	12 t

Jadi $w \vee p \Rightarrow i,\ i \Rightarrow c \vee e,\ e \Rightarrow u,\ -c \,\&\, -u \ \models -w$ suatu argumen yang absah, berarti pernyataan majemuk $(w \vee p \Rightarrow i) \,\&\, (i \Rightarrow c \vee e) \,\&\, (e \Rightarrow u) \,\&\, (-c \,\&\, -u) \Rightarrow -w$ merupakan suatu totologi.

Contoh 5:

Konstruksikan penurunan kesimpulan dalam argumen:

$$a \Rightarrow b \vee c,\ b \Rightarrow -a,\ d \Rightarrow -c,\ \models a \Rightarrow -d$$

Penyelesaian:

1. $a \Rightarrow b \vee c$
2. $b \Rightarrow -a$
3. $d \Rightarrow -c$
4. a
5. $b \vee c$
6. $-b$
7. c
8. $-d$
9. $a \Rightarrow -d$

Sebagai latihan, lengkapilah penurunan kesimpulan dari premis-premisnya dengan nomor premis pada kolom terdepan dan alasannya pada kolom terakhir.

Contoh 6:

Konstruksikan keabsahan penurunan kesimpulan dalam argumen berikut!

Apabila hujan lebat dan angin kencang, maka terjadilah banjir. Jika terjadi banjir maka petani tidak panen padi. Anginnya kencang dan petani panen padi.

Kesimpulan: Tidak hujan lebat.

Penyelesaian:

Misalkan h = hujan lebat, a = angin kencang

b = terjadi banjir, p = petani panen padi.

Argumen di atas dapat dinyatakan dengan bahasa lambang sebagai berikut:

$$h \& a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow -p,\ a \& p,\ \models -h$$

(1)	1.	$h \& a \Rightarrow b$	p
(2)	2.	$b \Rightarrow -p$	p
(3)	3.	$a \& p$	p
(3)	4.	p	3 t
(2, 3)	5.	$-b$	2, 4 t
(1, 2, 3)	6.	$-(h \& a)$	1, 5 t
(1, 2, 3)	7.	$-h \vee -a$	6 t
(3)	8.	a	3 t
(1, 2, 3)	9.	$-h$	7, 8 t

Contoh 7:

Buktikanlah bahwa argumen berikut absah dengan mengkonstruksikan kesimpulannya.

Jika harga barang di toko itu rendah (r), maka (akan) banyak pembelinya (b). Toko itu terletak ditengah pemukiman penduduk (d) atau tidak banyak pembelinya. Toko itu tidak terletak di tengah pemukiman penduduk.

Kesimpulan: Harga barang di toko itu tidak rendah.

Penyelesaian: Dengan bahasa lambang argumen itu dapat dituliskan sebagai berikut:

$$r \Rightarrow b,\ d \vee -b,\ -d\ \models -r$$

1. $r \Rightarrow b$
2. $d \vee -b$

3. $-d$
4. $-b$
5. $-r$

Lengkapilah penurunan kesimpulan dari premis-premisnya dengan nomor-nomor premis pada kolom terdepan dan alasannya pada kolom terakhir.

Latihan 4

1. Periksalah keabsahan penurunan kesimpulan dalam setiap argumen berikut!

   i. $p, r, q \& p \Rightarrow -r \models -q$

   ii. $p, p \Rightarrow r, r \models p \vee q \Rightarrow r$

   iii. $q \& p \Rightarrow -r, p \Rightarrow r \models -(p \& q)$

2. Lengkapilah kontruksi penurunan kesimpulan dalam setiap argumen berikut dengan nomor-nomor premis yang digunakan tiap-tiap baris, nomor langkah dan alasan totologinya.

   i. $a \Rightarrow \mathrm{b}, -(b \vee c) \models -a$

   $a \Rightarrow \mathrm{b}$

   $-(b \vee c)$

   $-b \, \& -c$

   $-b$

   $-a$

   ii. $(a \& b) \vee (c \& d), a \Rightarrow -a \models c$

   $(a \& b) \vee (c \& d)$

   $a \Rightarrow -a$

   $-a$

   $-a \vee -b$

   $-(a \& b)$

$c \,\&\, d$
c

Konsistensi Sekumpulan Premis dan Bukti Tak Langsung

Telah dibicarakan mengenai mengkonstruksikan keabsahan suatu argumen. Namun, apa yang terjadi jika ternyata kita tidak berhasil membuktikan keabsahan penurunan suatu kesimpulan dari sekumpulan premis yang ditentukan? Atau dengan kata lain, apa yang terjadi jika sekumpulan premis tidak mencukupi untuk menghasilkan kesimpulan yang diharapkan? Ketidakberhasilan dalam pembuktian keabsahan suatu argumen, mungkin karena kita kurang mampu untuk membuktikan atau mungkin premis-premisnya tidak mencukupi untuk memperoleh kesimpulan yang diharapkan. Sekumpulan premis yang demikian disebut inkonsisten. Sekumpulan premis dikatakan inkonsisten apabila di antara premis-premis itu ada yang bernilai S.

Untuk memeriksa apakah sekumpulan premis itu konsisten atau inkonsisten, kita andaikan bahwa semua premis bernilai B. Apabila dari premis-premis yang diandaikan bernilai B itu dapat diturunkan secara logis <u>suatu kontradiksi</u>, maka sekumpulan premis tersebut inkonsisten. Aturan-aturan penurunan (penyimpulan) untuk memperoleh kontradiksi sama seperti aturan-aturan yang digunakan untuk memperoleh kesimpulan tertentu. Perbedaannya, pada penurunan untuk mendapatkan kesimpulan tertentu, kita berhenti setelah mendapatkan kesimpulan itu, sedangkan penurunan untuk kontradiksi, kita berhenti setelah diperoleh suatu kontradiksi. Contoh 9 memperlihatkan aturan-aturan penyimpulan logis yang digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu kumpulan premis yang inkonsisten.

Contoh 8:

Selidikilah bahwa premis-premis berikut inkonsisten?

$$a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c,\ d \Rightarrow \neg c,\ a \,\&\, d$$

Penyelesaian:

(1)	1.	$a \Rightarrow b$	p
(2)	2.	$b \Rightarrow c$	p
(3)	3.	$d \Rightarrow -c$	p
(4)	4.	$a \,\&\, d$	p
(4)	5.	a	4 t
(1, 2)	6.	$a \Rightarrow c$	1, 2 t
(1, 2, 4)	7.	c	5, 6 t
(4)	8.	d	4 t
(3, 4)	9.	$-c$	3, 8 t
(1, 2, 3, 4)	10.	$c \,\&\, -c$	7, 9 t

Perhatikan bahwa penurunan dari 4 premis pada contoh ini memperoleh suatu kontradiksi. Ini menunjukkan bahwa keempat premis tersebut inkonsisten.

Cara lain untuk menyelidiki konsisten sekumpulan premis ialah dengan membentuk pernyataan majemuk dari premis-premis itu yang dihubungkan dengan perangkai "&" serta menganggap bahwa setiap premis sebagai pernyataan yang bernilai B. Berdasarkan anggapan ini disusun tabel kebenaran sehingga tiap-tiap pernyataan tunggalnya akan diketahui nilai kebenarannya dan tampak pula kontradiksinya (lihat tabel 1).

Tabel 1.

Langkah Ke	(a	⇒	b)	&	(b	⇒	c)	&	(d	⇒	–	c)	&	(a	&	d)
1		B				B				B					B	
2														B		B
3	B								B							
4			B								B					
5					B							S				
6							B									

Dengan mengambil pengandaian bahwa semua premis bernilai B, dapat ditentukan nilai kebenaran setiap pernyataan tunggalnya. Premis *a & d* bernilai B, maka pernyataan tunggal *a* dan *d* masing-masing bernilai B. Pernyataan $a \Rightarrow b$ bernilai B dan *a* bernilai B, maka *b* bernilai B. Pernyataan $d \Rightarrow -c$ bernilai B dan *d* bernilai B, maka $-c$ bernilai B sehingga *c* bernilai S. Pernyataan $b \Rightarrow c$ bernilai B dan *b* bernilai B maka *c* bernilai B. Sehingga pernyataan *c* mempunyai nilai B dan S, kontradiksi terjadi. Oleh karena itu pengandaian harus diingkar, berarti tidak semua premis bernilai B.

Kecuali dengan cara-cara di atas, konsistensi sekumpulan premis itu dapat ditunjukkan dengan membuat tabel kebenaran dari pernyataan majemuk yang dibentuk dari premis-premis yang dirangkai dengan perangkai "&" seperti pernyataan majemuk pada cara kedua di atas. Apabila pernyataan majemuk itu selalu bernilai S untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya (premis-premis), maka sekumpulan premis itu inkonsisten. Tetapi jika sekurang-kurangnya ada satu baris dalam pernyataan majemuk (tabel kebenarannya) bernilai B, maka kumpulan premis itu konsisten untuk pernyataan tunggal-pernyataan tunggal yang nilai kebenarannya terletak pada baris itu. Pembaca dipersilakan mencoba menyusun tabel kebenaran dari:

$$(a \Rightarrow b) \& (b \Rightarrow c) \& (d \Rightarrow -c) \& (a \& d)$$

Benarkah bahwa pernyataan majemuk ini suatu totologi?

Teorema 5.4:

Himpunan pernyataan $A_1, A_2, \ldots, A_m$ inkonsisten apabila dari himpunan pernyataan itu dapat diturunkan suatu kontradiksi.

Bukti:

Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_m \models C \;\&\; -C$ untuk suatu pernyataan C merupakan argumen yang absah. Maka $A_1 \;\&\; A_2 \;\&\; \ldots \&\; A_m \Rightarrow C \;\&\; -C$ suatu totologi. C & – C adalah suatu kontradiksi, berarti pernyataan itu selalu bernilai S untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan C. Oleh karena itu pendahulu dari implikasi itu mesti bernilai S. Berarti sekurang-kurangnya ada satu di antara pernyataan-pernyataan A_1, A_2, ..., A_m bernilai S. Sehingga A_1, A_2, ..., A_m inkonsisten.

Contoh 9:

Tunjukkan bahwa premis-premis berikut inkonsisten!

$$a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c,\ -c \vee d,\ -a \Rightarrow d, -d$$

Penyelesaian:

1. $a \Rightarrow b$
2. $b \Rightarrow c$
3. $-c \vee d$
4. $-a \Rightarrow d$
5. $-d$
6. $-(-a)$
7. a
8. b
9. c
10. d
11. $-d \;\&\; d$

Lengkapilah penyelesaian ini dengan nomor-nomor premis dan alasan penurunan untuk setiap baris!

Selanjutkan kita akan menggunakan aturan cp (bukti bersyarat) dan pengertian himpunan premis yang inkonsisten untuk mengantarkan suatu metode pembuktian yang penting dalam matematika yang biasa disebut bukti tak langsung (bukti dengan kontradiksi atau bukti *reductio ad absurdum*). Sebagai ilustrasi akan dibuktikan keabsahan argumen pada contoh 5.9 dengan bukti *reductio ad absurdum*).

Contoh 10:

Buktikan keabsahan srgumen berikut dengan bukti *reductio ad absurdum*.

$$a \Rightarrow b \vee c,\ b \Rightarrow -a,\ d \Rightarrow -c \ \models\ a \Rightarrow -d$$

Bukti: Ingat bahwa $-(a \Rightarrow -d)$ ek $a \& d$. Kita harus menunjukkan bahwa premis-premis: $a \Rightarrow b \vee c,\ b \Rightarrow -a,\ d \Rightarrow -c,\ a \& d$ adalah sekumpulan premis yang inkonsisten.

(1)	1.	$a \Rightarrow b \vee c$	p
(2)	2.	$b \Rightarrow -a$	p
(3)	3.	$d \Rightarrow -c$	p
(4)	4.	$a \& d$	p (premis tambahan)
(4)	5.	a	4 t
(1, 4)	6.	$b \vee c$	1, 5 t
(4)	7.	d	4 t
(3, 4)	8.	$-c$	3, 7 t
(1, 3, 4)	9.	b	6, 8 t
(1, 2, 3, 4)	10.	$-a$	5, 9 t
(1, 2, 3)	11.	$a \& -a$	5, 10 t
(1, 2, 3)	12.	$a \& d \Rightarrow a \& -a$	4, 11 t
(1, 2, 3)	13.	$-(a \& d)$	12 t
(1, 2, 3)	14.	$a \Rightarrow -d$	13 t

Langkah-langkah pembuktian dengan metode bukti *reductio ad absurdum* dapat disusun secara berurutan sebagai berikut:

1. Ingkarlah konklusinya dan digunakan sebagai premis baru.
2. Premis baru ini bersama-sama dengan premis-premis yang ditentukan, turunkanlah suatu kontradiksi.
3. Apabila kontradiksi telah tercapai, maka konklusi yang diingkar itu sebagai kesimpulan logis dari premis-premis ditentukan.

Cara pembuktian ini berdasarkan teorema sebagai berikut:

Teorema 5.5:

$A_1, A_2, \ldots, A_m \models C$ suatu argumen yang absah, jika dari $A_1, A_2, \ldots, A_m$ dan – C dapat diturunkan suatu kontradiksi.

Bukti:

Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_m, - C \models D \,\&\, - D$ untuk suatu pernyataan D adalah suatu argumen yang absah.

Maka $A_1, A_2, \ldots, A_m \models - C \Rightarrow D \,\&\, - D$ pun suatu argumen yang absah. Ingat bahwa semua premis dari argumen yang absah bernilai B dan $- C \Rightarrow D \,\&\, - D$ pun bernilai B. Karena D & – D bernilai S maka – C harus bernilai S. Jadi C bernilai B.

Sehingga $A_1, A_2, \ldots, A_m \models C$ adalah argumen yang absah.

Berikut ini suatu contoh penggunaan teorema itu (pembuktian keabsahan suatu argumen dengan metode *reductio ad absurdum*).

Contoh 11:

Jika saya datang pertama kali di sekolah, maka saya harus bangun pagi-pagi, dan jika malamnya saya nonton bioskop, maka saya akan tidur terlambat. Jika saya tidur terlambat dan harus bangun pagi-pagi, maka saya hanya tidur selama 5 jam. Kenyataan, saya tidak tidur hanya selama 5 jam.

Kesimpulan: Saya tidak datang pertama kali di sekolah atau tidak nonton bioskop.

Buktikan keabsahan argumen tersebut dengan bukti *reductio ad absurdum*?

Bukti:

Misalkan a = Saya datang pertama kali di sekolah. b = Saya harus bangun pagi-pagi. c = Malam itu saya nonton bioskop. d = Saya (akan) tidur terlambat. e = Saya hanya tidur selama 5 jam.

Dengan pemberian simbol-simbol untuk tiap pernyataan itu, maka premis-premis dan kesimpulannya dapat dituliskan sebagai berikut:

Premis 1. $(a \Rightarrow b) \& (c \Rightarrow d)$

2. $d \;\&\; b \Rightarrow e$

3. $-e$

Kesimpulan: $-a \vee -c$

(1)	1.	$(a \Rightarrow b) \& (c \Rightarrow d)$	p
(2)	2.	$d \;\&\; b \Rightarrow e$	p
(3)	3.	$-e$	p
(4)	4.	$-(-a \vee -c)$	P (premis tambahan)
(4)	5.	$a \;\&\; c$	4 t
(1)	6.	$a \Rightarrow b$	1 t
(4)	7.	a	5 t
(4)	8.	c	5 t
(1)	9.	$c \Rightarrow d$	1 t
(1, 4)	10.	b	6, 7 t
(1, 4)	11.	d	8, 9 t
(1, 4)	12.	$d \;\&\; b$	10, 11 t
(1, 2, 4)	13.	e	2, 12 t
(1, 2, 3, 4)	14.	$-e \;\&\; e$	3, 13 t
(1, 2, 3)	15.	$-(-a \vee -c) \Rightarrow -e \& e$	4, 14 cp
(1, 2, 3)	16.	$-a \vee -c$	15 t

Dengan menggunakan nilai-nilai kebenaran dari premis-premis dan kesimpulannya dapat ditunjukkan keabsahan argumen itu, sebagai berikut:

Andaikan kesimpulan $-a \vee -c$ bernilai S, berarti $-a$ dan $-c$ masing-masing bernilai S, sehingga *a* dan *c* masing-masing bernilai B. Ingat setiap premis bernilai B. Pada premis pertama dapat ditentukan bahwa *b* dan *d* masing-masing bernilai B sebab *a* dan *c* masing-masing bernilai B. Seterusnya dari premis kedua dapat dipastikan bahwa *e* bernilai B, sebab *d & b* bernilai B. Padahal – *e* bernilai B (premis ketiga), sehingga dicapai suatu kontradiksi. Oleh karena itu pengandaian di atas harus diingkar, berarti $-a \vee -c$ bernilai B yang merupakan kesimpulan dari premis-premis yang ditentukan.

Latihan 5

1. Buktikanlah bahwa argumen-argumen berikut tidak absah dengan menentukan nilai-nilai kebenaran setiap pernyataan tunggalnya!
   1. $(a \Rightarrow b) \& (c \Rightarrow d), -(a \& c) \Rightarrow e \models t$
   2. $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, -p \vee -q \models -q \vee -r$
   3. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \& (d \Rightarrow b) \& (d \Rightarrow p), e \vee c, u \Rightarrow -v, (x \Rightarrow u) \& (v \Rightarrow y) \models d \Rightarrow e$
   4. $-(-q \vee p), p \vee -r, q \Rightarrow r \models r$
   5. $a \Rightarrow (b \vee c), b \Rightarrow d \& e, (d \Rightarrow e) \Rightarrow u, a \vee u \models p \Leftrightarrow r$

2. Tulislah argumen-argumen berikut dalam bahasa lambang sesuai dengan lambang dalam kurung dan buktikanlah bahwa argumen-argumen tersebut tidak absah dengan menentukan nilai-nilai kebenaran setiap pernyataan tunggalnya.
   1. Hutan yang gundul (g) sama artinya dengan timbul banjir (b). Apabila timbul banjir maka kesuburan tanah berkurang (t). Kesuburan tanah tidak berkurang atau orang hutan merasa bahagia (h). Apabila hutan tidak gundul maka otang hutan merasa bahagia. Orang hutan tidak bahagia.
      Kesimpulan: Hutan itu gundul.
   2. Jika orang itu kaya (k), maka ia dapat hidup mewah (h) dan tidak miskin. Jika orang itu miskin (m), maka ia selalu merasa keku-

rangan (r). Apabila orang itu serakah (s), maka jika ia selalu merasa kekurangan, maka ia tidak bahagia.

Kesimpulan: Orang itu kaya sama saja dengan orang itu miskin.

BAB 4
Himpunan dan Subhimpunan

A. Himpunan

Konsep himpunan adalah suatu konsep mendasar dalam semua cabang ilmu matematika. Secara intutif, sebuah himpunan adalah setiap daftar, kumpulan atau kelas objek-objek yang didefinisi secara jelas. Objek-objek dalam himpunan-himpunan sebagaimana akan kita lihat dari contoh-contoh yang diberikan, dapat berupa apa saja: bilangan, orang, surat, sungai, dan sebagainya. Objek-objek ini disebut elemen-elemen atau anggota-anggota dari himpunan.

Meskipun kelak akan kita pelajari himpunan sebagai kesatuan-kesatuan abstrak, di sini kita daftarkan sepuluh contoh khusus mengenai himpunan.

Contoh 1 : Bilangan-bilangan 1, 3, 7 dan 10
Contoh 2 : Jawab-jawab dari persamaan $x^2 - 3x - 2 = 0$
Contoh 3 : Huruf-huruf hidup dari alfabet: a, e, I, o, dan u
Contoh 4 : Penduduk bumi
Contoh 5 : Siswa yang bernama Tom, Dick, dan Harry
Contoh 6 : Siswa yang tidak hadir di sekolah
Contoh 7 : Negara-negara Inggris, Prancis, dan Denmark
Contoh 8 : Ibukota-ibukota dari benua Eropa

Contoh 9 : Bilangan-bilangan 2, 4, 6, 8, ...
Contoh 10 : Sungai-sungai di Amerika Serikat

Perhatikan bahwa himpunan-himpunan dalam contoh-contoh di atas yang bernomor ganjil didefinisikan, maksudnya diberikan dengan mendaftarkan anggota-anggotanya secara jelas; dan himpunan-himpunan dalam contoh-contoh bernomor genap didefinisikan dengan menyatakan sifat-sifatnya, yaitu aturan-aturan yang menetapkan apakah suatu objek tertentu adalah anggota dari sebuah himpunan atau tidak.

1. Notasi

Himpunan-himpunan akan selalu dinyatakan dengan huruf-huruf besar.

A, B, X, Y, ...

Elemen-elemen dalam himpunan-himpunan ini akan selalu dinyatakan dengan huruf-huruf kecil.

a, b, x, y, ...

Bila kita mendefinisikan suatu himpunan tertentu dengan menyatakan secara jelas anggota-anggota, misalnya, A terdiri atas bilangan-bilangan 1, 3, 7, dan 10, maka kita menulis

$$A = \{1, 3, 7, 10\}$$

Yaitu, elemen-elemen dipisahkan oleh koma-koma dan ditutup dalam tanda-kurung { }. Kita menyebut bentuk ini bentuk pendaftaran *(Tabular form)* dari himpunan. Tetapi bila kita mendefinisikan suatu himpunan tertentu dengan menyatakan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh elemen-elemennya, misalnya, B adalah himpunan dari semua bilangan-bilangan genap, maka kita pergunakan suatu huruf, biasanya x, untuk menyatakan sebarang elemen dan kita tulis.

$$B = \{x \mid x \; genap\}$$

Yang berbunyi "B adalah himpunan dari bilangan-bilangan x di mana x bilangan genap". Kita menyebut bentuk ini bentuk pembangun-himpunan/rincian *(set-buider form)* dari himpunan. Perhatikan bahwa garis vertikal "|" dibaca "di mana".

Untuk memberikan gambaran penggunaan notasi di atas, kita tuliskan kembali himpunan-himpunan dalam contoh 1-10 kita nyatakan masing-masing himpunan dengan A_1, A_2,..., A_{10}

Contoh 2.1: A_1 = $\{1, 3, 7, 8\}$

Contoh 2.2: A_2 = $\{x^2 - 3x - 2 = 0\}$

Contoh 2.3: A_3 = {a, e, I, o, u}

Contoh 2.4: A_4 = $\{x \mid x\ adalah$ penduduk bumi}

Contoh 2.5: A_5 = {Tom, Dick, dan Harry}

Contoh 2.6: A_6 = $\{x \mid x\ adalah\ seorang$ Siswa dan x tidak hadir}

Contoh 2.7: A_7 = {Inggris, Prancis, dan Denmark}

Contoh 2.8: A_8 = $\{x \mid x\ adalah$ sebuah ibu kota dan x terdapat di Eropa}

Contoh 2.9: A_9 = $\{2, 4, 6, 8, \ldots.\}$

Contoh 2.10: A_{10}= $\{x \mid x\ adalah$ sebuah Sungai dan x terdapat di di Amerika Serikat}

Jika suatu objek x adalah elemen dari sebuah himpunan A, artinya A mengandung x sebagai salah satu dari elemen-elemennya, maka kita tulis:

$$x\ \varepsilon\ A$$

Yang juga dapat dibaca "x termaksud A" atau "x di dalam A". Jika di pihak lain, suatu objek x bukanlah anggota dari sebuah himpunan A, artinya A tidak mengandung x sebagai salah satu dari elemen-elemennya, maka kita tulis:

$$x \not\varepsilon A$$

Adalah suatu kebiasaan yang umum dalam matematika untuk menuliskan sebuah garis tegak " | " atau " \ " melalui suatu lambang untuk menyatakan arti kebalikan atau sanggahan dari arti lambang tersebut.

Contoh 3.1:

Misalkan A = {a, e, i, o, u}, maka $a\ \varepsilon A, b\ \varepsilon\ A, e \not\varepsilon A, f \not\varepsilon A$

Contoh 3.2:

Misalkan B = $\{x \mid x\ adalah\ genap\}$ maka $3 \not\varepsilon B, 6\ \varepsilon\ B, 11 \not\varepsilon B, 14\ \varepsilon\ B$

2. Himpunan-himpunan Berhingga dan Tak Terhingga

Himpunan-himpunan dapat berhingga atau tak terhingga, secara intutif, sebuah himpunan adalah berhingga bila ia terdiri dari sejumlah tertentu elemen-elemen yang berbeda, artinya, bila kita menghitung elemen-elemen yang berbeda dari himpunan ini, maka proses perhitungannya dapat berakhir. Bila tidak demikian, maka himpunannya adalah tak terhingga. Kelak dalam salah satu bab akan kita berikan definisi yang tepat dari himpuan-himpunan berhingga dan tak terhingga.

Contoh 4.1:

Misalkan M adalah himpunan dari hari-hari dalam seminggu, maka M berhingga.

Contoh 4.2: Misalkan N = $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ Maka N tak berhingga

Contoh 4.3:

Misalkan $P = \{x \mid x\ adalah\ sebuah\ sungai\ di\ Bumi\}$, meskipun sulit menghitung jumlah sungai-sungai di bumi, tetapi P berhingga.

3. Kesamaan Himpunan-Himpunan

Himpunan A sama dengan himpunan B jika keduanya bersama-sama memiliki anggota-anggota yang sama, jika setiap elemen yang termasuk A juga termasuk B dan jika setiap elemen yang termasuk B juga termasuk A. Kita menyatakan kesamaan himpunan-himpunan A dan B dengan:

$$A = B$$

Contoh 5.1:

Misalkan A = $\{1, 2, 3, 4\}$ dan B = $\{3, 1, 4, 2\}$. Maka $A = B$ yaitu, $\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$, karena tiap-tiap elemen 1,2,3 dan 4 dari A termasuk B dan tiap-tiap elemen 3,1,4 dan 2 dari B termasuk A.

Karena itu perhatikan bahwa sebuah himpunan tidak berubah apabila elemen-elemennya disusun kembali.

Contoh 5.2:

Misalkan C = $\{5, 6, 5, 7\}$ dan D = $\{7, 5, 7, 6\}$ maka C = D yaitu, $\{5, 6, 5, 7\}$ = $\{7, 5, 7, 6\}$ karena tiap-tiap elemen D termasuk C. Perhatikan bahwa sebuah himpunan tidaklah berubah apabila elemen-elemennya diulangi. Juga himpunan $\{5, 6, 7\}$ sama dengan C dan D.

Contoh 5.3:

Misalkan $E = \{x \mid x^2 - 3x = -2\}, F = \{2, 1\}$ dan $G = \{1, 2, 2, 1\}$, maka $E = F = G$

4. Himpunan Nol

Himpunan nol adalah baik untuk memperkenalkan konsep himpunan nol, yaitu, suatu himpunan yang tidak mengandung elemen-elemen. Himpunan ini kadang-kadang disebut himpunan nol. Kita mengatakan bahwa himpunan demikian adalah hampa atau kosong dan tidak menyatakannya dengan lambang $\emptyset$.

Contoh 6.1:

Misalkan A adalah himpunan dari orang-orang di dunia yang lebih tua daripada usia 200. Menurut statistika a adalah himpunan kosong.

Contoh 6.2:

Misalkan $B = \{x \mid x^2 = 4, x \; adalah \; ganjil\}$, maka B adalah himpunan kosong

5. Subhimpunan

Jika semua elemen sebuah himpunan A adalah juga sebuah himpunan B, maka A disebut sub himpunan dari B atau lebih khusus lagi, A adalah sub himpunan dari B berarti jika $x \, \varepsilon \, A$ maka. Kita nyatakan hubungan ini dengan menuliskan:

$$A \subset B$$

yang juga dapat dibaca "A terkandung dalam B".

Contoh 7.1: himpunan C = 1,3,5 adalah sub himpunan dari D=$\{5,4,3,2,1\}$, karena tiap-tiap bilangan 1,3 dan 5 yang termasuk C juga termasuk D.

Contoh 7.2: himpunan E=$\{2,4,6\}$ adalah sub himpunan dari F=$\{6,2,4,\}$ karena tiap-tiap bilangan 2, 4, dan 6 yang termasuk E juga termasuk F. Perhatikan bahwa pada khususnya E=F. Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa setiap himpunan adalah sub himpunan dari dirinya sendiri.

Contoh 7.3:

Misalkan G=$\{x \mid x\ adalah\ genap\}$, artinya G=$\{2,4,6,\dots,\}$, dan misalkan F= $\{x \mid x\ adalah\ sebuah\ bilangan\ positif\ dari\ 2\}$ artinya $F = \{2,4,8,16,\dots\}$, Maka $F \subset G$ artinya F terkandung dalam G.

Dengan definisi sub himpunan di atas, maka kita dapat nyatakan kembali definisi kesamaan dua himpunan.

Definisi 1.1: dua himpunan A dan B adalah sama, yaitu A= B, jika dan hanya jika A ⊂ B dan B ⊂ A

Jika A subhimpunan dari B, maka kita dapat pula menulis

$$B \supset A$$

Yang dibaca "B adalah sub himpunan dari A" atau "B mengandung A". Selanjutnya, kita menulis:

$$A \not\subset B \text{ atau } B \not\supset A$$

Jika A bukanlah sub himpunan B.

Sebagai kesimpulannya, kita menyatakan:

Pernyataan 1.1: himpunan nol $\emptyset$ dipandang sebagai sub himpunan dari setiap himpunan.

Pernyataan 1.2: jika A bukanlah sub himpunan B, yaitu, jika A⊄B, maka ada sekurang-kurangnya satu elemen A yang bukan anggota B

6. Sub Himpunan Sejati

Karena setiap himpunan A adalah sub himpunan dari dirinya sendiri, maka kita menyebut B besar himpunan sejati dari A jika, pertama, B adalah sub himpunan A dan, kedua, B tidak sama dengan A. Secara lebih singkat, B adalah sub himpunan sejati dari A, jika:

$$B \subset A \text{ dan } B \neq A$$

Dalam beberapa buku sebutan "B sub himpunan A" dinyatakan oleh:

$$B \subseteq A$$

Dan "B subhimpunan sejati A" dinyatakan oleh:

$$B \subset A$$

Kita akan tetap mempergunakan notasi terdahulu di mana kita tidak membedakan antara sub himpunan dan sub himpunan sejati.

7. Hal Dapat-Diperbandingkan

Dua himpunan A dan B dikatakan dapat diperbandingkan *(comparable)* jika:

$$A \subset B \text{ dan } B \subset A$$

yaitu, jika salah satu himpunan adalah sub himpunan dari himpunan lainnya. Lebih lanjut, dua himpunan A dan B dikatakan tidak dapat diperbandingkan jika:

$$A \not\subset B \text{ dan } B \not\subset A$$

Perhatikan bahwa jika A tidak dapat-diperbandingkan dengan B, maka ada elemen A yang tidak terdapat dalam B dan juga ada elemen B yang tidak terdapat dalam A.

Contoh 8.1:

Misalkan A =$\{a, b\}$ Dan B =$\{a, b, c\}$ maka A dapat diperbandingkan dengan B karena A adalah sub himpunan B.

Contoh 8.2:

Misalkan R = {a, b } dan b = {a, b, c} karena A dapat diperbandingkan dengan B karena $a\ \varepsilon\ R$ dan $a \not\varepsilon\ S$ dan $e \not\varepsilon\ S$ dan $e\ \varepsilon\ R$

8. Teorema dan Bukti

Dalam matematika, kebanyakan pernyataan-pernyataan dapat dibuktikan benar dengan menggunakan anggapan-anggapan dan definisi-definisi sebelumnya. Pada kenyataannya, inti matematika terdiri atas teorema-teorema dan pembuktian-pembuktiannya. Kita sekarang membuktikan teorema kita yang pertama.

Teorema 1.1: jika A adalah sub himpunan B dan AB subhimpunan C maka A adalah sub himpunan C, yaitu jika:

$A \subset B$ dan $B \subset C$ maka artinya $A \subset C$

Bukti (perhatikan bahwa kita harus memperhatikan bahwa setiap elemen A adalah juga elemen C). Misalnya x suatu elemen A, yaitu $x\ \varepsilon\ A$. Karena A adalah sub himpunan B. maka x juga termasuk B, yaitu $x\ \varepsilon\ B$ tetapi, menurut hipotesis, $B \subset C$ oleh karena itu setiap elemen B termasuk x, adalah juga anggota C. kita telah memperhatikan bahwa jika $x\ \varepsilon\ A$ maka $x\ \varepsilon\ C$. Dengan demikian menurut definisi, $A \subset C$.

9. Himpunan dari Himpunan-himpunan

Kerap kali terjadi objek-objek sebuah himpunan adalah sebuah himpunan-himpunan, sebagai contoh, himpunan dari sebuah subhimpunan A. untuk menghindari sebuah "himpunan dari himpunan-himpunan", maka biasanya secara praktis disebut "keluarga himpunan-himpunan" atau "kelas himpunan-himpunan" maka dalam keadaan ini dan untuk menghindari kekeliruan, kita akan menggunakan huruf-huruf tulisan tangan (*script*):

A, B

Untuk menyatakan keluarga-keluarga atau kelas-kelas dari himpunan-himpunan, karena huruf-huruf besar telah menyatakan unsur-unsurnya.

Contoh 9.1: Dalam ilmu ukur kita biasanya menyatakan "suatu keluarga garis-garis" atau "suatu keluarga kurva-kurva" karena garis-garis dan kurva-kurva mereka ini sendiri adalah himpunan-himpunan dari titik-titik.

Contoh 9.2: Himpunan $\{\{2,3\},\{2\},\{5,6\}\}$ adalah keluarga himpunan-himpunan. Anggota-anggotanya adalah himpunan-himpunan $\{2,3\},\{2\}, dan\ \{5,6\}$

Secara teoritis, dapat terjadi bahwa sebuah himpunan mempunyai beberapa anggota yang mana mereka sendiri adalah himpunan-himpunan dan beberapa anggota lainnya bukanlah himpunan-himpunan, meskipun dalam setiap pemakaian teori himpunan kasus ini jarang muncul.

Contoh 9.3:

Misalkan $A = \{2,\{1,3\},4\ \{2,5\}\}$ maka A bukanlah keluarga himpunan-himpunan; di sini beberapa elemen A adalah himpunan-himpunan dan beberapa tidak.

10. Himpunan Semesta

Dalam setiap pemakaian teori himpunan, semua himpunan yang ditinjau adalah subhimpunan dari sebuah himpunan tertentu. Himpunan ini disebut himpunan semesta atau semesta dari uraian *(universe of discourse)*. Kita nyatakan himpunan ini dengan U.

Contoh 10.1: Dalam ilmu ukur bidang, himpunan semesta terdiri dari sebuah titik-titik dalam bidang.

Contoh 10.2: Dalam studi kependudukan, himpunan semesta terdiri dari semua orang di dunia.

11. Himpunan Kuasa

Keluarga dari semua subhimpunan sebuah himpunan S dikatakan himpunan kuasa dari S. kita nyatakan himpunan kuasa dari S dengan

Contoh 11.1: Misalkan $M = \{a, b\}$, maka

$$2^M = \{\{a, b\}. \{a\}, \{b\}\ \emptyset\}$$

Contoh 11.2: Misalkan $T = \{4, 7, 8\ \}$, maka

$$2^T = \{T, \{4, 7\}. \{4, 8\}, \{7, 8\ \}, \{4\}, \{7\}, \{8\}\ \emptyset\}$$

Jika sebuah himpunan S besar adalah terbatas, katakanlah S mempunyai n elemen, maka himpunan-himpunan kuasa dari S dapat diperlihatkan mempunyai elemen-elemen seebanyak 2^n ini adalah salah satu alasan mengapa kelas dari subhimpunan-subhimpunan S disebut himpunan kuasa dari S dan dinyatakan 2^s.

12. Himpunan-Himpunan Terpisah

Jika himpunan-himpunan A dan B tidak mempunyai elemen-elemen yang dimiliki bersama, artinya jika tidak ada elemen A yang terdapat dalam B dan tidak ada elemen B yang terdapat dalam A, maka kita katakan bahwa A dan B terpisah.

Contoh 12.1:

Misalkan A = $\{1,3, 7, 8\ \}$ dan $B = \{2, 4, 7, 9\}$, maka A dan B tidaklah terpisah karena 7 terdapat dalam dua himpunan, yaitu $7\ \varepsilon\ A$ dan $7\ \varepsilon\ B$

Contoh 12.2:

Misalkan A adalah bilangan-bilangan positif dan B bilangan-bilangan negatif, maka A dan B terpisah karena tidak ada bilangan yang serempak positif dan negatif.

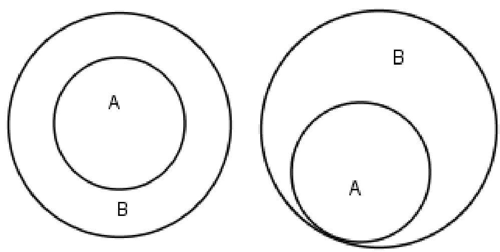
Contoh 12.3:

Misalkan $E = \{x, y, z\}$ dan $F = \{r, s, t\}$, maka E dan F terpisah.

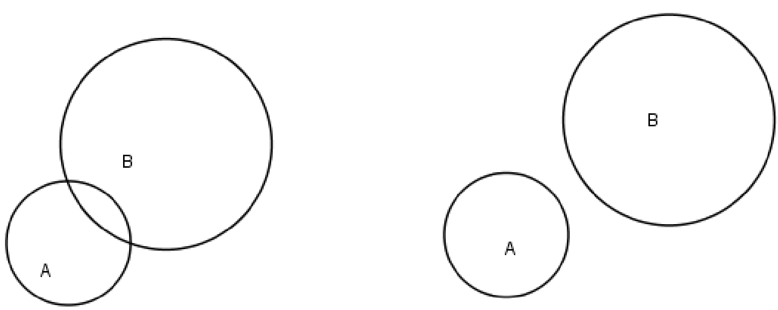
13. Diagram-Diagram Venn-Euler

Suatu cara yang sederhana dan instruktif untuk menggambarkan hubungan antara himpunan-himpunan adalah dengan menggunakan apa yang disebut diagram-diagram venn-euler, atau secara singkat diagram-diagram venn. Di sini kita nyatakan sebuah himpunan dengan suatu daerah bidang, biasanya dibatasi oleh sebuah lingkaran.

Contoh 13.1: Andaikan $A \subset B$ dan, katakan, $A \neq B$, maka A dan B dapat dinyatakan dengan salah satu diagram berikut:

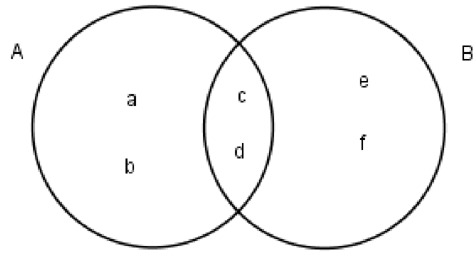


Contoh 13.2: Andaikan A dan B tidak dapat diperbandingkan. Maka A dan B dapat dinyatakan diagram sebelah kanan jika mereka terpisah, atau diagram sebelah kiri jika mereka tidak terpisah.



Contoh 13.3:

Misalkan A = $\{a, b, c, d\}$ dan B = $\{c, d, e, f\}$. Maka kita menggambarkan diagram ini dengan suatu diagram Venn yang berbentuk



Dalam ilmu berhitung kita belajar menjumlahkan, mengurangkan dan mengalikan, yaitu kita menetapkan untuk setiap pasangan bilangan-bilangan x dan y suatu bilangan $x + y$ yang disebut penjumlahan x dan $y, x - y$ yang disebut selesi x dan y, dan bilangan xy yang disebut perkalian-perkalian bilangan-bilangan. Dalam bab ini kita definisikan operasi-operasi perpanduan, perpotongan dan selisih himpunan-himpunan, yaitu kita akan menetapkan himpunan-himpunan baru untuk pasangan himpunan-himpunan A dan B. Kelak suatu bab kita akan lihat bahwa operasi-operasi himpunan ini berkelakuan hampir sama dengan operasi-operasi pada bilangan-bilangan di atas.

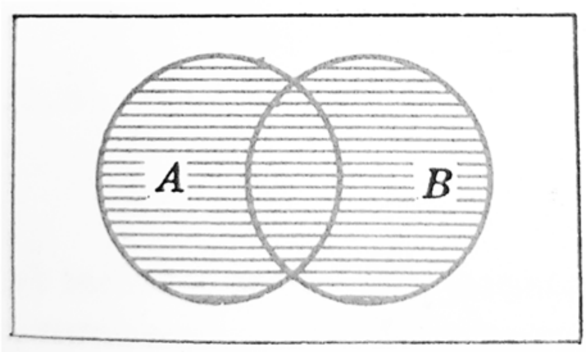
14. Perpaduan

Perpaduan himpunan-himpunan A dan B adalah himpunan dari semua elemen-elemen yang termaksuk dalam A dan B atau keduanya. Kita nyatakan perpaduan A dan B dengan

$$A \cup B$$

Yang bisanya dibaca “perpaduan A dan B”.

Contoh 1.1: Dalam diagram-Venn pada Gambar 2-1, kita telah memberi arsiran untuk A ∪ B, yakni daerah A dan daerah B.



Gambar 2-1. A ∪ B yang diberi arsiran

Contoh 1.2:

Misalkan $S = \{a, b, c, d\}$ dan $T = \{f, b, d, g\}$.

Maka

$$S \cup T = \{a, b, c, d, f, g\}$$

Contoh 1.3:

Misalkan P himpunan bilangan-bilangan rill positif dan Q himpunan bilangan-bilangan ril negatif. Maka $P \cup Q$, yaitu perpanduan P dan Q, terdiri dari semua bilangan-bilangan rill kecuali bilangan nol.

Perpaduan A dan B dapat didefinisikan secara ringkas oleh

$$A \cup B = \big\{\{x\}\big|\, x\,\varepsilon\, A\ atau\ x\,\varepsilon\, B\big\}$$

Pernyataan 2.1: sesuai dengan definisi perpanduan dua buah himpunan maka $A \cup B$ dan $B \cup A$ adalah sama. Jadi berarti:

$$A \cup B = B \cup A$$

Pernyataan 2.2: A dan B kedua-duanya selalu berupa subhimpunan-subhimpunan dari $A \cup B$, yaitu:

$$A \subset (A \cup B) \text{ dan } B \subset (A \cup B)$$

Dalam beberapa buku, perpaduan A dan B dinyatakan oleh A + B dan disebutkan penjumlahan himpunan teoretik A dan B atau, secara singkat, penjumlahan A dan B.

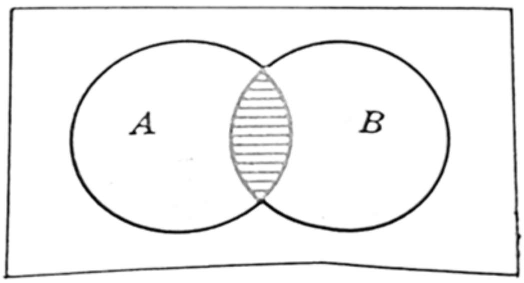
15. Perpotongan

Perpotongan himpunan-himpunan A dan B adalah himpunan dari elemen-elemen yang dimiliki berasama oleh A dan B, yaitu elemen-elemen yang termasuk A dan juga termasuk B. kita nyatakan perpotongan A dan B dengan

$$A \cap B$$

Yang dibaca “perpotongan A dan B”

Contoh 2.1: Dalam diagram-Venn pada Gambar 2-3, kita telah beri arsiran untuk A-B, yaitu didaerah yang dimiliki bersama oleh A dan B.



Gambar 2-2. $A \cap B$ yang diberi arsiran

Contoh 2.2:

Misalkan $S = \{a, b, c, d\}$ dan $T = \{f, b, d, g\}$, maka

$$S \cap T = \{b, d\}$$

Contoh 2.3:

Mislkan $V = \{2, 4, 6, \ldots.\}$, yaitu kelipatan dari 2 ; dan misalkan $W = \{3, 6, 9, \ldots.\}$, yaitu kelipatan dari 3, maka

$$V \cap W = \{6, 12, 18, \ldots\}$$

Perpotongan A dan B dapat juga didefenisikan secara ringkas oleh

$$A \cap B = \{x \mid x \,\varepsilon\, A, x \,\varepsilon\, B\}$$

Di sini, tanda koma mempunyai arti yang sama dengan “dan”.

Pernyataan 2.3: Sesuai dengan defenisi perpotongan dua buah himpunan, maka:

$$A \cap B = B \cap A$$

Pernyataan 2.4: Setiap himpunan-himpunan A dan B mengandung $A \cap B$ sebagai subhimpunan, jadi,

$$(A \cap B) \subset A = (A \cap B) \subset B$$

Pernyataan 2.5: Jika himpunan-hmpunan A dan B tidak mempunyai elemen-elemen yang dimiliki bersama, jadi berarti A dan B terpisah maka perpotongan A dan B adalah himpunan kosong, yaitu $A \cap B = \emptyset$.

Dalam beberapa buku, terutama menegnai teori kemungkinan (probabilitas), maka perpotongan A dan B dinyatakan dengan AB dan disebut perkalian himpunan teoretik A dan B atau, secara singkat A kali B.

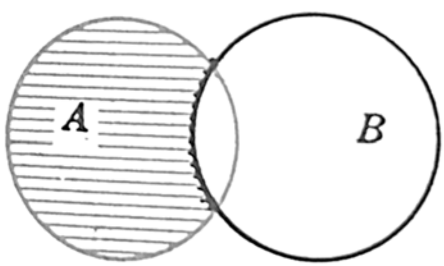
16. Selisih

Selisih himpunan-himpunan A dan B himpunan elemen-elemen yang termasuk A tetapi tidak termasuk B. Kita nyatakan selisih A dan B dengan

$$A - B$$

Yang dibaca "selisih A dan B" atau, secara singkat "A kurang B".

Contoh 3.1: Dalam diagram-Venn dalam Gambar 2-3, kita telah beri arsiran untuk A – B. yaitu daerah di dalam A yang adalah bukan bagian dari B.



Gambar 2-3. A – B yang diberi arsiran

Contoh 3.3:

Misalkan R himpunan bilangan-bilangan rill dan Q himpunan bilangan-bilangan rasional;, maka R _Q terdiri dari bilangan-bilangan irasional

Selisih A dan B dapat juga didefinisikan secara ringkas oleh

$$A - B = \{x \mid x \,\varepsilon\, A, x \,\varepsilon\, B\}$$

Pernyataan 2.6: Himpunan A mengandung A – B sebagai subhimpunan, jadi berarti

$$(A - B) \subset A$$

Pernyataan 2.7: Himpunan-himpunan $(A - B)$, $A \cap B$ dan $(B - A)$ saling terpisah, artinya perpotongan setiap dua buah himpunan diatas adalah himpunan nol.

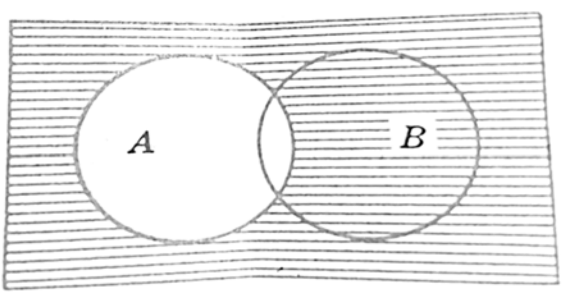
Selisih dari A dan B kadang-kadang dinyatakan oleh A/B atau $A \sim B$

17. Komplemen

Komplemen dari sebuah himpunan A adalah himpunan dari elemen-elemen yang tidak termasuk A, yaitu, selisih dari himpunan semesta ∪ dan A. Kita nyatakan komplemen dari A dengan

$$A'$$

Contoh 4.1: Dalam diagram Venn dalam gambar 2-4, kita beri arsiran untuk komplemen dari A, yaitu daerah di luar A. Di sini kita menganggap bahwa himpunan semesta ∪ terdiri dari daerah empat persegi panjang.



Gambar 2-4. A'yang diarsir

Contoh 4.2:

Misalkan himpunan semesta ∪ adalah alphabet Inggris dan

$T = \{a, b, c\}$. Maka,

$T' = \{d, e, f, \dots, y, z\}$

Contoh 4.3:

Misalkan $E = \{2,4,6, \dots\}$, yaitu bilangan-bilangan genap. Maka $E' = \{1, 3, 5, \dots\}$, yaitu bilangan-bilangan ganjil. Di sini kita menganggap himpinan semesta adalah bilangan-bilangan asli 1, 2, 3, …

Komplemen A dapat juga didefenisikan secara singkat oleh

$$A' = \{\, x \mid x\ \varepsilon\ \cup, x\ \varepsilon\ A\,\}$$

Atau secara singkat

$$A' = \{\, x \mid x\ \varepsilon\ A\,\}$$

Kita nyatakan beberapa pernyataan mengenai himpunan-himpunan yang merupakan akibat langsung dari definisi komplemen himpunan.

Pernyataan 2.8: Penggabungan sebarang himpunan A dan komplemen A' adalah himpunan semesta, yaitu:

$$A \cup A' = \cup$$

Selanjutnya, himpunan A komplemen A' terpisah, yaitu

$$A \cap A' = \emptyset$$

Pernyataan 2.9: Komplemen himpunan ∪ adalah komplemen himpunan nol ∅, dan begitu pula sebaliknya, yaitu

$$U' = \emptyset \text{ dan } \emptyset' = U$$

Pernyataan 2.10: Komplemen dari komplemen himpunan A adalah himpunan A sendiri. Secara lebih singkat

$$(A')' = A$$

Pernyataan kita yang berikut memperlihatkan bagaimana selisih dua buah himpunan dapat didefinisikan dalam komplemen subuah himpunan dan perpotongan dua buah himpunan. Lebih terinci, kita peroleh hubungan mendasar berikut:

Pernyataan 2.11: Selisih A dan B sama dengan perpotongan A dan komplemen B.

$$A - B = A \cap B'$$

Bukti dari pernyataan 2.11 sebagai akibat langsung dari definisi:

$$A - B = \{x \mid x \,\varepsilon\, A \,, x \,\varepsilon\, B\} = \{x \mid x \,\varepsilon\, A \,, x \,\varepsilon\, B'\} = A \cap B'$$

18. Operasi-Operasi pada Himpunan-himpunan yang Dapat Dibandingkan

Operasi-operasi perpaduan, perpotongan, selisih, komplemen mempunyai sifat-sifat yang sederhana apabila himpunan-himpunan ditinjau dapat diperbandingkan. Teorema-teorema berikut dapat dibuktikan:

Teorema 2.1: Misalkan A subhimpunan B, maka perpotongan A dan B adalah A, jadi, bila:

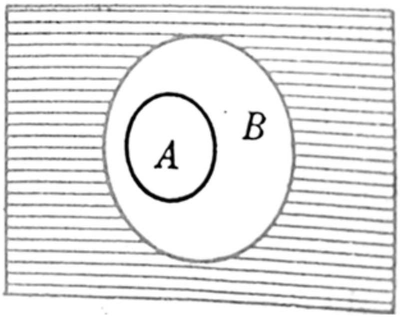
$$A \subset B \text{ maka } A \cap B = A$$

Teorema 2.2: Misalkan A subhimpunan B, maka perpaduan A dan B adalah B, jadi, bila:

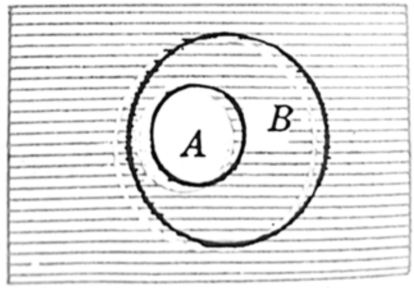
$$A \subset B \text{ maka } A \cup B = B$$

Teorema 2.3: Misalkan A sebuah subhimpunan B, maka B' adalah subhimpunan A', yaitu jika, $A \subset B$ maka $B' \subset A'$

Kita gambarkan Teorema 2.3 dengan diagram Venn dalam Gambar 2-5 dan 2-6. Perhatikan bagaimana daerah dari B' terkandung dalam daerah A'



Gambar 2-5. B' yang diarsir



Gambar 2-6. A' yang diarsir

Teoreman 2.4: Misalkan A sebuah himpunan dari B. maka perpaduan A dan (B – A) adalah B, yaitu, bila:

$$A \subset B \text{ maka } A \cup (B - A) = B$$

BAB 5

Fungsi

A. Definisi Fungsi

Andaikan untuk tiap-tiap elemen dalam sebuah himpunan A ditetapkan melalui beberapa macam cara, sebuah elemen tunggal dari himpunan B. Kita menyebut penetapan demikian suatu fungsi. Jika kita memisahkan f menyatakan penetapan ini, maka kita tuliskan

$$f: A \rightarrow B$$

Yang berbunyi "f adalah fungsi dari A ke dalam B". himpunan A disebut *ranah* (domain) dari fungsi f dan B disebut ko-ranah *(co-domain)* dari f. Selanjutnya, jika $a \in A$ maka elemen dalam B yang sama ditetapkan untuk a disebut bayangan *(image)* dari a dinyatakan oleh:

$$f(a)$$

Yang berbunyi "f dari a".

Kita daftarkan sejumlah contoh-contoh instruktif dari fungsi-fungsi.

Contoh 1.1: Misalkan f menetapkan tiap-tiap bilangan riil kuadratnya, yaitu untuk setiap bilangan riil, $f(x) = x^2$. Ranah dan ko-ranah dari f kedua-duanya adalah bilangan-bilangan riil,

$$f: R^{\#} \rightarrow R^{\#}$$

Bayangan dari -3 adalah 9; oleh karena itu kita dapat pula menulis $f\ (-3) = 9$ atau $f: -3 \rightarrow 9$.

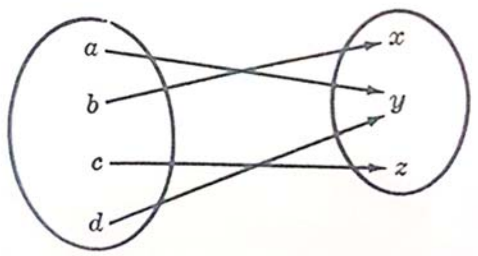
Contoh 1.2: Misalkan f menetapkan ibukota tiap-tiap negara di dunia ini. di sini, ranah f adalah himpuan dari negara-negara di dunia; dan ko-ranah f adalah daftar ibukota-ibukota di dunia. Bayangan dari negara Perancis adalah Paris, yaitu, f (Prancis)=Paris.

Contoh 1.3: Ambilkan $A\ = \{a, b, c, d\}$ dan$B\ = \{a, b, c\}$. Definisikan sebuah fungsi f dari A ke dalam B melalui korespondensi $f\ (a)\ =\ b, f\ (b)\ =\ c, f\ (c)\ =\ c$ dan $f\ (d)\ =\ b$. Berdasarkan definisi ini maka bayangan b misalnya adalah c.

Contoh 1.4: Ambilkan $A\ = \{-1{,}1\}$. Misalkan f menetapkan tiap-tiap bilangan rasional dalam $R^{\#}$ bilangan 1 dan untuk tiap-tiap bilangan irasional dalam $R^{\#}$ bilangan -1. Maka $f: R^{\#} \rightarrow A$ dan f dapat di definisikan secara ringkas oleh:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x \text{ rasional} \\ -1 \text{ jika } x \text{ irasional} \end{cases}$$

Contoh 1.5: Ambilkan $A = \{a, b, c, d\}$dan $B\ = \{x, y, z\}$. Misalkan $f: A \rightarrow B$ didefinisikan oleh diagram:



Perhatikan bahwa fungsi-fungsi dalam Contoh-contoh 1.1 dan 1.4 didefinisikan oleh rumus-rumus yang tertentu. Tetapi cara ini tidaklah selalu perlu, seperti ditunjukkan oleh contoh-contoh lainnya. Aturan-

aturan korespondensi yang mendefinisikan fungsi-fungsi dapat dinyatakan melalui diagram seperti pada Contoh 1.5 atau dinyatakan berdasarkan geografis seperti Contoh 1.2 atau apabila ranahnya berhingga, maka korespondensi itu dapat dinyatakan untuk tiap-tiap elemen dalam ranah seperti dalam Contoh 1.3.

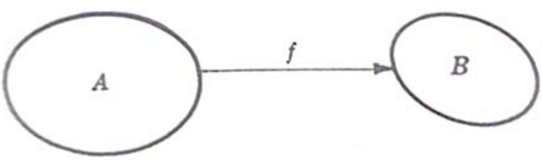
1. Pemetaan, Operator Dan Transformasi

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan yang pada umumnya tak perlu berupa himpunan-himpunan bilangan riil, maka sebuah fungsi f dari A ke dalam B sering disebut peta dari A ke dalam B; dan notasi:

$$f: A \to B$$

Dengan demikian berbunyi "f memetakan A ke dalam B". Kita dapat pula menyatakan sebuah peta atau fungsi f dari A ke dalam B dengan diagram:

$$A \xrightarrow{f} B$$



Jika ranah dan ko-ranah sebuah fungsi f kedua-duanya adalah himpunan yang sama, katakan:

$$f: A \to A$$

maka f sering kali disebut dengan *operator* atau *transformasi* pada A sebagaimana akan kita lihat kemudian, operator-operator adalah kasus-kasus khusus yang penting dari fungsi-fungsi.

2. Fungsi-Fungsi Yang Sama

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang didefinisikan pada ranah D yang sama dan jika $f\ (a) = g\ (a)$ untuk setiap $a\ \varepsilon\ D$, maka fungsi f dan g adalah sama kita tulis:

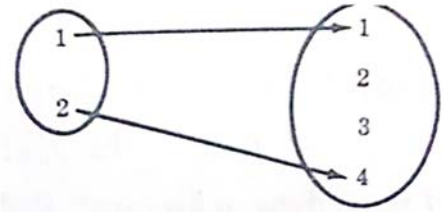
$$f = g$$

Contoh 2.1:

Misalkan $f(x) = x^2$ di mana x sebuah bilangan riil. Misalkan $g(x) = x^2$di mana x adalah sebuah bilangan kompleks. Maka fungsi f tidaklah sama dengan g karena mereka memiliki ranah yang berbeda.

Contoh 2.2:

Misalkan fungsi f didefinisikan oleh diagram:



Misalkan sebuah fungsi g didefinisikan oleh rumus $g(x) = x^2$di mana ranah g adalah himpunan$\{1,2\}$. Maka $f = g$ karena kedu-anya memiliki ranah yang sama dan karena f dan g menetapkan bayangan yang sama untuk tiap-tiap elemen dalam ranah.

Contoh 2.3:

Misalkan$f: R^\# \to R^\#$ dan $g: R^\# \to R^\#$. Andaikan f didefinisikan oleh $f(x) = x^2$ dan g oleh $g(y) = y^2$. Maka f dan g adalah fungsi-fungsi yang sama yakni $f = g$. Perhatikan bahwa x dan y hanyalah variabel-variabel dumi *(dummy)* dalam rumus-rumus yang mendefinisikan fungsi-fungsi ini.

3. Jangkauan Dari Fungsi

Misalkan f suatu peta dari A ke dalam B, yaitu misalkan$f: A \to B$. Tiap-tiap elemen dalam B tak perlu muncul sebagai bayangan dari elemen A. kita definisikan jangkauan *(range)* dari f terdiri dari ele-men-elemen B yang tepat muncul sebagai bayangan dari sekurang-kurangnya satu elemen A kita nyatakan jangkauan dari $f: A \rightarrow B$ dengan:

$$f(A)$$

Perhatikan bahwa $f(A)$ adalah subhimpunan dari B.

Contoh 3.1:

Misalkan fungsi $f: R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^2$. Maka jangkauan f terdiri dari bilangan-bilangan riil positif dan nol.

Contoh 3.2:

Misalkan $f: A \rightarrow B$ adalah fungsi dari Contoh 1.3. Maka $f(A) = \{b, c\}$.

4. Fungsi Satu-Satu

Misalkan f memetakan A ke dalam B. Maka f disebut suatu fungsi satu-satu *(one-one function)* jika elemen-elemen yang berbeda dalam B ditetapkan dengan elemen-elemen berbeda dalam A, yaitu jika tak ada dua buah elemen A yang mempunyai bayangan yang sama. Secara lebih singkat,$f: A \rightarrow B$adalah satu-satu jika $f(a) = f(a')$ ma-ka $a = a'$ atau yang ekuivalen dengannya yaitu jika $a \neq a'$ maka $f(a) \neq f(a')$.

Contoh 4.1:

Misalkan fungsi $f: R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^2$. Maka f bukan fungsi satu-satu karena $f(2) = f(-2) = 4$ yaitu bayangan dari dua bilangan riil yang berbeda yakni 2 dan -2, adalah bilangan yang sama, yaitu 4.

Contoh 4.2:

Misalkan fungsi $f: R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^2$. Maka f adalah peta satu-satu karena pangkat-tiga dari dua bilangan riil yang berbeda juga berbeda.

Contoh 4.3:

Fungsi f yang menetapkan ibukota-ibukota tiap-tiap negara di dunia adalah satu-satu karena negara-negara yang berbeda mempunyai ibukota-ibukota yang berbeda, yaitu, tidak ada kota yang adalah ibukota dari dua negara yang berbeda.

5. Fungsi Pada

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B. Maka jangkauan $f(A)$ dari fungsi f adalah subhimpunan B, yaitu$f(A) \subset B$.Jika $f(A) = B$, yaitu, jika setiap anggota B muncul sebagai bayangan dari sekurang-kurangnya satu elemen A, maka kita katakan "f adalah suatu fungsi dari A pada B", atau "f memetakan A pada B", atau "f adalah suatu fungsi pada *(onto function)*".

Contoh 5.1:

Misalkan fungsi $f: R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh rumus$f(x) = x^2$. Maka f bukan suatu fungsi pada karena bilangan-bilangan negatif tak muncul dalam jangkauan dari f, yaitu tidak ada bilangan negatif yang merupakan kuadrat sebuah bilangan riil.

Contoh 5.2:

Misalkan $f: A \to B$ adalah sebuah fungsi dalam Contoh 1.3. Perhatikan bahwa $f\ (A) = \{b, c\}$. Karena $B\ = \{a, b, c\}$, jangkau-an dari f tidak sama dengan ko-ranah yang berarti f tidak pada.

Contoh 5.3:

Misalkan $f: A \to B$ adalah fungsi dalam Contoh 1.5. Perhatikan bahwa:

$$f(A) = \{x, y, z\} = B$$

yaitu, jangkauan f sama dengan ko-ranah B. Jadi f memetakan A dan B, yang berarti f suatu peta pada.

6. **Fungsi Satuan**

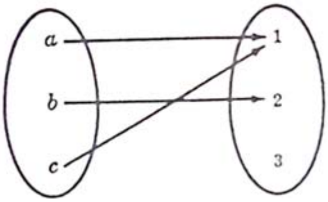
Misalkan A sebarang himpunan. Misalkan fungsi $f: A \to A$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x$ yaitu, misalkan f menetapkan tiap-tiap elemen dalam A elemen yang bersangkutan itu sendiri. Maka f disebut fungsi satuan *(identity function)* atau transformasi satuan *(identity transformation)* pada A. Kita nyatakan fungsi ini dengan 1 atau dengan 1_A.

7. **Fungsi Konstan**

Suatu fungsi f dari A ke dalam B disebut fungsi *konstan* jika elemen $o\ \varepsilon\ B$ yang sama ditetapkan untuk setiap elemen dalam A. Dengan kata lain, $f: A \to B$ adalah suatu fungsi konstan jika jangkauan dari f hanya terdiri dari satu elemen.

Contoh 6.1:

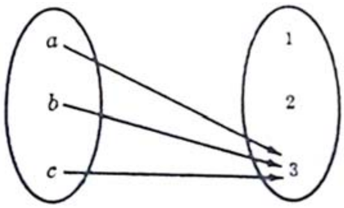
Misalkan fungsi f didefinisikan oleh diagram:



Maka f bukan fungsi konstan karena jangkauan dari f terdiri dari 1 dan 2.

Contoh 6.2:

Misalkan fungsi f didefinisikan oleh diagram :



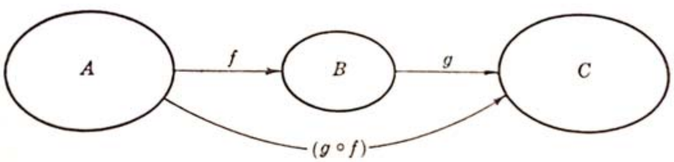
Maka f adalah fungsi konstan karena 3 ditetapkan untuk setiap elemen A.

Contoh 6.3:

Misalkan $f: R^{\#} \rightarrow R^{\#}$didefinisikan oleh rumus $f(x) = 5$. Maka f adalah fungsi konstan karena 5 ditetapkan untuk setiap elemen.

8. Hasil Kali Fungsi

Misalkan f suatu fungsi A ke dalam B dan g dari B ke dalam C di mana B adalah ko-ranah dari f. Kita ilustrasikan fungsi-fungsi ini sebagai berikut.

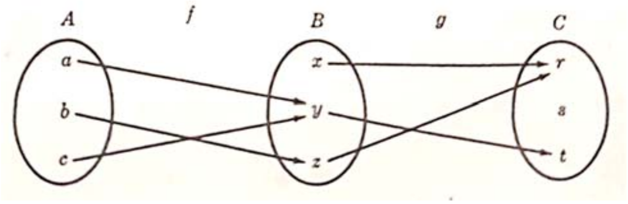


Misalkan $a \in A$; maka bayangannya yaitu $f\ (a)$ berada dalam B di mana B adalah ranah dari g. Oleh sebab itu, kita dapat memperoleh bayangan dari $f(a)$ di bawah peta g, yaitu $g(f(a))$. Jadi kita mempunyai aturan yang menetapkan tiap-tiap elemen$a \in A$ dengan suatu elemen yang terangkaikan dengannya yaitu $g(f(a)) \in C$. Dengan perkataan lain, kita mempunyai suatu fungsi dari A ke dalam C. Fungsi baru ini disebut hasil kali fungsi *(product function)* atau fungsi komposisi dari f dan g yang dinyatakan oleh $(g \circ f)$ atau (gf).

Secara lebih singkat, jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ maka kita definisikan suatu fungsi $(g \circ f): A \rightarrow C$ dengan:

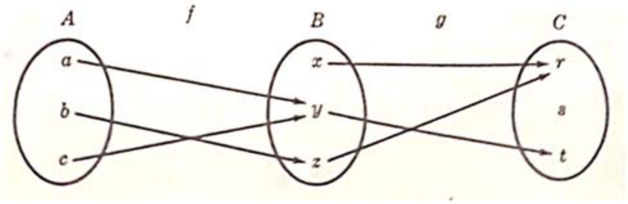
$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$

Di sini $\equiv$ digunakan untuk mengartikan sama menurut definisi. Kita sekarang dapat lengkapi diagram di atas.



Contoh7.1:

Misalkan $f: A \rightarrow B$dan$g: B \rightarrow C$ didefinisikan oleh diagram-diagram:



Kita menghitung $(g \circ f): A \rightarrow C$menurut definisinya :

$$(g \circ f)(a) \equiv g\big(f(a)\big) = g(y) = t$$
$$(g \circ f)(b) \equiv g\big(f(b)\big) = g(z) = r$$
$$(g \circ f)(c) \equiv g\big(f(c)\big) = g(y) = t$$

Perhatikan bahwa fungsi $(g \circ f)$ adalah ekuivalen dengan "mengikuti anak-panah-anak-panah" dari A ke C dalam diagram-diagram dari fungsi-fungsi f dan g.

Contoh 7.2:

Untuk tiap-tiap bilangan riil, misalkan f menetapkan kuadratnya yaitu $f(x) = x^2$. Untuk tiap-tiap bilangan riil, misalnya g menetapkan bilangan yang bersangkutan di tambah 3, yaitu berarti $g(x) = x + 3$. Maka:

$$(f \circ g)(2) \equiv f\big(g(2)\big) = f(5) = 25$$
$$(g \circ f)(2) \equiv g\big(f(2)\big) = f(4) = 7$$

Perhatikan bahwa hasil kali fungsi $(f \circ g)$ dan $(g \circ f)$ bukanlah fungsi yang sama. Kita menghitung suatu pernyataan umum untuk hasil kali fungsi ini:

$$(f \circ g)(x) \equiv f\big(g(x)\big) = f(x+3) = (x+3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$
$$(g \circ f) \equiv g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 3$$

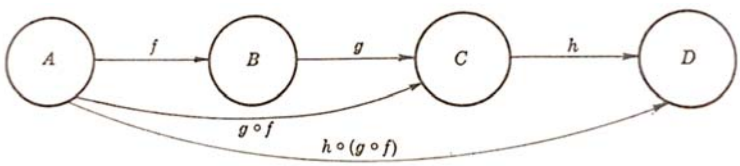
Pernyataan 4.1: Misalkan $f: A \to B$. Maka

$$1_B \circ f = f \text{ dan } f \circ 1_A = f$$

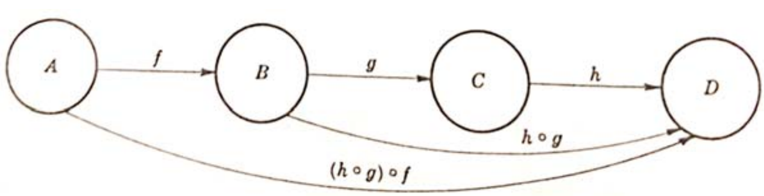
yaitu, hasilkali dari sebarang fungsi dan fungsi satuan adalah fungsi itu sendiri.

9. Sifat Asosiatif Dari Hasil Kali Fungsi-fungsi

Misalkan $f: A \to B$, $g: B \to C$ dan $h: C \to D$. Maka, sebagaimana diilustrasikan dalam Gambar 4-1, kita dapat membentuk hasil kali fungsi $g \circ f: A \to C$ dan kemudian fungsi $h \circ (g \circ f): A \to D$.



Dengan cara yang sama, sebagaimana diilustrasikan dalam Gambar 4-2, kita dapat membentuk hasil kali fungsi $h \circ g: B \to D$ dan kemudian $(h \circ g) \circ f: A \to D$.



Baik $h \circ (g \circ f)$ maupun $(h \circ g) \circ f$ adalah fungsi-fungsi dari A ke dalam D. Suatu teorema dasar mengenai fungsi-fungsi menyatakan bahwa fungsi-fungsi ini sama. Tegasnya,

Teorema 4.1: Misalkan $f: A \to B$, $g: B \to C$ dan $h: C \to D$. Maka

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Mengingat Teorema 4.1, kita dapat menulis

$$h \circ g \circ f: A \to D$$

tanpa tanda kurung apa pun.

10. Invers dari Fungsi

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B, dan misalkan $b \varepsilon B$. Maka *invers* dari b, dinyatakan oleh:

$$f^{-1}(b)$$

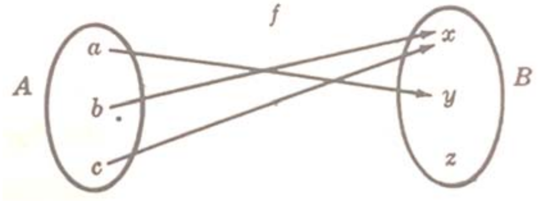
Yang terdiri dari elemen-elemen A yang dipetakan pada b, yaitu elemen-elemen dalam A yang memiliki b sebagai bayangannya. Secara lebih singkat, jika $f: A \to B$ maka:

$$f^{-1}(b) = \{x | x\varepsilon A, f(x) = b\}$$

Perhatikan bahwa $f^{-1}(b)$ adalah selalu sebuah subhimpunan dari A. Kita membaca f^{-1} sebagai "f invers".

Contoh 8.1:

Misalkan fungsi $f: A \to B$ didefinisikan oleh diagram:



Maka $f^{-1}(x) = \{b, c\}$, karena baik b maupun c keduanya memiliki x sebagai titik bayangan mereka. Juga, $f^{-1}(y) = \{a\}$, karena hanya a yang dipetakan kepada y. Invers dari z, $f^{-1}(z)$, adalah himpunan nol $\emptyset$, karena tak ada elemennya A yang dipetakan kepada z.

Contoh 8.2:

Misalkan $f: R^{\#} \rightarrow R^{\#}$, bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh bentuk $f(x) = x^2$. Maka $f^{-1}(4) = \{2, -1\}$, karena 4 adalah bayangan dari baik 2 maupun -2 dan tidak ada bilangan riil lain yang kuadratnya adalah 4. Perhatikan bahwa $f^{-1}(-3) = \emptyset$, karena tak ada unsur dalam $R^{\#}$ yang kuadratnya adalah -3.

Contoh8.3:

Misalkan f suatu fungsi dari bilangan-bilangan kompleks ke dalam bilangan-bilangan kompleks, di mana f didefinisikan oleh bentuk $f(x) = x^2$. Maka $f^{-1}(-3) = \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$, karena kuadrat dari tiap-tiap bilangan ini adalah -3.

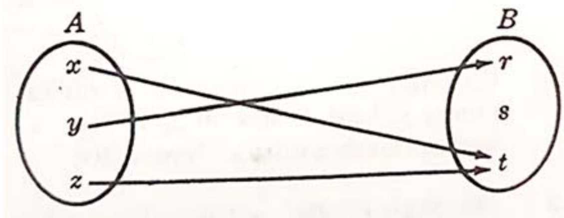
Perhatikan bahwa fungsi-fungsi dalam Contoh 8.2 dan 8.3 berbeda meskipun mereka didefinisikan oleh bentuk yang sama.

Sekarang kita perluas definisi invers dari fungsi. Misalkan $f: A \rightarrow B$ dan misalkan D suatu subhimpunan dari B, yaitu$D \subset B$. Maka invers dari D di bawah peta f yang dinyatakan oleh $f^{-1}(D)$, terdiri dari elemen-elemen dalam A yang dipetakan pada beberapa elemen dalam D. Secara lebih singkat,

$$f^{-1}(D) = \{x | x \varepsilon A, f(x) \varepsilon D\}$$

Contoh 9.1:

Misalkan fungsi$f: A \rightarrow B$ didefinisikan oleh diagram:



Maka $f^{-1}(\{r,s\}) = \{y\}$, karena hanya y yang dipetakan kepada r atau s. Juga $f^{-1}(\{r,t\}) = \{x,y,z\} = A$, karena tiap-tiap elemen dalam A memiliki r atau t sebagai inversnya.

Contoh 9.2:

Misalkan $f: R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh$f(x) = x^2$, dan ambilkan

$$D = [4,9] = \{x | 4 \leq x \leq 9\}$$

Maka:

$$f^{-1}(D) = \{x | -3 \leq x \leq -2 \text{ atau } 2 \leq x \leq 3\}$$

``

Contoh 9.3:

Misalkan $f: A \to B$ adalah sebarang fungsi. Maka $f^{-1}(B) = A$, karena setiap elemen dalam A memiliki bayangannya dalam B. Jika $f(A)$ menyatakan jangkauan dari fungsi f, maka:

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = A$$

Selanjutnya, jika $b \in B$, maka:

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$$

Di sini f^{-1} mempunyai dua arti, yaitu sebagai invers dari sebuah elemen B dan sebagai invers dari subhimpunan B.

11. Fungsi Invers

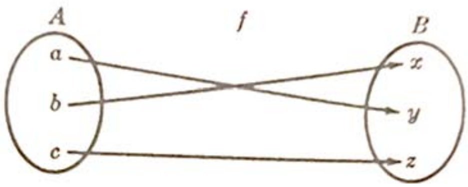
Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B. Pada umumnya, $f^{-1}(b)$ dapat terdiri dari lebih dari satu elemen atau mungkin adalah himpunan kosong $\emptyset$. Jika sekarang $f: A \to B$ adalah suatu fungsi satu-satu dan suatu fungsi pada, maka untuk tiap-tiap $b \; \varepsilon \; B$, invers $f^{-1}(b)$ akan terdiri dari sebuah elemen tunggal dalam A. Dengan demikian, kita mempunyai suatu aturan yang menetapkan untuk tiap-tiap $b \varepsilon B$, suatu elemen tunggal $f^{-1}(b)$ dalam A. Oleh sebab itu, f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke dalam A dan kita dapat menulis:

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

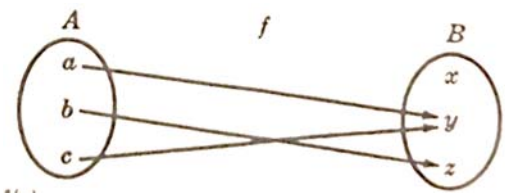
Dalam keadaan ini, bila $f: A \rightarrow B$ adalah satu-satu dan pada, maka kita menyebut f^{-1} fungsi invers dari f.

Contoh 10.1:

Misalkan fungsi $f: A \rightarrow B$ didefinisikan oleh diagram:



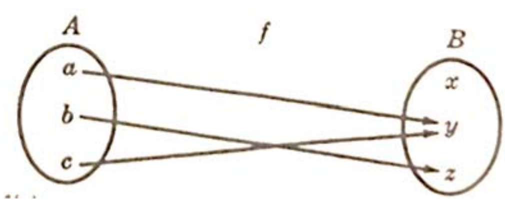
Perhatikan bahwa f adalah satu-satu dan pada. Dengan demikian f^{-1}, yaitu fungsi invers, ada. Kita menggambarkan $f^{-1}: B \rightarrow A$ dengan diagram:



Perhatikan selanjutnya, bahwa jika kita arahkan anak-panah-anak-panah dalam arah yang terbalik dari diagram f maka kita pada dasarnya memperoleh diagram dari f^{-1}.

Contoh10.2:

Misalkan fungsi $f: A \rightarrow B$ didefinisikan oleh diagram:



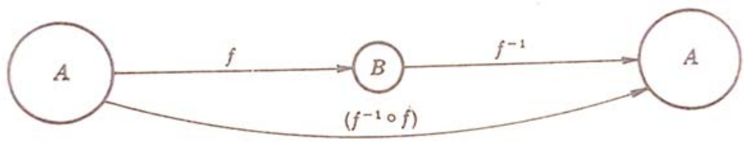
Karena $f(a) = y$ dan $f(c) = y$, maka fungsi f tidak satu-satu. Dengan demikian fungsi invers f^{-1}tidak ada. Jika $f^{-1}(y) = \{a, c\}$, maka kita tidak dapat menetapkan a dan c kedua-duanya untuk elemen $y \varepsilon B$.

Contoh 10.3:

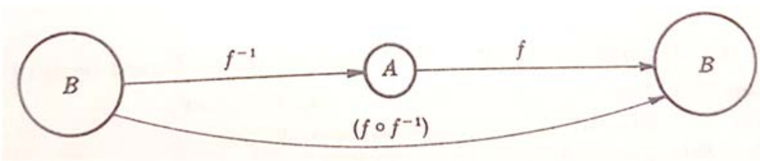
Misalkan $f: R^{\#} \rightarrow R^{\#}$, bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh $f(x) = x^3$. Perhatikan bahwa f adalah satu-satu dan pada. Oleh karena itu $f^{-1}: R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ ada. Pada kenyataannya kita mempunyai suatu bentuk yang mendefinisikan fungsi invers ini, yaitu $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

12. Teorema-Teorema Mengenai Fungsi Invers

Misalkan suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ mempunyai fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$. Maka kita melihat dari diagram berikut:



Bahwa kita dapat membentuk hasil kali fungsi $(f^{-1} \circ f)$ yang memetakan A ke dalam A, dan kita melihat dari diagram berikut:



Bahwa kita dapat membentuk hasil kali fungsi $(f \circ f^{-1})$ yang memetakan B ke dalam B. Kita sekarang menyatakan teorema dasar mengenai fungsi invers.

Teorema 4.2:

Misalkan fungsi $f: A \rightarrow B$ adalah satu-satu dan pada yang berarti fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ ada. Maka hasil kali fungsi:

$$(f^{-1} \circ f): A \rightarrow A$$

Adalah fungsi satuan pada A, dan hasil kali fungsi:

$$(f \circ f^{-1}): B \rightarrow B$$

Adalah fungsi satuan pada B.

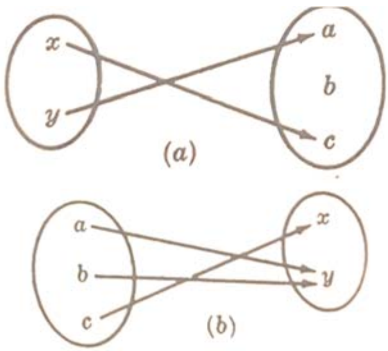
Teorema 4.3:

Misalkan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow A$ maka g adalah fungsi invers dari f yang berarti $g = f^{-1}$, jika hasilkali fungsi $(g \circ f): A \rightarrow A$ adalah fungsi satuan pada A dan $(f \circ g): B \rightarrow B$ adalah fungsi satuan pada B.

Kedua persyaratan dalam Teorema 4.3 adalah perlu sebagaimana kita akan lihat dari

Contoh 11.1:

Misalkan $A = \{x, y\}$ dan$B = \{a, b, c\}$. Definisikan suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ dengan diagram (a) di bawah.



Sekarang definisikan suatu fungsi $g: B \rightarrow A$ dengan diagram (b) di atas.

Kita menghitung $(g \circ f): A \rightarrow A$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(c) = x$$
$$(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(a) = y$$

Dengan demikian fungsi hasil kali $(g \circ f)$ adalah fungsi satuan pada A. tetapi g bukan fungsi invers dari f karena fungsi hasil kali $(f \circ g)$ bukan fungsi satuan pada B, jadi f bukan fungsi pada.

BAB 6

Relasi

A. Fungsi Proposisi dan Kalimat Terbuka

Suatu fungsi proposisi yang didefinisikan pada hasil kali Kartesis $A \times B$ dari dua buah himpunan A dan B adalah sebuah ungkapan yang dinyatakan oleh.

$$p\ (x, y)$$

Ungkapan ini memiliki sifat bahwa $p(a, b)$, di mana a dan b disisipkan untuk masing-masing variabel x dan y dalam $p(x, y)$, adalah benar atau salah untuk sebarang pasangan terurut $(a, b) \varepsilon\ A\ \times B$. misalnya, jika A adalah himpunan dari para penggubah drama dan B himpunan dari drama-drama, maka:

$p(x, y) =$ “x menulis y “

adalah suatu fungsi proposisi pada ... pada khususnya,

P (Shakespeare, Hamlet) = “Shakespeare menulis Hamlet”
P (Shakespeare, Faust) = “Shakespeare menulis Faust”

masing-masing adalah benar dan salah.

Ungkapan $p(x, y)$ sendiri disebut suatu kalimat terbuka dalam dua variabel atau secara singkat, suatu kalimat terbuka. Contoh-contoh lain dari kalimat-kalimat terbuka adalah sebagai berikut:

Contoh 1.1: "x lebih kecil dari pada y"

Contoh 1.2: "x beratnya y pon"

Contoh 1.3: "x habis dibagi oleh y"

Contoh 1.4: "x adalah suami y"

Contoh 1.5: "kuadrat dari x ditambah dengan kuadrat dari y adalah enam belas", yaitu "$x^2 + y^2 = 16$"

Contoh 1.6: "segitiga x sama dan sebangun dengan segitiga y"

Dalam semua contoh-contoh kita di atas terdapat dua buah variabel. Tetapi adalah mungkin terdapat pula kalimat-kalimat terbuka dalam satu variabel seperti "x dalam Perserikatan Bangsa-bangsa" atau dalam lebih daripada dua buah variabel seperti "x kali y sama dengan z".

1. Relasi

Suatu *relasi* R terdiri dari:

a. Sebuah himpunan A
b. Sebuah himpunan B
c. Suatu kalimat terbuka $p(x, y)$ di mana $p(a, b)$ adalah benar atau salah untuk sebarang pasangan terurut (a, b) yang termasuk dalam.

Maka kita menyebut R suatu *relasi* dari A ke B dan menyatakannya dengan:

$$R = (A, B, P(x, y))$$

Selanjutnya, jika $P(a, b)$ adalah benar kita tulis:

$$a \; R \; b$$

Yang berbunyi "a berhubungan dengan b". Pada pihak lain, jika $P(a, b)$ tidak benar, kita tulis:

$$a \not R \; b$$

Yang berbunyi "a tidak berhubungan dengan b".

Contoh 2.1: Misalkan $R_1 = (R^\#, R^\#, P(x,y))$ di mana $P(x,y)$ berbunyi "x lebih kecil daripada y". Maka R_1 adalah suatu relasi karena $P(a,b)$ yakni "$a < b$" adalah benar atau salah untuk sebarang pasangan terurut (a,b) dari bilangan-bilangan riil. Selain itu, karena $P(2,\pi)$adalah benar kita dapat menulis

$$2 \; R_{1\,\pi}$$

dan karena $p(5,\sqrt{2})$ salah kita dapat menulis

$$5 \; \not{R}_1 \sqrt{2})$$

Contoh 2.2: Misalkan $R_2 = (A, B, P(x,y))$ di mana A adalah himpunan dari kaum pria, B himpunan dari kaum wanita, dan $P(x,y)$ berbunyi "x adalah suami dari y". Maka R_2 adalah suatu relasi.

Contoh 2.3: Misalkan $R_3 = (N, N\, P(x,y))$ di mana N adalah bilangan-bilangan asli dan $P(x,y)$ berbunyi "y habis dibagi oleh x". Maka R_3 adalah suatu relasi. Selanjutnya,

$$3\, R_3\, 12,\;\; 2\, \not{R}_3\, 7,\;\; 5\, R_3\, 15,\;\; 6\, \not{R}_3\, 13$$

Contoh 2.4: Misalkan$R_4 = (A, B\; P(x,y))$ di mana A adalah himpunan dari kaum pria, B himpunan dari kaum wanita dan $P(x,y)$ berbunyi "y habis dibagi oleh x". Maka R_4 bukanlah suatu relasi karena $P(a,b)$ tidak mempunyai arti jika a adalah seorang pria dan b seorang wanita.

Contoh 2.5: Misalkan $R_5 = (N, N\; p(x,y))$ di mana N adalah bilangan-bilangan asli dan $p(x,y)$ berbunyi "x lebih kecil daripada y". Maka R_5 adalah suatu relasi.

Perhatikan bahwa R_1 danR_5 bukanlah relasi yang sama meskipun kalimat terbuka yang sama dipergunakan untuk mendefinisikan masing-masing relasi.

Misalkan $R = (A, B, P(x, y))$ adalah suatu relasi. Maka kita katakan bahwa kalimat terbuka $P(x, y)$ *mendefinisikan suatu relasi* dari A ke B. Selanjutnya, jika $A = B$, maka kita katakan bahwa $P(x, y)$ mendefinisikan suatu relasi di dalam A.

Contoh 2.6: Kalimat terbuka $P(x, y)$, yang berbunyi "x lebih kecil daripada y", mendefinisikam suatu relasi dalam bilangan-bilangan rasional.

Contoh 2.7: Kalimat terbuka "x suaminya y" mendefinisikan suatu relasi dari himpunan kaum pria ke himpunan kaum wanita.

Terminologi: Beberapa pengarang menyebut $P(x, y)$ suatu relasi. Mereka kemudian secara implisit menganggap bahwa variabel-variabel x dan y masing-masing menjangkau beberapa himpunan A dan B, yaitu bahwa $P(x, y)$ adalah sebuah fungsi proposisi yang didefinisikan pada beberapa hasilkali himpunan $A \times B$ kita akan tetap menganut terminologi terdahulu di mana $P(x, y)$ hanyalah suatu kalimat terbuka dan oleh karena itu suatu relasi terdiri atas $P(x, y)$ dan dua buah himpunan A dan B yang diberikan.

2. Himpunan Jawaban dan Grafik Relasi

Misalkan $R = (A, B, P(x, y))$ adalah suatu relasi. *Himpunan jawaban* R^* dari relasi R terdiri atas elemen-elemen (a, b) dalam $A \times B$ untuk $P(a, b)$ adalah benar. Dengan kata lain,

$$R^* = \{(a, b) | a \in A, b \in B, P(a, b) \ adalah \ benar\}$$

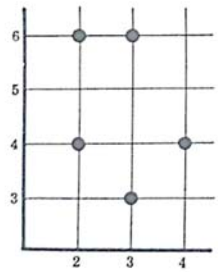
Perhatikan bahwa R^* himpunan jawaban suatu relasi R dari A ke B, adalah subhimpunan dari $A \times B$. Oleh karena itu, R^* dapat diperlihatkan yaitu digambar atau disketsa pada diagram koordinat dari $A \times B$.

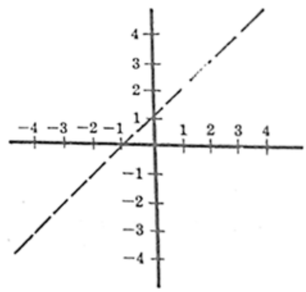
Grafik suatu relasi R dari A ke B terdiri atas titik-titik pada diagram koordinat dari $A \times B$ yang termasuk dalam himpunan jawaban dari R.

Contoh 3.1: Misalkan $R \;\; = (A, B, P(x, y))$ di mana $A = \{2, 3, 4\}$, dan $B = \{\, 3, 4, 5, 6\}$ dan, $P(x, y)$ berbunyi "y habis dibagi oleh x". Maka himpunan jawaban dari R adalah

$$R^* = \{\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 3\}, \{3, 6\}, \{4, 4\}\}$$

Himpunan jawaban dari $A \times B$ diperlihatkan pada diagram koordinat dari $A \times B$ dalam gambar 6-1 di bawah.





Contoh 3.2: Misalkan R adalah relasi dalam bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh:

$$y < x + 1$$

Daerah arsiran dalam diagram koordinat dari $R^{\#} \times R^{\#}$ yang diperlihatkan dalam Gambar 6-2 di atas terdiri dari titik-titik yang termasuk R^*, himpunan jawaban dari R, yaitu grafik dari R.

Perhatikan bahwa R^* terdiri dari titik-titik yang berada di bawah garis $y = x + 1$. Garis $y = x + 1$ diberi arsiran untuk memperlihatkan bahwa titik-titik pada garis ini tidak termasuk dalam R^*.

3. Relasi Sebagai Himpunan Dari Pasangan-Pasangan Terurut

Misalkan R^* sebarang subhimpunan dari $A \times B$. Kita dapat mendefinisikan suatu relasi $R \;\; = (A, B, P(x, y))$ di mana $P(x, y)$ berbunyi:

"pasangan teruntuk (x, y) termasuk dalam R^*"

Himpunan jawaban dari relasi R ini adalah himpunan semula R^*. Jadi untuk setiap relasi $R = (A, B, P(x, y))$ terdapat sebuah himpunan jawaban tunggal R^*yang mana adalah subhimpunan dari $A \times B$, dan untuk setiap subhimpunan R^* dari $A \times B$ terdapat suatu relasi $R = (A, B, P(x, y))$ yang mana R^* adalah himpunan-jawabannya. Mengingat korespondensi satu-satu ini antara relasi-relasi $R = (A, B, P(x, y))$ dan subhimpunan-subhimpunan R^* dari $A \times B$, maka kita mendefinisikan kembali suatu relasi menurut

Definisi 6.1 Suatu relasi R dari A dan Badalah subhimpunan dari $A \times B$.

Meskipun Definisi 6.1 untuk relasi kelihatannya dibuat-buat, tetapi keuntungannya adalah bahwa dalam definisi relasi ini, tidak dipergunakan konsep-konsep "kalimat terbuka" dan "variabel" yang tak diterangkan artinya itu.

Contoh 4.1: Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan$B = \{a, b\}$. Maka

$$R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$$

adalah suatu relasi dari A ke B. Selanjutnya,

$$1\ R\ a,\ \ 2\ \not R\ b,\ \ 3\ Ra,\ \ 3\ \not R\ b$$

Contoh 4.2: Misalkan $W = \{a, b, c\}$. Maka

$$R = \{(a, b), (a, c), (c, c), (c, b)\}$$

adalah suatu relasi dalam W. Dan lagi,

$$a \not R\ a,\ \ b\ \not R\ a,\ \ c\ R\ c,\ \ a\ R\ b$$

Contoh 4.3: Misalkan $R = \{(x, y) |\ x\ \varepsilon\ R^\#, y\ \varepsilon\ R^\#, y < x^2\}$

Maka R adalah sebuah himpunan pasangan-terurut dari bilangan-bilangan riil, yaitu sebuah subhimpunan dari $R^\# \times R^\# \times$ oleh karena itu, R adalah suatu relasi dalam bilangan-bilangan riil yang dapat juga didefinisikan oleh:

$$R = \left(R^\#, R^\#, P(x, y)\right)$$

Di mana $P(x, y)$ berbunyi "y lebih kecil daripada x".

Pernyataan 6.1: Misalkan himpunan A mempunyai m buah elemen dan himpunan B mempunyai n buah elemen. Maka ada terdapat 2^{mn} buah relasi dari A ke Byang berbeda, karena $A \times B$ yang mempunyai mnbuah elemen memiliki 2^{mn} buah elemen yang berbeda.

4. Relasi Invers

Setiap relasi Rdari A ke B mempunyai suatu relasi invers R^{-1} dari B ke A yang didefinisikan oleh:

$$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \varepsilon R\}$$

Dengan perkataan lain, relasi invers R^{-1} terdiri atas pasangan-pasangan terurut yang bila di balik, yaitu dipertukarkan, termasuk dalam R.

Contoh 5.1: Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$.Maka

$$R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$$

adalah suatu relatif dari A ke B. Relasi invers dari R adalah

$$R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}$$

Contoh 5.2: Misalkan $W = \{a, b, c\}$. Maka

$$R = \{(a, b), (a, c), (c, c), (c, b)\}$$

adalah suatu relasi dalam W. Relasi invers dari R adalah

$$R^{-1} = \{(b, a), (c, a), (c, c), (b, c)\}$$

5. Relasi Refleksif

Misalkan $R = (A, A, P(x, y))$ adalah suatu relasi dalam sebuah himpunan A, yaitu, misalkan R sebuah subhimpunan dari $A \times A$ maka R disebut suatu relasi refleksif jika, untuk setiap $a \varepsilon A$,

$$(a, a) \varepsilon R$$

Dengan kata lain, relasi invers R^{-1} terdiri dari pasangan-pasangan terurut yang bila dibalik, yaitu dipertukarkan, termasuk dalam R.

Contoh 6.1: Misalkan $V = \{1, 2, 3, 4\}$ dan

$$R = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

Maka R bukanlah suatu relasi refleksif karena $(2,2)$ tidak termasuk dalam R perhatikan bahwa semua pasangan terurut (a, a) haruslah termasuk dalam R agar R menjadi refleksif.

Contoh 6.2: Misalkan A himpunan segitiga-segitiga dalam bidang Euclid. Relasi R dalam A yang didefinisikan oeh kalimat terbuka "x sama dan sebangun dengan y" adalah suatu relasi refleksif karena setiap segitiga adalah sama dan sebangun dengan dirinya sendiri.

Contoh 6.3: Misalkan R suatu relasi dalam bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x lebih kecil daripada y", yaitu "$x < y$". maka R tidaklah refleksif karena $a \nless a$ untuk setiap bilangan riil a.

Contoh 6.4: Misalkan A suatu keluarga himpunan-himpunan, dan misalkan ... adalah relasi dalam A yang didefinisikan oleh "x adalah suatu subhimpunan dari y". Maka ... adalah suatu relasi refleksif karena setiap himpunan adalah subhimpunan dari dirinya sendiri.

6. Relasi Simetris

Misalkan R sebuah subhimpunan dari $A \times A$, yaitu R adalah suatu relasi dalam A. Maka Rdisebut suatu *relasi simetris* jika:

$$(a, b)\ \varepsilon\ R \text{ maka berarti } (b, a)\ \varepsilon\ R$$

Yaitu, jika a berhubungan dengan b maka b juga berhubungan dengan a.

Contoh 7.1: Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4\}$, dan misalkan

$$R = \{(1,3), (4,2), (2,4), (2,3), (3,1)\}$$

Maka R bukanlah suatu relasi simetris karena

$$(2,4) \not\varepsilon\ R \text{ tetapi } (3,2)\ \varepsilon\ R$$

Contoh 7.2: Misalkan A suatu himpunan segitiga-segitiga dalam bidang Euclid, dan misalkan R adalah relasi dalam A yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x sebangun dengan y". Maka R adalah simetris, karena jika segitiga a sama dan sebangun dengan segitiga b maka b juga sama dan sebangun dengan a.

Contoh7.3: Misalkan R suatu relasi dalam bilangan-bilangan asli N yang didefinisikan oleh "y habis dibagi oleh x". Maka R adalah tidak simetris karena 4 habis dibagi oleh 2 tetapi 2 tidak habis dibagi oleh 4. Dengan perkataan lain,

$$(\not{2}, 4)\ \varepsilon\ R \text{ tetapi } (4, 2)\ \varepsilon\ R$$

Pernyataan 6.2: Karena bila $(a, b)\ \varepsilon\ R$ maka (b,a) termasuk dalam relasi invers R^{-1}, jadi R adalah suatu relasi simetris jika dan hanya jika

$$R = R^{-1}$$

7. Relasi Anti-Simetris

Suatu relasi R dalam sebuah himpunan A, yaitu sebuah subhimpunan dari $A \times A$, disebut suatu *relasi antisimetris* jika

$$(a, b)\ \varepsilon\ R \text{ dan } (b, a)\ \varepsilon\ R \text{maka berarti } a = b$$

Dengan perkataan lain, jika$a \neq b$ maka mungkin a berhubungan dengan b dan mungkin b berhubungan dengan a, tetapi tidak pernah kedua-duanya.

Contoh 8.1: Misalkan N adalah bilangan-bilangan asli dan misalkan R adalah relasi dalam N yang didefinisikan oleh "y habis dibagi oleh x". Maka R adalah anti-simetris karena

b habis dibagi oleh a dan a habis dibagi oleh berarti

$$a = b.$$

Contoh 8.2: Misalkan $W = \{1,2,3,4\}$, dan misalkan

$$R = \{(1, 3), (4, 2), (4, 4), (2, 4)\}$$

Maka R adalah bukan suatu relasi anti-simetris dalam W karena

$$(4,2)\ \varepsilon\ R \text{ dan } (2,4)\ \varepsilon\ R$$

Contoh 8.3: Misalkan A adalah sebuah keluarga himpunan-himpunan, dan misalkan R relasi dalam A yang didefinisikan oleh "x adalah sebuah subhimpunan dari y". Maka R adalah anti-simetris karena jika

$$A \subset B \text{ dan } B \subset A \qquad \text{maka} \quad A = B$$

Pernyataan 6.3: Misalkan D menyatakan garis diagonal dari A × A, yaitu himpunan dari semua pasangan terurut $(\alpha, \alpha)\ \varepsilon\ A \times A$. Maka suatu relasi R dalam A adalah anti-simetris jika dan hanya jika

$$R \cap R^{-1} \subset D$$

8. Relasi Transitif

Suatu relasi R dalam sebuah himpunan A adalah *relasi transitif* jika

$$(\alpha, b)\ \varepsilon\ R \text{ dan } (b, c)\ \varepsilon\ R \text{maka} (\alpha, c)\ \varepsilon\ R$$

Dengan perkataan lain, jika a berhubungan dengan b dan b berhubungan dengan c, maka a berhubungan dengan c.

Contoh 9.1: Misalkan A adalah himpunan dari penduduk bumi. Misalkan R suatu relasi dalam A yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x mencintai y". Jika a mencintai b dan b mencintai c belum tentu berarti bahwa a mencintai c. Oleh sebab itu, R bukanlah suatu relasi transitif.

Contoh 9.2: Misalkan R adalah relasi dalam bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh "x lebih kecil daripada y". Maka sebagaimana diperlihatkan terdahulu, jika

$$a < b \text{ dan } b < c \qquad \text{maka berarti } \alpha < c$$

Jadi R adalah suatu relasi transitif.

Contoh 9.3: Misalkan$W = \{\alpha, b, c\}$, dan misalkan

$$R = \{(a,b),(c,b),(b,a),(a,c)\}$$

Maka R bukanlah suatu relasi transitif karena

$$(c,b)\ \varepsilon\ R \text{ dan } (b,a) \varepsilon\ R \text{ tetapi } (c,a)\ \varepsilon\ \not R$$

Contoh 9.4: Misalkan A sebuah keluarga himpunan-himpunan dan R adalah relasi dalam A yang didefinisikan oleh "x adalah sebuah subhimpunan dari y". Maka R adalah suatu relasi transitif karena jika

$$\mathrm{A} \subset B \text{ dan } B\ \subset C \text{ dan } A\ \subset C$$

9. Relasi Ekuivalen

Suatu relasi R dalam himpunan A adalah suatu *relasiekuivalen* jika

a. R adalah refleksif, yaitu, untuk setiap $a\ \varepsilon\ A, (a,a)\ \varepsilon R$,

b. R adalah simetris, yaitu, jika $(a,b)\ \varepsilon\ R$ maka $(b,a)\ \varepsilon\ R$,

c. R adalah transitif, yaitu, jika $(a,b)\ \varepsilon\ R$, dan $(b,c)\ \varepsilon\ R$ maka $(a,c) \varepsilon\ R$.

Kelak dalam suatu bab, akan kita pelajari secara lebih lengkap mengenai relasi-relasi ekuivalen dalam himpunan-himpunan. Sekarang kita hanya memberikan dua buah contoh dari relasi-relasi ekuivalen.

Contoh 10.1: Misalkan *A* himpunan dari segitiga-segitiga dalam bidang Euclid. Misalkan R adalah relasi pada *A* yang didefinisikan oleh *"x sebangun dengan y".* Maka sebagaimana dibuktikan dalam geometri, R adalah refleksif, simetris dan transitif. Jadi R adalah suatu relasi ekuivalen.

Contoh 10.2: Contoh yang paling penting dari suatu relasi ekuivalen adalah mengenai "kesamaan". Untuk sebarang unsur dalam sebarang himpunan:

(1) $a = a$,

(2) $a = b$ maka $b = c$

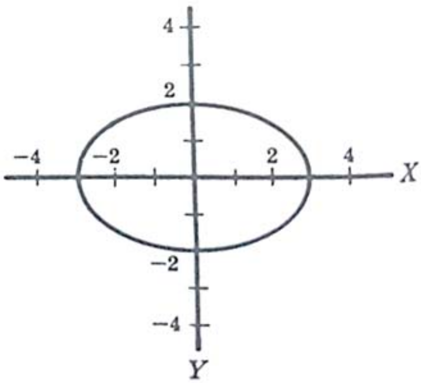
(3) $a = b$ dan $b = c$ maka $a = c$

10. Ranah dan Jangkauan Dari Suatu Fungsi

Misalkan R suatu relasi dari A ke B, yaitu misalkan R subhimpunan dari $A \times B$. Ranah (dominan) D dari relasi R adalah himpunan dari semua elemen pertama dalam pasangan-pasangan terurut yang termasuk R, yaitu

$$D = \{a \mid a \,\varepsilon\, A, (a, b \,\varepsilon\, R\}$$

Jangkauan *(range)* E dari relasi R terdiri dari semua elemen kedua yang muncul dalam pasangan-pasangan terurut dalam R, yaitu:



$$E = \{\, b \mid b \,\varepsilon\, B, (a, b) \varepsilon\, R\}$$

Perhatikan bahwa ranah suatu relasi dari A ke B adalah subhimpunan dari A dan jangkauannya adalah subhimpunan dari B.

Contoh 11.1: Misalkan $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a, b, c\}$, dan

$$R = \{(2, a), (4, a), (4, c)\}$$

Maka ranah dari R adalah himpunan$\{2,4\}$,dan jangkauan dari R adalah himpunan $\{a, c\}$.

Contoh 11.2: Misalkan relasi R dalam bilangan-bilangan riil didefinisikan oleh kalimat terbuka "$4x^2 + 9y^2 = 36$". R dipertunjukkan pada diagram koordinat $R^\# \times R^\#$ sebagaimana diperlihatkan dalam gambar disebelah kanan. Ranah dari R adalah selang tertutup $[-3,3]$, dan jangkauan dari R adalah selang tertutup $[-2,2]$.

Pernyataan 6.4: Misalkan suatu relasi R dari $A \times B$ diperlihatkan pada diagram koordinat dari $A \times B$. Maka$a \varepsilon A$ berada dalam ranah dari R jika dan hanya jika garis vertikal yang melalui a mengandung sebuah titik dari grafiknya R. Juga $b \varepsilon B$ berada dalam jangkauan dari R jika dan hanya jika garis horizontal yang melalui b mengandung sebuah titik dari grafiknya R.

11. Relasi dan Fungsi

Definisi 5.1: Suatu fungsi f dari A ke dalam B adalah subhimpunan dari $A \times B$ di mana tiap-tiap $a \varepsilon A$ muncul dalam satu dan hanya satu pasangan terurut yang termasuk f.

Karena setiap subhimpunan dari $A \times B$ adalah suatu relasi, maka fungsi adalah hal khusus dari relasi. Pada kenyataannya, istilah-istilah "ranah" dan "jangkauan" muncul bersama-sama dalam pembahasan fungsi dan relasi.

Persoalan penting dalam matematika adalah menentukan apakah relasi R dalam bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh persamaan berbentuk

$$F\,(x, y) = 0$$

adalah suatu fungsi. Dengan perkataan lain, apakah relasi yang didefinisikan oleh

$$F\,(x, y) = 0$$

Mendefinisikan suatu fungsi $y = f(x)$ ataukah tidak?

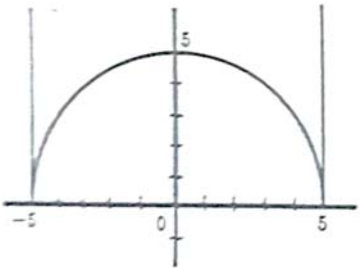
Pada umumnya, persoalan ini sangat sulit. Di sini, kita hanya dapat menjawab pertanyaan ini untuk persamaan-persamaan yang sangat sederhana.

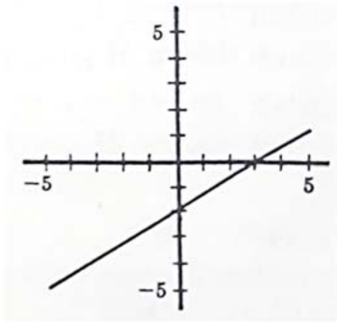
Contoh 12.1: Misalkan R relasi dalam bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh

$$x^2 + y^2 = 25$$

R diperlihatkan pada diagram koordinat $R^{\#} \times R^{\#}$ seperti dalam Gambar 6-3.

Perhatikan bahwa R adalah lingkaran berjari-jari 5 dengan pusat di titik asal.



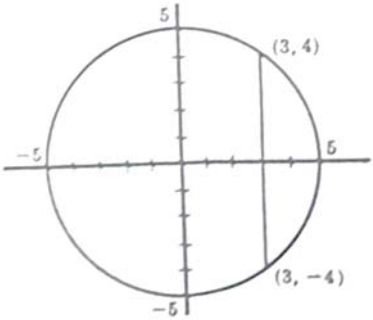


Perhatikan, selanjutnya bahwa garis-garis vertikal mengandung lebih daripada satu titik dari R. Khususnya, $(3, 4) \in R$ dan $(3, -4) \in R$ jadi relasi R bukanlah suatu fungsi.

Contoh 12.2: Misalkan $A = [-5,5]$, $B = [0, \infty)$, dan R adalah relasi dari A ke B yang didefinisikan oleh

$$x^2 + y^2 = 25$$

R diperlihatkan pada diagram koordinat $A \times B$ dalam Gambar 6-4 di bawah.



Perhatikan bahwa R adalah bagian atas dari separuh lingkaran. Perhatikan selanjutnya, bahwa tiap-tiap garis vertikal mengandung satu dan hanya satu titik dari R; dengan demikian R adalah suatu fungsi.

Contoh 12.3: Misalkan R adalah relasi dalam bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh

$$2x - 3y = 6$$

R diperlihatkan pada diagram koordinat $R^{\#} \times R^{\#}$ dalam gambar 6-5 di atas. Perhatikan bahwa R adalah sebuah garis lurus dan bahwa setiap garis vertikal mengandung satu dan hanya satu titik dari R; jadi R adalah suatu fungsi. Selanjutnya, dengan memecahkan persamaan di atas untuk menyatakan y dalam x, maka kita peroleh bentuk rumus yang mendefinisikan fungsi R:

$$y = f(x) = \frac{2x-6}{3}$$

DAFTAR PUSTAKA

Sukirman. 2006. *Logika dan Himpunan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator.

Torski, A.. 1990. *Introduction to Logic*. Oxford, UK: Oxford-Press.

Siang, Jong Lek. 2014. *Logika Matematika: Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi*. Penerbit Andi: Yogyakarta.