Nama :____ **Tanggal:** _______________

Tingkat: ____________

Pokok Bahasan/ Pembelajaran :
Sasaran Pembelajaran:
Di akhir modul, mahasiswa dapat:
1. Menjelaskan dan menyelesaikan soal Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan eliminasi Gauss.
2. Menjelaskan dan menyelesaikan soal Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan eliminasi Gauss Jordan.

Materi:
Sistem Persamaan Linear (SPL)

Referensi:

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1.* Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear.* UPI: Bandung [Online]

A. TINJAUAN PENDAHULUAN

<u>Pendahuluan</u>


Carl Friedrich Gauss (1777–1855)


Wilhelm Jordan (1842–1899)

Carl Friedich Gauss (1977-1855) adalah seorang ahli matematika dan ilmuwan dari Jerman yang dijuluki “Pangeran Ahli Matematika. Sedangkan Wilhelm Jordan (1842-1899) adalah seorang insinyur Jerman yang ahli dalam bidang geodesi. Sumbangannya untuk penyelesaian sistem linear dalam buku populernya, *Handbuch de Vermessungskunde* (Buku panduan Geodesi) pada tahun 1988. Dalam aljabar linear, eliminasi Gauss-Jordan adalah versi dari eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauus-Jordan kita membuat nol elemen-elemen di bawah maupun di atas diagonal utama suatu matriks. Hasilnya adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satuan (Semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, elemen-elemen lainnya nol).

Metode eliminasi Gauss-Jordan kurang efisien untuk menyelesaikan sebuah SPL, tetapi lebih efisien daripada eliminasi Gauss jika kita ingin menyelesaikan SPL dengan matriks koefisien sama. Motede tersebut dinamai Eliminasi Gauss-Jordan untuk menghormati Carl Friedrich Gauss dan

Whilhelm Jordan.

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari materi penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan metode:

- ❖ Eliminasi Gauss
- ❖ Eliminasi Gaus Jordan

B. MATERI PEMBELAJARAN

<u>Konten/Isi</u>

1. Eliminasi Gauss

Pada bagian ini kita akan mempelajari prosedur penyelesaian sistem persamaan linear yang didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk yang cukup sederhana sehingga system persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan memeriksa system tersebut. Slaha satu metode penyelesaian SPL adalah metodel eliminasi Gauss. Adapun Langkah-langkah eliminasi Gauss adalah sebagai berikut:

- Nyatakan SPL dalam bentuk matriks *augmented*
- Terapkan OBE pada matriks *augmented* sampai terbentuk matriks eselon baris. Suatu matriks dikatakan eselon jika memenuhi syarat berikut:
  1) Bila ada baris yang tak semua nol, maka elemen pertama yang bukan nol harus bilanagn 1
  2) Elemen pertama yang bukan nol pada baris di bawahanya harus di sebelah kanan 1
  3) Baris yang semua nol harus pada bagian bawah.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

- Pecahkan persamaan yang berkoresponden pada matriks eselon baris dengan Teknik penyulihan mundur (*backward substitution*)

Contoh: Selesaikan SPL berikut dengan dengan metode eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ubahlah SPL ke dalam bentuk matriks *augmented*

- Kalikan baris pertama dengan 1/2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tambahkan baris kedua dengan -4 kali baris pertama dan tambahkan baris ketiga dengan 2 kali baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris kedua dengan -1/2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- Tambahkan baris ketiga dengan -6 kali baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris ketiga dengan -1/5

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris

Diperoleh persamaan-persamaan linear sebagai berikut:

$x_1 + 3/2x_2 – 1/2x_3 = 5/2$…………..(i)

$x_2 + 1/2x_3 = 7/2$…………(ii)

$x_3 = 3$……………(iii)

Selesaikan dengan teknik penyulihan mundur sebagai berikut:

Substitusi $x_3 = 3$ ke persamaan (ii) diperoleh $x_2 = 7/2 – 1/2(3) = 2$

Substitusi $x_3 = 3$ dan $x_2 = 2$ diperoleh $x_1 + 3/2x_2 – 1/2x_3 = 5/2$

$x_1 + 3/2\ (2) – 1/2\ (3) = 5/2$

$x_1 = 5/2 - 3/2\ (2) - 1/2\ (3) = 1$

Jadi, penyelesaian SPL tersebut adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

2. Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss. Pada eliminasi Gauss OBE diterapkan pada matriks *augmented* dan berakhir pada matriks eselon baris. Sedangkan pada eliminasi Gauss-Jordan OBE diterapkan pada matriks *augmented* sehingga berakhir pada matriks eselon baris tereduksi. Sehingga tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Nilai variabel atau solusi SPL diperoleh langsung dari matriks *augmented* akhir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

Contoh: Selesiakan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{R3+R1 \\ R4-3R1}}{\overset{R2-2R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R2/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{R4-3R2}{\overset{R3-R2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R1+R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Persamaan yang diperoleh:

$x_1 - x_4 = -1$ (i)

$x_2 - 2x_3 = 0$ (ii)

Matriks *augmented* terakhir sudah berbentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang diperoleh:

Matriks *augmented* terakhir sudah berbentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang diperoleh:

$x_1 - x_4 = -1$ (i)

$x_2 - 2x_3 = 0$ (ii)

Dari (ii) diperoleh:

$x_2 = 2x_3$

Dari (i) diperoleh:

$x_1 = x_4 - 1$

Misalkan $x_3 = r$ dan $x_4 = s$, maka solusi SPL tersebut adalah:

$x_1 = s - 1$, $x_2 = 2r$, $x_3 = r$, $x_4 = s$, yang dalam hal ini $r, s \in R$

3. Sistem Persamaan Linear Homogen

Suatu sistem persamaan linear dikatakan ***homogen*** jika konstantanya semuanya nol. Yaitu, jika sistem tersebut mempunyai bentuk:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = 0 \end{matrix}$$

Setiap sistem persamaan linear homogen mempunyai sifat yang konsisten, karena semua sistem itu mempunyai $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ sebagai penyelesaiannya. Penyelesaian ini disebut ***penyelesaian trivial,*** jika ada penyelesaian yang lain maka penyelesaiannya disebut ***penyelesaian***

tak-trivial.

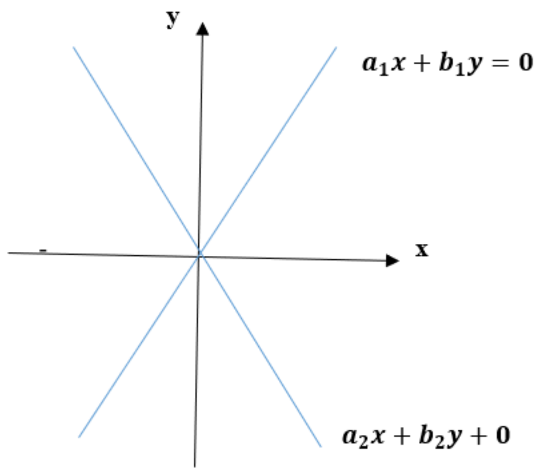
Karena sistem liniear homogen selalu mempunyai penyelesaiian trivial, maka hanya ada dua kemungkinan untuk penyelesaiannya:

- Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
- Sistem tersebut mempunyai tak-hingga banyaknya penyelesaian disamping penyelesaian trivial.

Dalam kasus sistem linier homogen khusus dari dua persamaan dengan dua peubah katakanlah

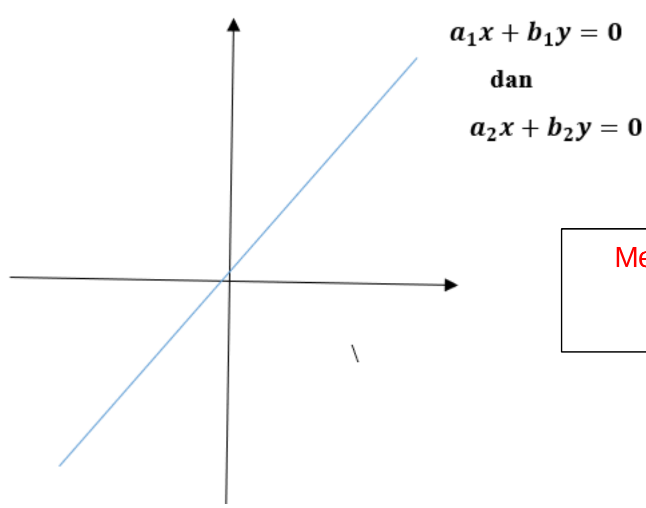
$$a_1x + b_1y = 0 \qquad (a_1, b_1\ tidak\ keduanya\ nol)$$
$$a_2x + b_2y = 0 \qquad (a_2, b_2\ tidak\ keduanya\ nol)$$

Grafik persamaannya berupa garis-garis yang melalui titik asal dan penyelesaian trivialnya berpadanan dengan perpotongan di titik asal (Gambar 1).



Meniliki penyelesaian trivial

Gambar 1



Meniliki tak hingga banyaknya penyelesaian

Gambar 2

Ada suatu kasus dimana suatu sistem homogen dijamin mempunyai penyelesaian tak-trivial yaitu, jika sistem tersebut mencakup jumlah peubah yang lebih banyak daripada jumlah persamaannya. Untuk melihat mengapa, pertimbangkan contoh empat persamaan dengan lima peubah berikut ini.

Contoh 6

Selesaikan sistem persamaan liniear homogen berikut ini dengan eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - -3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\qquad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{… (1)}$$

Penyelesaian. Matrik yang diperbanyak untuk sistem ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matrik ii menjadi bentuk baris-eselon tereduksi, kita peroleh:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang berpadanan adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad + x_5 &= 0 \\ x_3 \qquad + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{… (2)}$$

Menyelesaikan untuk peubah utama menghasilkan

$$x_1 = -x_2 - x_5$$

$$x_3 = -x_5$$

$$x_4 = 0$$

Jadi penyelesaian umumunya adalah $x_1 = -s - t,\ x_2 = s, x_3 = -t, x_4 = 0,\ x_5 = t$

Perhatikan bahwa penyelesaian trivial diperoleh jika s = t = 0

Contoh 6 mengilustrasikan dua poin penting dalam menyelesaikan sistem persamaaan liniear homogen.

Pertama tidak satupun dari ketiga operasi baris dasar yang bisa mengubah kolom nol terakhir dalam matriks yang diperbanyak, sedemikian sehingga sistem persamaan tersebut berpadanan dengan bentuk baris eseleon tereduksi dari matriks yang diperbanyak harusnya juga suatu sistem homogen [lihat sistem (2)]. Kedua, tergantung pada apakah bentuk baris –eseleon tereduksi dari matriks yang diperbanyak mempunyai baris nol atau tidak, jumlah persamaaan dalam sistem tereduksi sama atau kurang dari jumlah persamaan dalam sistem aslinya [bandingkan sistem (1) dan (2)]. Jadi, jika sistem homogen yang diberikan mempunyai m persamaaan dalam n peubah dengan $m < n$, dan jika ada r baris tak-nol dalam matriks yang diperbanyak berbentuk baris – eseleon tereduksi. Kita akan mendapati $r < n$. Akibatnya, sistem persamaan yang berpadanan dengan bentuk baris-eseleon tereduksi dari matrriks yang diperbanyak akan mempunyai bentuk:

$$\begin{aligned} \cdots x_{k_1} \qquad\qquad &+ \Sigma(\ \ ) = 0 \\ \cdots x_{k_2} \quad &+ \Sigma(\ \ ) = 0 \\ x_{k_r} &+ \Sigma(\ \ ) = 0 \end{aligned}$$

Dengan $x_{k_1}, x_{k_2} \ldots., x_{k_r}$ adalah peubah-peubah utama dan $\Sigma(\ \ )$ menyatakan jumlah (mungkin semuanya berbeda) yang melibatkan $n - r$ peubah bebas [bandingkan sisitem (3) dengan istem (2) diatas]. Menyelesaiakan untuk peubah menghasilkan.

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= -\Sigma(\ \ ) \\ x_{k_2} &= -\Sigma(\ \ ) \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= -\Sigma(\ \ ) \end{aligned}$$

Seperti pada contoh 6, kita bisa menetapkan sebarang nilai untuk peubah bebas di sebelah kanan dan kemudian mendapatkan tak-hingga banyaknya penyelesaian terhadap sisitem tersebut. Ringkasnya kita mempuyai teorema penting berikut ini.

Teorema 1.2.1 *Sebuah Sistem Persamaan liniear homogen dengan jumlah peubah yang lebih banyak daripada jumlah persamaam mempunyai tak-hingga banyaknya penyelesaian.*

KOMENTAR. Perhatikan bahwa Teorema 1.2.1 hanya berlaku untuk sistem-sistem homogen Sebuah sistem tak homogen dengan jumlah peubah yang lebih banyak daripada jumlah persamaan tidak harus konsisten. Akan tetapi, jika sistem tersebut konsisten, maka sisitem akan mempunyai tak-hingga banyaknya penyelesaian. Hal ini akan dibuktikan kemudian.

C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan eliminasi Gauss atau eliminasi Gauss-Jordan, saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut!

SOAL LATIHAN

1. Manakah dari matriks-matriks 3 x 3 berikut ini yang berbentuk eselon baris tereduksi?

(a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

2. Manakah dari matriks-matriks 3 x 3 berikut ini yang berbentuk eselon baris?

(a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix}1 & 5 & -3\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

3. Tentukan sistem persamaan yang berpadanan dengan matriks-matriks berikut?

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 9\\0 & 1 & -5 & 7\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 9 & 0 & 0 & 5 & -7\\0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

4. Selesaikan masing-masing matriks berikut ini dengan metode eliminasi Gauss

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

5. Selesaikan masing-masing persamaan berikut dengan metode eliminasi Gauss

(a) $2x_1 - 3x_2 = -2$

$2x_1 + x_2 = 1$

$3x_1 + 3x_2 = -2$

(b) $3x_1 + 2x_2 - x_1 = -15$

$5x_1 + 3x_2 + 2x_1 = 0$

$3x_1 + x_2 + 3x_1 = 11$

$-6x_1 - 4x_2 + 2x_1 = 30$

6. Selesaikan masing-masing persamaan berikut dengan metode eliminasi Gauss-Jordan

(a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$$

(b).
$$\begin{aligned} -2b - 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$$