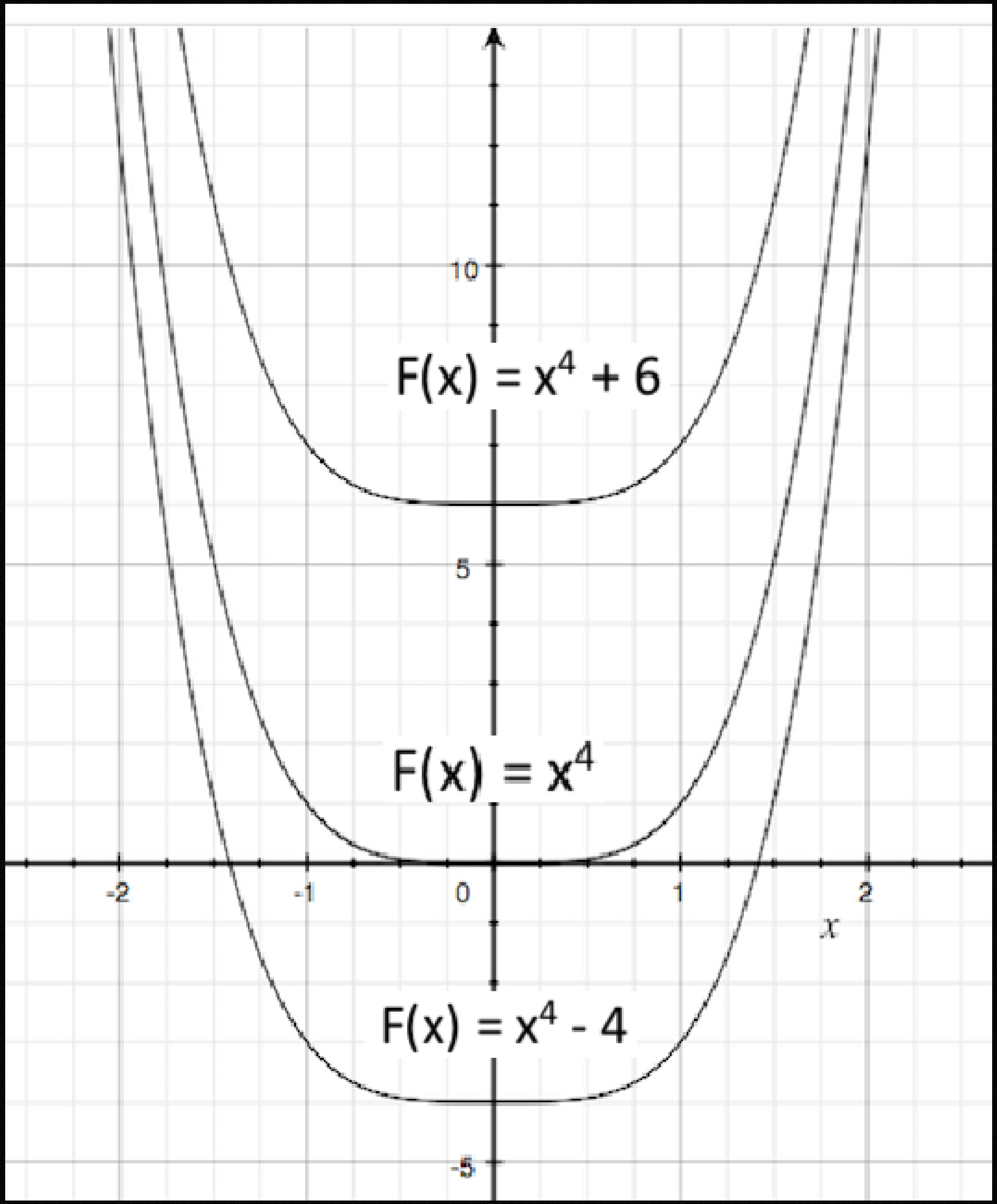
INTEGRAL

1. ANTITURUNAN (INTEGRAL TAK TENTU)
2. NOTASI JUMLAH DAN SIGMA
3. PENDAHULUAN LUAS

1. ANTITURUNAN (INTEGRAL TAK TENTU)

Definisi

Kita menyebut F suatu antiturunan f pada selang I jika $D_x F(x) = f(x)$ pada I - yakni, jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I.



$F'(x) = ?$

$$\int f(x)\ dx$$

Tanda integral

Fungsi yang diintegralkan

$$D_x \int f(x) dx = f(x)$$

$$\int D_x f(x) dx = f(x) + C$$

Teorema. Aturan Pangkat

Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Beberapa integral tak tentu

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x = \sin x + C$$

Teorema. Integral Tak-Tentu adalah Operator Linear

Andaikan f dan g mempunyai antiturunan (integral tak-tentu) dan andaikan k suatu konstanta. Maka :

(i) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$;

(ii) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

(iii) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Teorema. Aturan Pangkat yang Digeneralisir

Andaikan g suatu fungsi terdiferensiasikan dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1. Maka :

$$\int [g(x)]^r \, g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

atau (berkaitan dengan notasi Leibniz)

$$\int u^r \, du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

Contoh

Hitunglah $\int (3x^2 + 4x)dx$

Penyelesaian

$$\int (3x^2 + 4x)dx = \int 3x^2 dx + \int 4x\, dx$$

$$= 3 \int x^2\, dx + 4 \int x\, dx$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right)$$

$$= x^3 + 2x^2 + (3C_1 + 4C_2)$$

$$= x^3 + 2x^2 + C$$

Contoh Aturan Pangkat yang digeneralisir dengan menggunakan notasi Leibniz

Hitunglah $\int (x^2+4)^{10}\ x\,dx$

Penyelesaian

Andaikan u = x^2 + 4 ; maka du = 2x dx

atau dapat juga dilanjutkan :

$\frac{1}{2}$ du = x dx

sehingga menjadi :

$\int u^{10} \cdot \frac{1}{2}\,du$

Jadi,

$$\int (x^2+4)^{10}\ x\,dx = \int (x^2+4)^{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x\ \ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{10}du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{11}}{11} + C\right)$$

$$= \frac{(x^2+4)^{11}}{22} + C$$

2. NOTASI JUMLAH DAN SIGMA

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Jumlah dari $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2$

Jumlah dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Teorema. Kelinearan $\sum$

Andaikan $\{a_i\}$ dan $\{b_i\}$ menyatakan dua barisan dan c suatu konstanta. Maka :

(i) $$\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(iii) $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Beberapa Rumus Jumlah Khusus

1. $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Contoh

Hitunglah

1. $\sum_{i=1}^{10} i$ 2. $\sum_{i=1}^{10} i^2$ 3. $\sum_{i=1}^{10} 2i(i-5)$

Penyelesaian

1. $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + \cdots + 10 = \frac{10(10+1)}{2} = 55$

2. $$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \frac{10(10+1)(20+1)}{6} = 385$$

3. $$\sum_{i=1}^{10} 2i(i-5) = \sum_{i=1}^{10}(2i^2 - 10i)$$

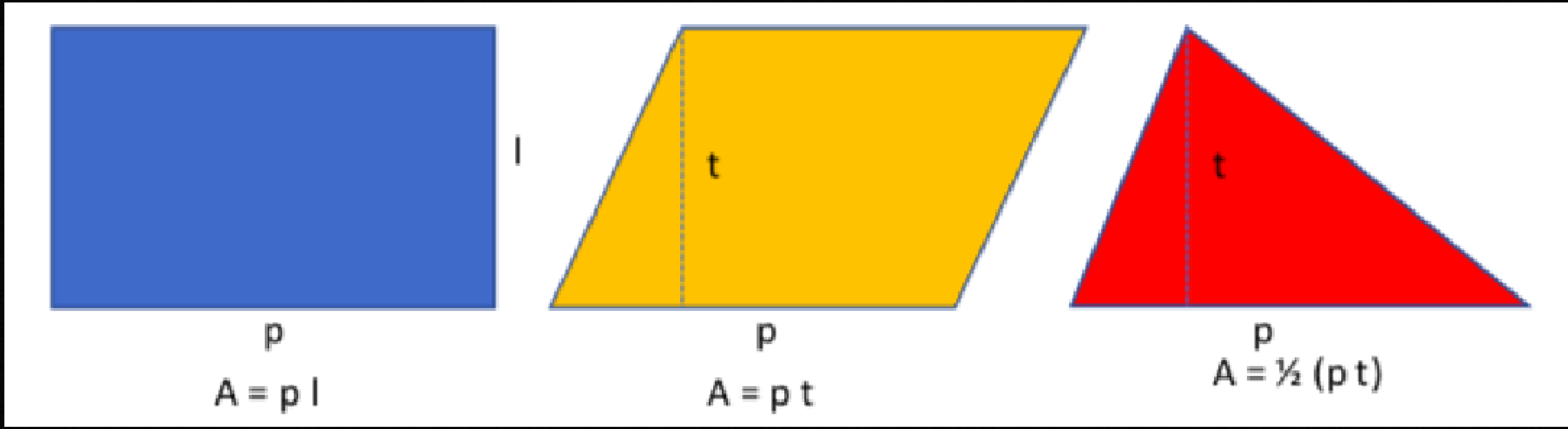
$$= \sum_{i=1}^{10} 2i^2 - \sum_{i=1}^{10} 10i$$

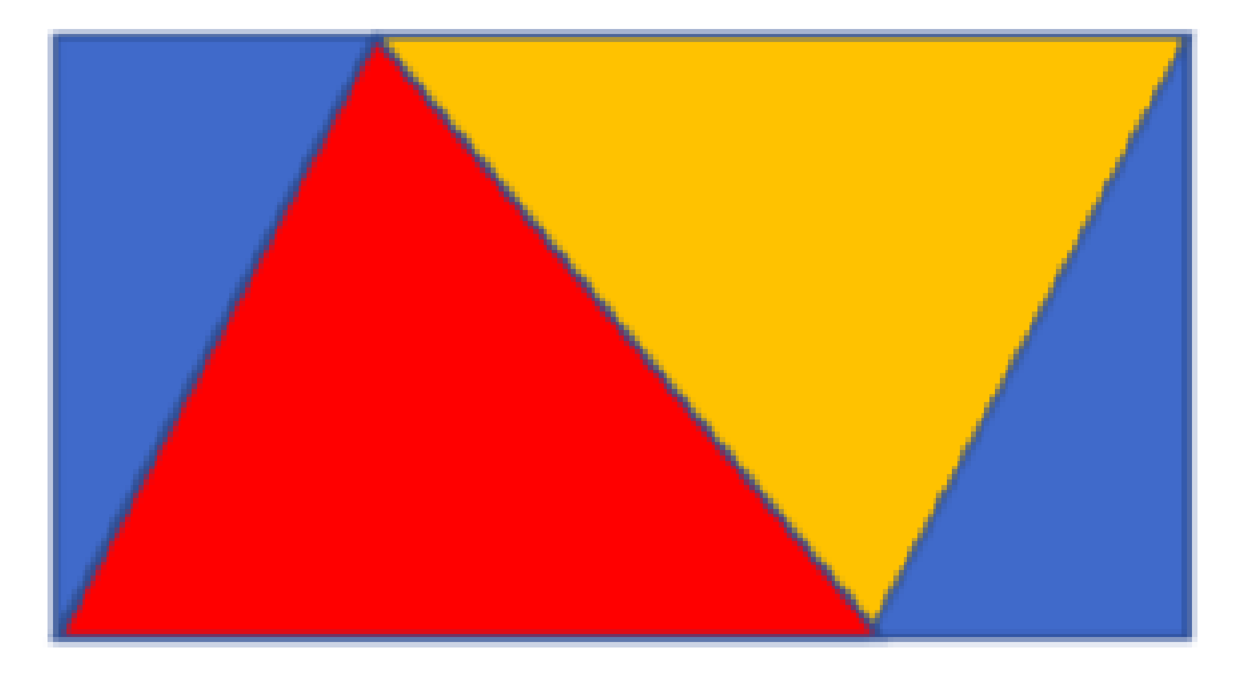
$$= 2\sum_{i=1}^{10} i^2 - 10\sum_{i=1}^{10} i$$

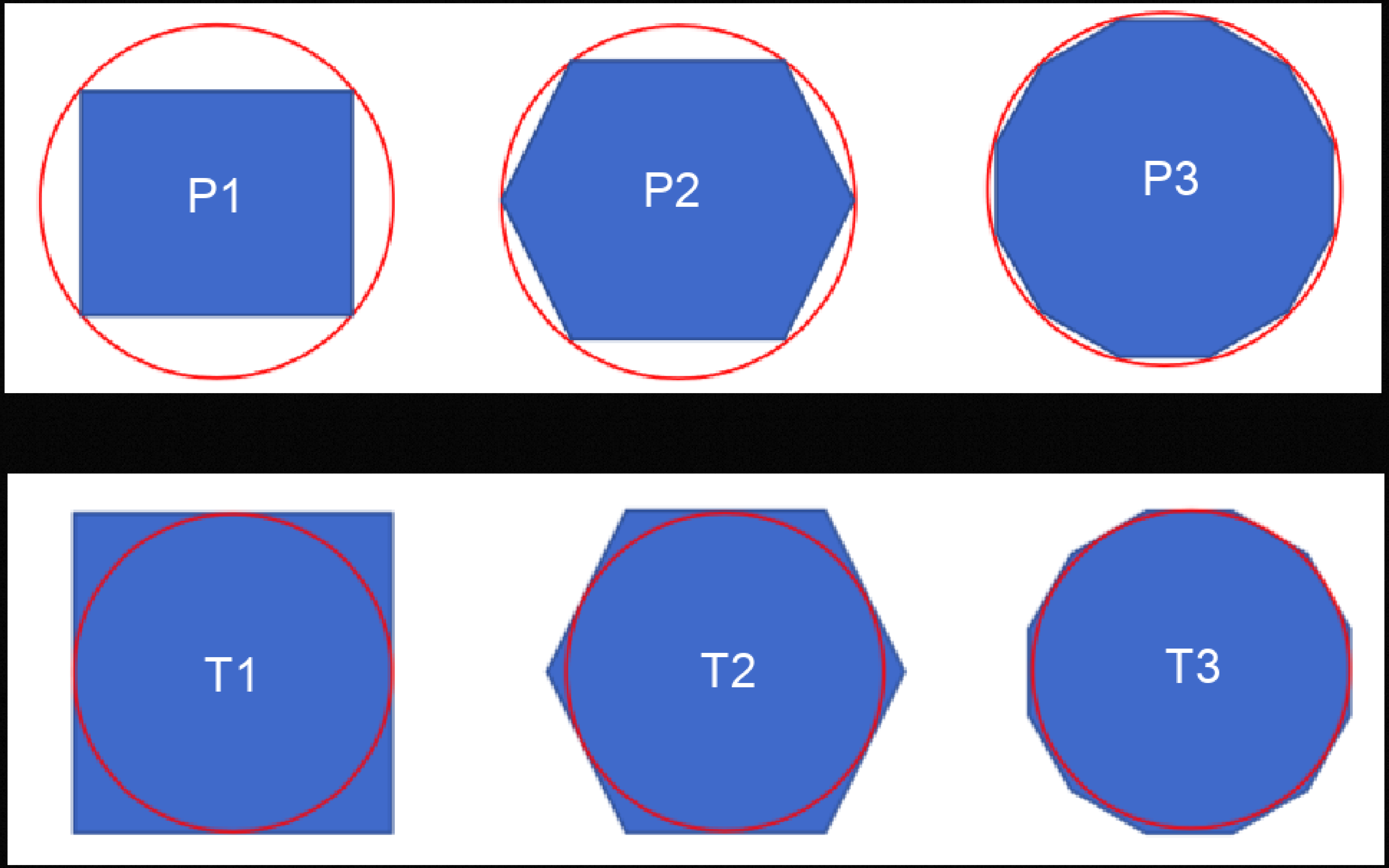
$$= 2(385) - 10(55)$$

$$= 220$$

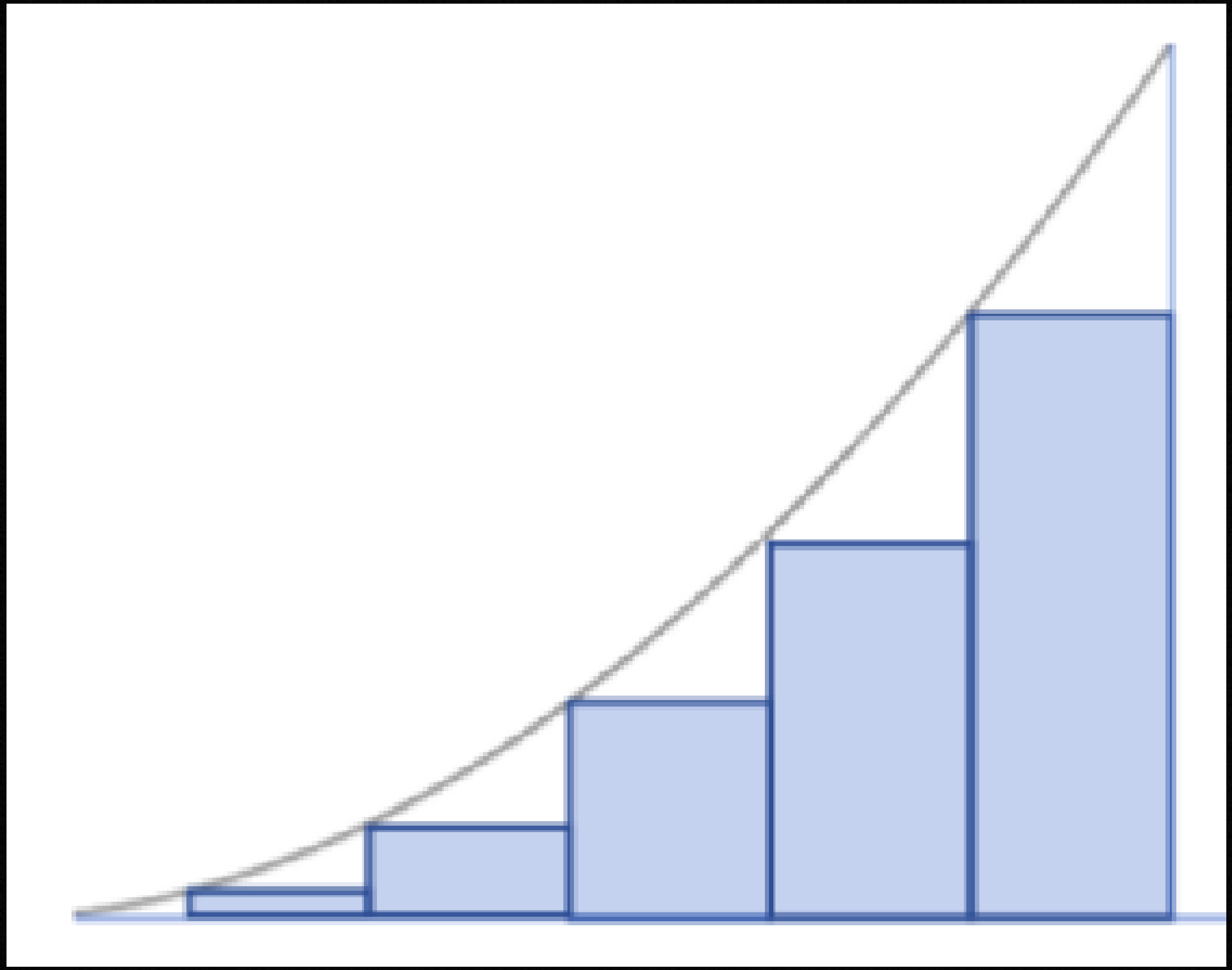
3. PENDAHULUAN LUAS



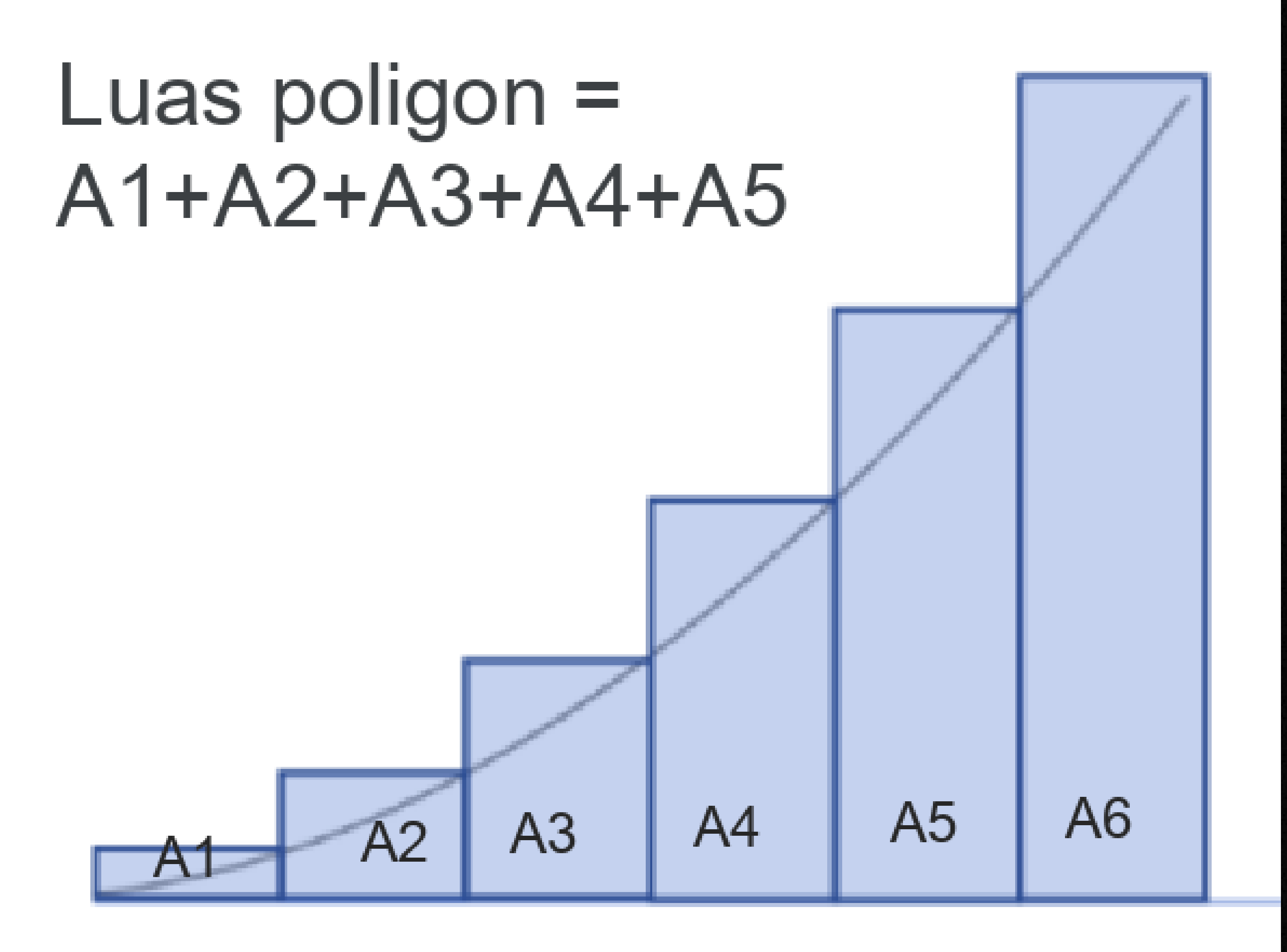



P1
P2
P3
T1
T2
T3

Luas Menurut Poligon Dalam



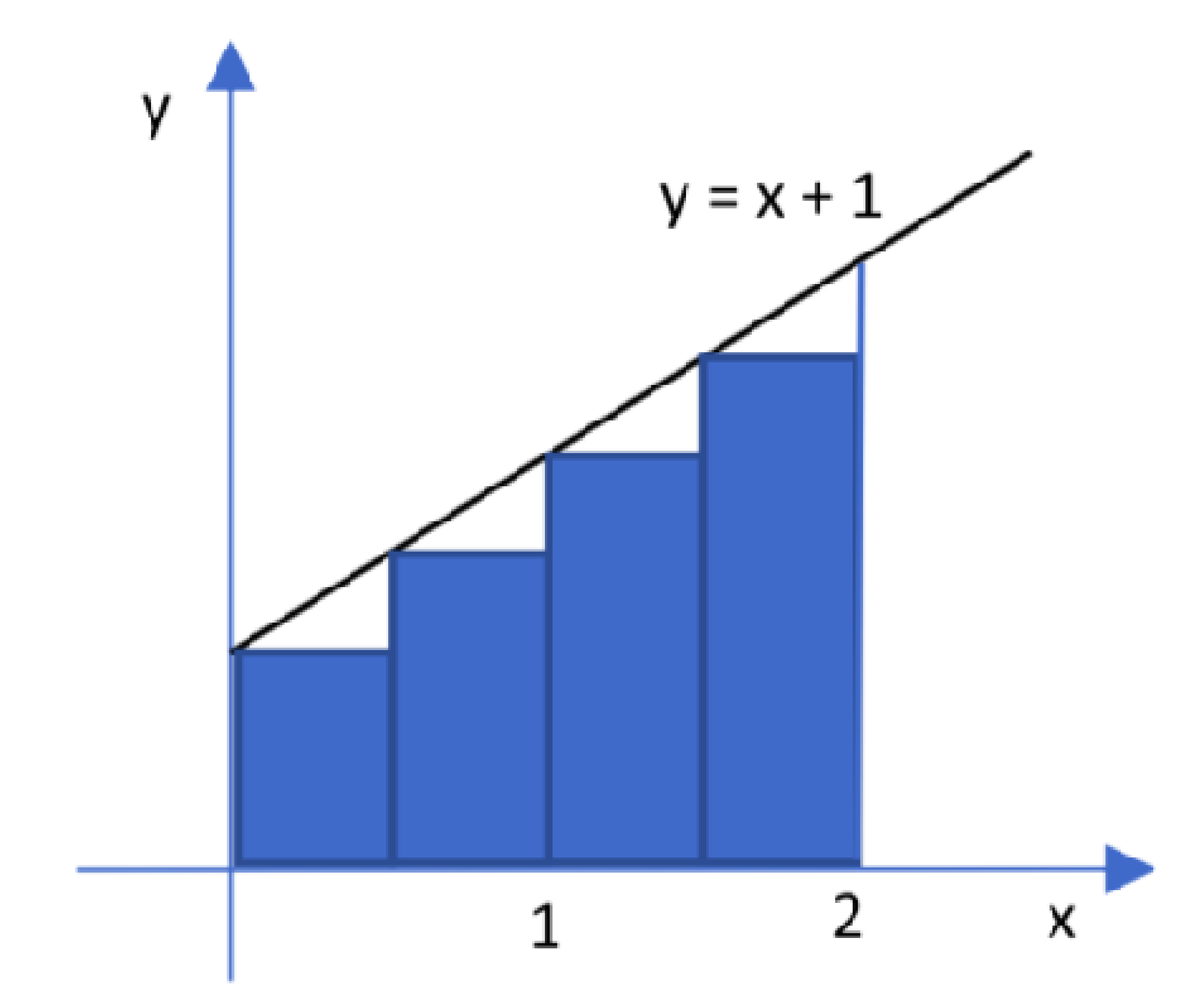
Luas Menurut Poligon Luar



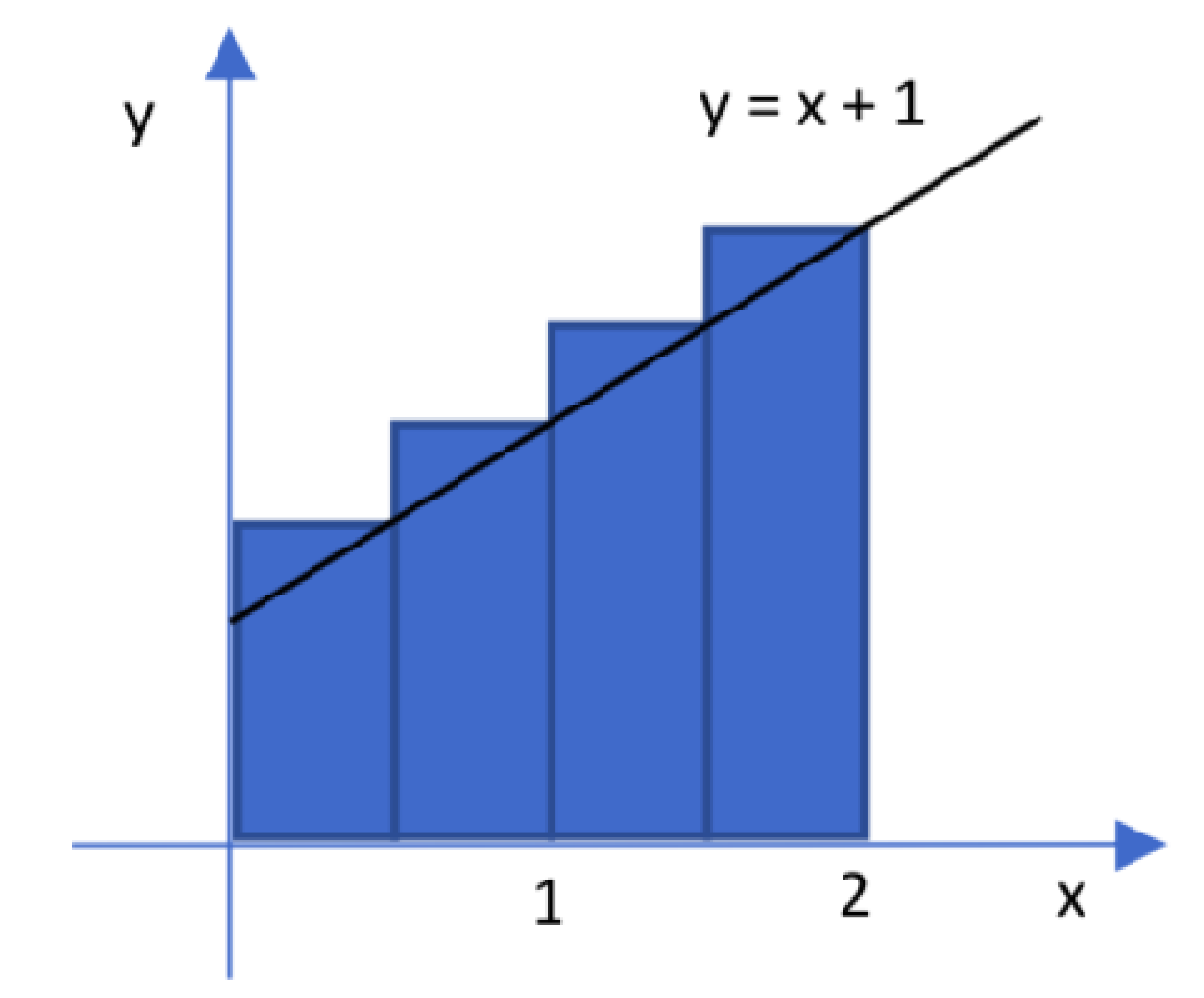
LATIHAN SOAL

1. Carilah turunan umum dari fungsi $f(x) = 4x^5 - x^3$

2. Carilah luas poligon dalam atau poligon luar berikut.



(a)



(b)