Nama :____ **Tanggal:** _______________

Tingkat: ____________

Pokok Bahasan/ Pembelajaran :

Sasaran Pembelajaran:

Di akhir modul, mahasiswa dapat:

1. Memahami fungsi determinan
2. Menjelaskan fungsi determinan dan sifat-sifat determinan
3. Menyelesaikan soal berkaitan dengan fungsi determinan

Materi:
Fungsi Determinan

Referensi:

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1.* Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear.* UPI: Bandung [Online]

A. TINJAUAN PENDAHULUAN

Pendahuluan

Kita semua mengenal fungsi-fungsi seperti seperti f(x) = sin x dan f(x) = x^2, yang menghubungkan suatu bilangan real f(x) dengan suatu nilai real dari peubah x. Karena x dan f(x) dianggap hanya bernilai real, fungsi-fungsi seperti itu disebut sebagai “ fungsi bernilai real dari suatu peubah real. “Pada bagian ini kita akan menelaah **fungsi determinan**, yang merupakan suatu “fungsi bernilai-real dari suatu peubah matriks“ dalam pengertian bahwa fungsi tersebut menghubungkan suatu bilangan real f(x) dengan suatu matriks X. Apa yang kita lakukan dalam fungsi-fungsi determinan akan mempunyai penerapan penting pada teori sistem persamaan linear dan juga akan mempunyai penerapan penting pada suatu rumus eksplisit untuk invers dari suatu matriks yang dapat dibalik.

Ingatlah bahwa matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat dibalik jika ad – bc ada sehingga ekpresi ini diberi nama determinan dari matriks $A_{(2 \times 2)}$ dan dinyatakan dengan simbol det(A). Dengan notasi ini, invers dari matriks A bisa dinyatakan sebagai

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Salah satu sasaran dalam bab ini adalah memperoleh analogi dari rumus ini untuk matriks – matriks berorde lebih tinggi. Hal ini menuntut kita memperluas konsep suatu determinan ke matriks- matriks berorde lebih tinggi. Untuk tujuan ini kita akan memerlukan beberapa hasil awal tentang permutasi.

DEFINISI. Suatu ***permutasi*** himpunan bilangan bulat {1, 2, ..., n} adalah suatu susunan bilangan-bilangan bulat ini dalam suatu urutan tanpa penghilangan atau pengulangan.

Contoh 1: Ada enam permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan bulat $\{1,2,3\}$. Permutasi – permutasi tersebut adalah

(1, 2, 3) (2, 1, 3) (3, 1, 2)

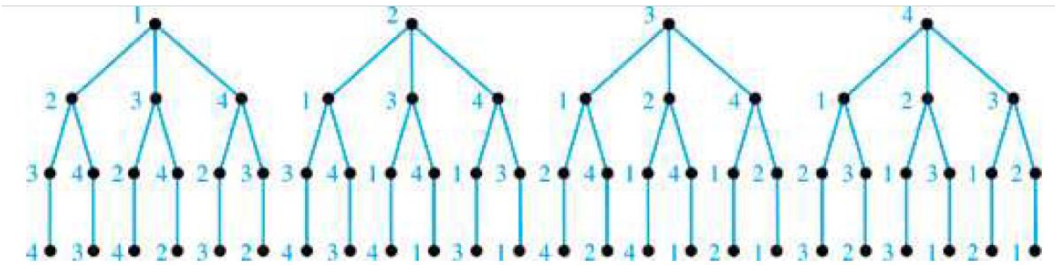
(1, 3, 2) (2, 3, 1) (3, 2, 1)

Suatu metode yang mudah untuk mendaftarkan permutasi secara sistematis adalah dengan menggunakan suatu *pohon permutasi.* Metode ini diilustrasikan pada contoh kami yang berikutnya.

Contoh 2: Daftarkan semua permutasi dari himpunan bilangan bulat {1,2,3,4}

Penyelesaian. Tinjau gambar 1. Empat titik yang berlabel 1,2,3,4 pada bagian atas gambar mewakili pilihan-pilihan yang mungkin untuk angka pertama dalam permutasi. Ranting-ranting pohon yang berasal dari titik – titik ini mewakili pilihan – pilihan yang mungkin untuk posisi kedua dalam permutasi tersebut. Jadi, jika permutasi dimulai dengan (2, -, -, -,) tiga kemungkinan untuk posisi kedua adalah 1, 3, 4. Dua ranting yang berasal dari setiap titik dalam posisi kedua mewakili pilihan –pilihan yang mungkin untuk posisi ketiga. Jadi, jika permutasi dimulai dengan (2, 3, -, -,), dua pilihan yang mungkin untuk posisi ketiga adalah 1 dan 4. Akhirnya, ranting tunggal yang berasal dari setiap titik pada posisi ketiga mewakili satu – satunya pilihan yang mungkin untuk posisi keempat. Jadi, jika permutasi dimulai dengan (2, 3, 4, -), satu- satunya pilihan untuk posisi keempat adalah 1. Sekarang permutasi yang berbeda bisa didaftarkan dengan melacak semua jalur yang mungkin melalui “ Pohon” tersebut dari posisi pertama sampai posisi terakhir. Kita peroleh daftar berikut dengan proses ini.

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 3, 2)
(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 4, 3, 2)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 1, 2)
(1, 4, 3, 2)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 2, 1)



Gambar 1

Dari contoh ini kita lihat bahwa ada 24 permutasi dari {1, 2, 3, 4}. Hasil ini telah diantisipasi tanpa benar benar membuat daftar permutasi dengan berpikir sebagai berikut. Karena posisi pertama bisa diisi dengan 4 cara dan kemudian posisi kedua dalam 3 cara, ada 4 . 3 cara untuk mengisi dua posisi yang pertama . Karena posisi ketiga bisa diisi dengan dua cara, ada 4 . 3 . 2 cara untuk mengisi 3 posisi yang pertama. Akhirnya Karena posisi terakhir selanjutnya bisa diisi dengan satu cara, maka ada 4 . 3 . 2 . 1 = 24 cara untuk mengisi ke empat posisi tersebut. Secara umum, himpunan {1, 2, ..., n} akan mempunyai n (n – 1) (n – 2) · · · 2 · 1= n! Permutasi yang berbeda.

Untuk menyatakan suatu permutasi umum dari himpunan {1, 2, ..., *n*}, Kita akan menuliskan $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Di sini, j_1 adalah bilangan bukat pertama dalam permutasi, j_2 adalah yang kedua dan seterusnya. Suatu ***pembalikan*** dikatakan terjadi dalam suatu permutasi$(j_1, j_2, \dots, j_n)$ bilamana suatu bilangan bulat yang lebih besar mendahului yang lebih kecil. Total jumlah pembalikan yang terjadi dalam suatu permutasi bisa didapatkan sebagai berikut: (1) cari jumlah bilangan bulat yang lebih kecil dari j_1 dan yang mengikuti $j_1$dalam permutasi tersebut; (2) cari jumlah bilangan bulat yang lebih kecil dari $j_2$dan yang mengikuti j_2 dalam permutasi tersebut. Teruskan proses menghitung ini untuk $j_3, \dots, j_{n-1}$. Total dari jumlah-jumlah ini adalah total jumlah pembalikan dalam permutasi tersebut.

Contoh 3: Tentukanlah jumlah pembalikan dalam permutasi berikut ini:

(a) (6, 1, 3, 4, 5, 2)   (b) (2, 4, 1, 3)   (c) (1, 2, 3, 4)

Penyelesaian:

(a) Jumlah pembalikan adalah 5+0+1+1+1 = 8
(b) Jumlah pembalikan adalah 1+2+0 = 3
(c) Tidak ada pembalikan dalam permutasi ini.

DEFINISI. Suatu permutasi disebut bilangan ***genap*** jika total jumlah pembalikan merupakan bilangan bulat genap dan disebut bilangan ***ganjil*** jika total jumlah pembalikan merupakan suatu bilangan bulat ganjil.

Contoh 4 Tabel berikut ini mengklasifikasikan berbagai permutasi dari {1, 2, 3} sebagai genap atau ganjil.

Permutasi	Jumlah Pembalikan	Klasifikasi
(1, 2, 3)	0	genap
(1, 3, 2)	1	ganjil
(2, 1, 3)	1	ganjil
(2, 3, 1)	2	genap
(3, 1, 2)	2	genap
(3, 2, 1)	3	ganjil

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari materi Fungsi Determinan, meliputi:

- ❖ Definisi fungsi determinan
- ❖ Menghitung determinan Ordo 2 x 2 dan 3 x 3
- ❖ Sifat-sifat fungsi determinan
- ❖ Menghitung determinan dengan reduksi baris

B. MATERI PEMBELAJARAN

<u>Konten/Isi</u>

1. Definisi Fungsi Determinan

Dengan suatu ***hasil kali dasar*** dari suatu matriks $A_{(n \times n)}$, kita akan memberikan makna pada setiap hasil kali dari *n* anggota dari *A,* yang dua diantaranya tidak ada yang berasal dari baris atau kolom yang sama.

Contoh 5 Daftarkan semua hasil kali dasar dari matriks-matriks

(a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

(a) Karena setiap hasil kali dasar mempunyai dua faktor, dan karena masing-masing faktor berasal dari suatu baris yang berbeda, maka suatu hasil kali dasar bila ditulis dalam bentuk

$$a_1.a_2$$

di mana tempat yang kosong menyatakan angka kolom. Karena tidak ada dua faktor dalam hasil kali tersebut yang berasal dari kolom yang sama, maka angka-angka kolom pastilah 12 atau 21. Jadi, hasil-hasil dasar yang mungkin hanyalah $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$.

(b) Karena setiap hasil kali dasar mempunyai tiga faktor, yang masing-masingnya berasal dari baris yang berbeda, maka suatu hasil kali dasar bisa ditulis dalam bentuk

$$a_1.a_2.a_3.$$

Karena tidak ada dua faktor dalam hasil kali tersebut yang berasal dari kolom yang sama, maka angka-angka kolom tidak berulang; akibatnya, angka-angka ini harus membentuk suatu permutasi dari himpunan {1, 2, 3}. Permutasi 3! = 6 menghasilkan daftar hasil kali dasar berikut ini.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad a_{12}a_{21}a_{33} \quad a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad a_{13}a_{22}a_{31}$$

Sebagaimana yang di tunjukan oleh contoh ini, suatu matriks *A*, *n* x *n* mempunyai *n!* Hasil kali dasar. Hasil-hasil kali ini berbentuk $a_{1j_1}, a_{2j_2}. . . a_{nj}$, di mana $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah suatu permutasi dari himpunan {1, 2, ..., *n}.* Dengan suatu ***hasil kali dasar bertanda dari A*** kita akan memberi makna pada suatu hasil kali dasar $a_{1j_1}, a_{2j_2}. . . a_{nj}$, yang dikalikan dengan +1 atau -1. Kita gunakan+ jika$(j_1, j_2, \dots, j_n)$, adalah suatu permutasi genap dan – jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah suatu permutasi ganjil.

Contoh 6 Daftarkan semua hasil kali dasar bertanda dari matriks-matriks berikut ini.

$$(a)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (b)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

a)

Hasil Kali Dasar	Permutasi Terkait	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Dasar Bertanda
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	ganjil	$-a_{12}a_{21}$

b)

Hasil Kali Dasar	Permutasi Terkait	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Dasar Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Sekarang kita berada dalam posisi untuk mendefinisikan fungsi determinan.

> **Definisi.** Anggap A adalah suatu matriks bujur sangkar. ***Fungsi determinan*** dinyatakan dengan *det,* dan kita mendefinisikan *det(A)*sebagai jumlah semua hasil kali dasar bertanda dari *A.* Angka *det(A)* disebut ***determinan A***.

2. Menghitung Determinan Ordo 2 x 2 dan 3 x 3

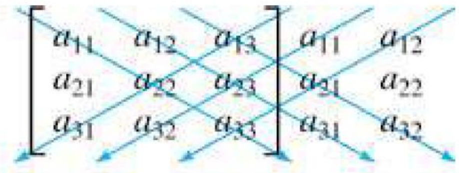
Berdasarkan contoh 6, kita peroleh:

a) $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) $\det\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Supaya Anda tidak perlu menghafalkan persamaan-persamaan yang susah diingat ini kami menyarankan Anda menggunakan jembatan keledai (*mnemonic)* yang diuraikan pada Gambar 2. Rumus pertamapada Contoh 7 diperoleh dari Gambar 2*a* dengan mengalikan anggota-anggota pada panah kanan dan mengurangkannya dengan hasil kali anggota-anggota pada panah kiri. Rumus kedua pada Contoh 7 diperoleh dengan menulis ulang kolom pertama dan kedua seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2*b*.Kemudian determinan dihitung dengan menjumlahkan hasil kali pada panah kanan mengurangkannya dengan hasil kali pada panah kiri.

(a)



(b)

Contoh 8 Hitung determinan dari

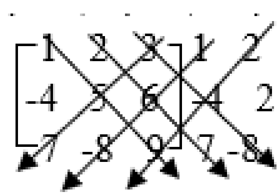
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \; dan \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian. Dengan menggunakan metode 2a kita mendapatkan

Det *(A) = (3) (-2) – (1)(4) = 10*

Dengan menggunakkan metode 2*b* kita mendapatkan

Det *(B) = (45) + (84) + (96) – (105) – (-48) – (-72) = 240*



Peringatan. Kami menekankan bahwa metode yang ditunjukkan pada metode 2b tidak bisa digunakan untuk mencari determinan matriks 4 × 4 atau yang lebih tinggi.

Menghitung determinan secara langsung dari definis membawa pada kesulitan perhitungan. Sungguh, menghitung suatu determinan 4× 4 secara langsung akan melibatkan perhitungan 4! = 24 hasil kali dasar bertanda, dan suatu determinan 10 × 10 akan melibatkan 10! = 3.628.800 hasil kali dasar bertanda. Bahkan komputer digital tercepatpun tidak bisa menangani perhitungan determinan 25 × 25 dengan metode ini kurun waktu yang masih dianggap praktis. Oleh karena itu, sebagian besar dari sisi bab ini ditunjukan untuk mengembangkan sifat-sifat determinan yang akan menyederhanakan perhitungannya.

Kami akhiri bagian ini dengan beberapa komentar mengenai terminologi dan notasi. Pertama, kita perhatikan bahwa simbol |*A*| merupakan suatu notasi alternatif untuk det (*A*). Misalnya determinan matriks 3×3 bisa ditulis sebagai

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad atau \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dalam notasi yang terakhir, determinan matriks *A* pada Contoh 8 bisa ditulis sebagai

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

Komentar. Secara tegas, determinan suatu matriks adalah suatu bilangan. Akan tetapi, pada umumnya kita agak "menyalah-gunakan" terminologi tersebut dan menggunakan istilah "determinan" untuk mengacu pada *matriks* yang determinannya sedang dihitung. Jadi, kita boleh mengacu

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Sebagai suatu determinan 2x2 dan menyebut 3 sebagai anggota pada baris pertama dan kolom pertama dari determinan tersebut.

Akhirnya, kita perhatikan bahwa determinan *A* sering ditulis secara simbolis sebagai

$$\det(A) = \Sigma \pm a_{1j1} a_{2j2} \ldots a_{njn}$$

di mana Σ menunjukkan bahwa suku-suku dijumlahkan atas semua permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ dan + atau – dipilih pada setiap suku tergantung pada apakah permutasi tersebut genap atau ganjil. Notasi ini berguna ketika definisi suatu determinan perlu ditekankan.

3. Sifat-sifat Fungsi Determinan

Pada bagian ini kita akan mengembangkan beberapa sifat-sifat dasar fungsi determinan. Apa yang kita lakukan disini akan memberi kita suatu wawasan yang lebih luas mengenai hubungan antara suatu matriks bujur sangkar dan determinannya. Salah satu konsekuensi segera dari materi ini adalah suatu uji determinan untuk ada atau tidaknya invers suatu matriks.

a) Sifat-sifat dasar determinan

Anggap *A* dan *B* adalah matriks *n*×*n* dan *k* adalah sebarang skalar. Kita mulai dengan mengkaji hubungan yang mungkin antara det(*A*), det(*B*), dan

det(*kA*), det(*A*+*B*) dan det(*AB*).

Karena suatu faktor umum dari setiap baris suatu matriks bisa dipindah melalui tanda det, dan karena setiap *n* baris dalam *kA* mempunyai suatu faktor umum *k*, maka kita peroleh :

$$\det(kA) = k^n \det(A) \tag{1}$$

Misalnya,

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix} = k^3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Secara umum tidak ada hubungan sederhana antar determinan-determinan det(*A*), det(*B*), dan det(*A*+*B*). Secara khusus, kami menekankan bahwa det(*A*+*B*) biasanya *tidak* sama dengan det(*A)* + det(*B).*

Contoh 1 Tinjau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Kita mendapati bahwa det(*A)*=1, det(*B)*=8, det(*A*+*B)*=23.

Jadi det(*A*+*B)* ≠ det(*A)*+det(*B).*

Walaupun ada nada negatif pada contoh di atas, tetapi ada hubungan penting berkenaan dengan jumlah determinan yang seringkali berguna. Untuk mendapatkannya, kaji dua matriks 2 × 2 yang hanya berbeda pada baris keduanya :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \det(A)+\det(B) &= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22}-a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22}+b_{22})-a_{12}(a_{21}+b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

ini merupakan suatu kasus khusus dari hasil umum berikut ini.

Teorema 2.3.1

Anggap A, B, dan C adalah matriks $n \times n$ yang berbeda hanya salah satu barisnya, katakanlah baris ke-r, dan anggap baris ke-r dari C bisa diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota yang berpadanan pada baris ke-r dari A dan B. Maka

det(C) = det(A)+det(B)

hasil yang sama berlaku untuk kolom.

Contoh 2 Dengan menghitung determinan, pembaca bisa memeriksa bahwa

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Determinan suatu hasil kali matriks

Jika seseorang mengkaji kekompleksan definisi perkalian dan determinan matriks, tampaknya tidak mungkin akan ada hubungan yang sederhana diantaranya. Inilah yang membuat kesederhanaan yang anggun dari hasil berikut ini menjadi begitu mengejutkan : Kita akan menunjukan bahwa jika *A* dan *B* adalah matriks bujur sangkar berukuran sama, maka

$$\det(AB)=\det(A)\det(B) \tag{2}$$

Bukti dari teorema ini cukup ruwet, jika kita harus mengembangkan hasil-hasil dasar terlebih dahulu. Kita mulai dengan kasus khusus (2) dimana *A* adalah suatu matriks dasar. Karena kasus khusus ini hanyalah pengantar ke (2), kita menyebutnya lemma.

Lemma 2.3.2 Jika B adalah matriks $n\times n$ dan E adalah matriks dasar $n\times n$, $maka$

det(EB) = det(E) det(B)

Bukti :

Kita akan meninjau tiga kasus, masing-masing tergantung pada operasi baris yang menghasilkan *E*.

Kasus 1

Jika *E* dihasilkan dengan mengkalikan suatu baris dari I_n dengan *k,*maka berdasarkan Teorema 1.5.1 *EB* dihasilkan dari *B* dengan mengalikan suatu baris dengan *k;* jadi dari Teorema 2.2.3a kita mendapatkan

$$\det(EB)=k\det(B)$$

Kasus 2 dan 3.

Bukti dari kasus-kasus di mana E dihasilkan dengan mempertukarkan dua baris dari I_n atau dengan menambahkan suatu penggandaan salah satu baris ke baris lainnya mengikuti pola yang sama seperti kasus 1 dan ditinggalkan sebagai latihan.

KOMENTAR.

Dengan mengurangi penerapan Lemma 2.3.2 bahwa jika B adalah suatu matriks $n \times n$, dan E_1, E_2, …, E_r adalah matriks-matriks dasar n x n, maka

$$\det(E_1 E_2 \dots E_r, B)=\det(E_1)\det(E_2)\dots\det(E_r)\det(B) \quad (3)$$

Misalnya,

$$\det(E_1E_2B)=\det(E_1)\det(E_2B)=\det(E_1)\det(E_2)\det(B)$$

c) Uji determinan untuk ada tidaknya suatu matriks

Teorema selanjutnya merupakan salah satu teorema yang paling mendasar dalam aljabar linear; teorema ini memberikan kriteria penting untuk ada atau tidaknya invers suatu matriks dengan melihat determinannya, dan teorema ini akan digunakan untuk membuktikan (2).

Teorema 2.3.3.

Suatu matriks bujur sangkar A dapat dibalik jika dan hanya jika (A) ≠ 0

Bukti. Anggap R adalah bentuk baris-eselon tereduksi dari A. Sebagai suatu langkah awal, kita akan menunjukan bahwa det(A) dan det(R) keduanya nol atau keduanya tak-nol : Anggap E_1, E_2, ...E_r adalah matriks-matriks dasar yang berpadanan dengan operasi baris dasar yang menghasilkan R dari A. Maka $R= E_r \dots E_2 E_1 A$ dan dari (3)

$$\det(R)=\det(E_r)\dots\det(E_2)\det(E_1)\det(A) \quad (4)$$

Tetapi dari Teorema 2.2.4 determinan matriks-matriks dasar tersebut semuanya tak-nol.

(Ingatlah bahwa mengalikan suatu baris dengan nol *bukanlah* operasi baris dasar yang diperbolehkan, jadi jika $k \neq 0$ dalam penerapan Teorema 2.2.4 ini).

Oleh karena itu, dari (4) kita dapatkan bahwa determinan (A) dan determinan (R) keduanya nol atau keduanya tak-nol. Sekarang kita menuju bagian utama dari pembuktian. Jika A dapat dibalik, maka berdasarkan Teorema 1.6.4 kita dapatkan $R=I$, sehingga det(R) $=1 \neq 0$.

Sebaliknya, jika det(A) $\neq 0$, maka det(R) $\neq 0$, sehingga R tidak boleh mempunyai satu baris nol. Dari

Teorema 1.4.3 kita dapatkan bahwa *R*=*I*, sehingga *A* bisa dibalik menurut Teorema 1.6.4.

Dari Teorema 2.3.3 dan 2.2.5 kita dapatkan bahwa suatu matriks bujur sangkar dengan dua baris atau kolom yang proporsional tidak dapat dibalik.

Contoh 3 karena baris pertama dan ketiga dari *A*=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ proporsiaonal, maka det(*A*)=0.

Jadi *A* tidak bisa dibalik.

Teorema 2.3.4

Jika A dan B adalah matriks-matriks bujur sangkar berukuran sama, maka

det(AB) = det(A)det(B)

Bukti. Kami membagi buktinya menjadi dua kasus yang tergantung pada apakah *A* bisa dibalik atau tidak. Jika matriks *A* tidak bisa dibalik, maka berdasarkan Teorema 1.6.5 hasil kali *AB* juga tidak bisa dibalik. Jadi, dari Teorema 2.3.3, kita dapatkan det(*AB*) = 0 dan det(*A*)= 0, sehingga det(*AB*)=det(*A*)det(*B*).

Sekarang anggap *A* dapat dibalik. Berdasarkan Teorema 1.6.4, matriks *A* dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks dasar, katakanlah

$$\boldsymbol{A=E_1E_2....E_r} \qquad \textbf{(5)}$$

sehingga *AB*=$E_1E_2....E_r$ *B* Menerapkan (3) pada peramaan ini menghasilkan

det(*AB*)=det(E_1)det(E_2)....det(E_r)det(*B*)

dan menerapkan (3) s$e$kali lagi menghasilkan det(*AB*)=det($E_1E_2....E_r)\det(B)$ yang dari (5), bisa ditulis sebagai det(*AB*)=det(*A*)det(*B*).

Contoh 4 Tinjau matriks-matriks *A*=$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *B*=$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ *AB*=$\begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

Kami serahkan kepada pembaca untuk memeriksa bahwa

det(*A*)=1 det(*B*)=-23 dan det(*AB*)=-23

Jadi det(*AB*)=det(*A*)det(*B*) sebagaimana yang dijamin oleh Teorema 2.3.4.

Teorema berikut ini memberikan hubungan yang berguna antara determinan suatu matriks yang dapat dibalik dengan determinan inversnya.

Teorema 2.3.5.

Jika A bisa dibalik, maka det(A^{-1}) = 1/det(A).

Bukti. Karena $A^{-1}A$=*I* , maka det($A^{-1}A$)=det(*I*). Oleh karena itu, kita harus mendapatkan det(A^{-1})$\det(A)$=1. Karena (*A*)≠ 0, bukti tersebut bisa diselsaikan dengan membaginya dengan det(*A*).

d) Sistem linear berbentuk Ax=λx

Banyak aplikasi aljabar linear yang membahas masalah sistem *n* persamaan linear dalam *n* peubah yang dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{Ax=\lambda x} \qquad \textbf{(6)}$$

dengan λ suatu skalar. Sistem seperti ini benar-benar merupakan sistem linear homogen tersamar, karena (6) bisa ditulis ulang sebagai **λx-Ax=0** atau dengan menyelipkan suatu matriks identitas dan memfaktorkanya, sebagai

$$\mathbf{(\lambda I-A)x=0} \qquad \textbf{(7)}$$

Contohnya berikut ini :

Contoh 5 Sistem linear $x_1+3x_2=\lambda x_1$

$$4x_1+2x_2=\lambda x_2$$

Bisa ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Yang sama dengan bentuk (6) dengan

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix} \text{ dan } x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Sistem ini bisa ditulis ulang sebagai

$$\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

atau $\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

atau $\begin{bmatrix}\lambda-1 & -3\\ -4 & \lambda-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

yang sama dengan bentuk (7) dengan $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -3\\ -4 & \lambda-2\end{bmatrix}$

Masalah utama yang menarik dalam sisitem linear yang bentuknya seperti bentuk (7) adalah menentukan nilai-nilai λ di mana sistem tersebut mempunyai suatu penyelesaian tak-trivial;

Nilai λ yang seperti itu disebut suatu ***nilai-karakteristik*** atau suatu ***nilai-eigen**** dari *A.* Jika λ adalah suatu nilai-eigen dari *A*, maka penyelesaian tak-trivial dari (7) disebut ***vektor-eigen*** dari *A* yang berpadanan dengan λ.

Dari Teoema 2.3.3 kita dapatkan bahwa sistem $(\lambda I - A) = 0$ mempunyai suatu penyelesaian tak-trivial jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{8}$$

Persamaan di atas disebut ***persamaan karakeristik*** dari *A*; nilai-nilai-eigen dari *A* bisa dicari dengan menyelesaikan persamaan ini untuk λ.

Nilai-nilai-eigen dan vektor-vektor-eigen akan ditelaah lagi pada bab-bab berikutnya, dimana kita akan mendiskusikan interpretasi geometrisnya dan mengembangkan sifat-sifatnya secara mendalam.

Contoh 6 cari nilai-nilai-eigen dan vektor-vektor-eigen yang berpadanan dari matriks *A* pada contoh 5.

Penyelesaian. Persamaan karakteristik dari *A* adalah

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0 \text{ atau } \lambda^2\text{-}3\lambda - 10 = 0$$

Bentuk faktor dari persamaan ini adalah $(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0$, sehingga nilai-eigen dari *A* adalah $\lambda = -2$ dan $\lambda = 5$. Per definisi x= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ adalah suatu vektor-eigen dari *A* jika dan hanya jika x adalah suatu penyelesaian tak-trivial dari $(\lambda I - A)x = 0$; yaitu,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda - 1} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{\lambda - 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Jika $\lambda = -2$, maka (9) menjadi $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jika kita menyelesaikan sistem ini akan menghasilkan (periksa) $x_1 = -t, \quad x_2 = t$

sehingga vektor-eigen yang berpadanan dengan $\lambda = -2$ adalah penyelesaian-penyelesaian tak-nol berbentuk

$$\text{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$

Sekali lagi dari (9), vektor-eigen dari *A* yang berpadanan dengan $\lambda = 5$ adalah penyelesaian tak-trivial dari

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kami serahkan kepada pembaca untuk menyelesaikan sistem ini dan menunjukan bahwa vektor-vektor-eigen dari *A* yang berpadanan dengan $\lambda = 5$ adalah penyelesaian-penyelesaian tak-nol berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3.6

Jika A adalah suatu matriks n × n, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen.

(a) A dapat dibalik
(b) Ax=0 hanya mempunyai penyelesaian trivial.
(c) Bentuk baris-eselon tereduksi dari A adalah I.
(d) A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks dasar.
(e) Ax= b konsisten untuk setiap matriks b,n×1.
(f) Ax= b mempunyai tepat satu penyelesaian untuk setiap matriks b, n× 1.
(g) det(A)≠0

4. Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa determinan suatu matriks bisa dihitung dengan mereduksi matriks tersebut menjadi bentuk baris-eselon. Metode ini penting karena bisa menghindari perhitungan panjang yang terjadi dalam penerapan definisi determinan secara langsung.

Sebuah Teorema Dasar

- **Teorema Dasar tentang Determinan**

  Teorema 2.2.1. *Anggap A adalah suatu matriks bujur sangkar*

  a. *Jika A mempunyai sebuah baris nol atau sebuah kolom nol, maka det(A) = 0.*
  b. *det(A)= det (A^T).*

- **Determinan Matriks-Matriks Segitiga**

  Teorema 2.2.2. *Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka det(A) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya;*
  yaitu, det(A) = $a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}$.

Contoh 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

- **Dampak Operasi Baris Dasar pada Suatu Determinan**

Teorema 2.2.3. *Anggap A adalah suatu matriks* $n \times n$.

a) *Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari A dikalikan dengan suatu skalar k, maka det(B)= k det(A).*

b) *Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka det(B) = -det(A).*

c) *Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu penggandaan suatu baris A ditambahkan pada baris lainnya atau jika suatu penggandaan suatu kolom ditambahkan pada kolom lainnya, maka det(B) = det(A).*

Contoh 2

Hubungan	Operasi
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det (B) = k det(A)	Baris pertama A dikalikan dengan k
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det (B) = - det(A)	Baris pertama dan kedua dari *A* dipertukarkan/Matriks A baris pertama dan kedua jika dipertukarkan maka akan menghasilkan – det (A)
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det (B) = det(A)	Suatu penggandaan baris kedua dari A ditambahkan pada baris pertama.

- **Determinan Matriks-matriks Dasar**

Teorema 2.2.4. *Anggap E adalah suatu matriks dasar $n \times n$.*

a) *jika E dihasilkan dari mengalikan suatu baris dari I_n dengan k, maka det(E) = k*

b) *jika E dihasilkan dari pertukarkan dua baris dari I_n maka det(E) = - 1*

c) *jika E dihasilkan dari menambahkan suatu penggandaan satu baris dari I_n ke baris lainnya, maka det(E) =1*

Contoh 3 determinan matriks-matriks dasar berikut ini, yang dihitung dengan mencongak, mengilustrasikan teorema 2.2.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Baris kedua dari I_4 dikalikan dengan 1/3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Baris pertama dan terakhir dari I_4 dipertukarkan.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

7 kali baris terakhir dari I_4 ditambahkan pada baris pertama.

- **Determinan dengan Baris atau Kolom Proporsional**

Teorema 2.2.5. *Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar dengan dua baris proposional atau dua kolom proposional maka det(A) = 0.*

Contoh 4 perhitungan berikut mengilustrasikan munculnya suatu baris nol ketika ada dua baris yang proposional:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Baris kedua adalah 2 kali baris pertama. Jadi kita tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua untuk mendapat suatu baris nol.

Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris.

Sekarang kami akan memberikan suatu metode untuk menghitung determinan yang melibatkan penghitungan yang jauh lebih sedikit dibandingkan jika kita menerapkan definisi determinan secara langsung.

Gagasan dari metode ini adalah mereduksi matriks yang diberikan menjadi bentuk segitiga atas dengan operasi baris dasar, kemudian menghitung determinan matriks segitiga atas tersebut (suatu penghitungan yang mudah), selanjutnya menghubungkan determinan itu dengan determinan matriks aslinya.

Contoh 5 hitung det(A) dimana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian. Kita akan mereduksi *A* menjadi bentuk baris-eselon (yang adalah segitiga atas) dan menerapkan teorema 2.2.3:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris pertama dan kedua dari *A* dipertukarkan

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Suatu faktor umum 3 dari baris pertama diambil melalui tanda determinan.

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

-2 pada baris pertama ditambahkan pada baris ketiga.

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

-10 kali baris kedua ditambahkan ke baris ketiga.

$$= (-3)(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Suatu faktor Bersama -55 dari baris terakhir diambil melalui tanda determinan.

$$= (-3)(-55)(1) = 165.$$

Contoh 6 Hitung determinan dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian. Determinan ini bisa dihitung sebagaimana diatas dengan menggunakan operasi baris dasar untuk mereduksi *A* menjadi bentuk baris-eselon, tetapi kita akan membuat *A* berbentuk segitiga bawah dalam satu langkah dengan menambahkan -3 kali kolom pertama ke kolom ke empat untuk memperoleh

$$\det(A) = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Fungsi Determinan saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut!

<u>SOAL LATIHAN</u>

1. Pada latihan a – e hitung determinan yang diberikan.

   a. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

   e. $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$

2. Cari semua nilai λ di mana det (A) = 0

   a. $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

3. Periksa bahwa det(kA)=k^ndet(A) untuk

   (a). $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; k = 2 (b). $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; k = - 2

4. Periksa bahwa det(AB)=det(A)det(B) untuk

   $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Tanpa menghitung secara langsung,tunjukkan bahwa x=0 dan x=2 memenuhi

   $A=\begin{bmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = 0$

6. Anggap $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ dengan mengasumsikan bahwa det(A)=-7, cari

   (a). det(3A) (b). det(A^{-1}) (c). det($2A^{-1}$) (d). det$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

7. Untuk nilai k berapakah A tidak bisa dibalik?

(a). $A=\begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ (b). $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. Nyatakan sistem linear berikut ini dalam bentuk $(\lambda\mathrm{I} - A)x = 0$

(a). $\begin{matrix} x_1 & + & 2x_2 = & \lambda x_1 \\ 2x_1 & + & x_2 = & \lambda x_2 \end{matrix}$ (b). $\begin{matrix} 2x_1 + & 3x_2 & =\lambda x_1 \\ 4x_1 + & 3x_2 & =\lambda x_2 \end{matrix}$

9. Hitunglah determinan dari matriks yang diberikan dengan mereduksi matriks menjadi bentuk baris-eselon/operasi baris dan kolom.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

10. Diketahui bahwa $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, cari

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (b). $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$