Nama :____ **Tanggal:** ________________

Tingkat: ____________

Pokok Bahasan/ Pembelajaran :
Sasaran Pembelajaran:
Di akhir modul, mahasiswa dapat:

1. Memahami dan Menjelaskan Tentang Kebebasan Linear
2. Mampu Menyelesaikan soal tentang Kebebasan Linear

Materi:
KOMBINASI LINEAR

Referensi:

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1*. Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear*. UPI: Bandung [Online]

A. TINJAUAN PENDAHULUAN

Pendahuluan

Konsep kombinasi linear telah mulai disinggung pada pembahasan-Pembahasan sebelumnya Syarat perlu dan cukup untuk suatu himpunan bagian *W* dari ruang vektor *V* merupakan ruang bagian dari *V* seperti yang dinyatakan dengan Teorema 3 dan 4 Pada materi sebelumnya sesungguhnya menyangkut ketertutupan terhadap kombinasi linear dua vektor dalam *W*. Pengertian kebebasan linear berkaitan dengan kombinasi linear. Semuanya ini diperlukan dalam membahas basis dan dimensi ruang vektor.

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari materi Ruang Vektor Real dan Sub Ruang, meliputi:

- Kombinasi Linear
- Himpunan Yang Membangun Ruang
- Kebebasan Linear

B. MATERI PEMBELAJARAN

Konten/Isi

1. Kombinasi Linear

Definisi 1. Suatu vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ disebut suatu kombinasi linear *(linear combination)* dari vektor-vektor $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_r} \in \mathbb{R}^n$ jika $\vec{w}$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\vec{\omega} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_r\overrightarrow{v_r}$$

dengan $k_1, k_2, \dots, k_r$ skalar di $\mathbb{R}$

Contoh Soal dan Pembahasan

- **Contoh 1** Setiap vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor

$$\vec{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$$

- **Contoh 2** Dipunyai vektor-vektor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$. Tunjukkan bahwa $\vec{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ adalah suatu kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ bukan merupakan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$

Penyelesaian

Untuk menunjukkan $\vec{a}$ merupakan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ maka akan ditunjukkan terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikian rupa sehingga $\vec{a} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$ dan dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 6k_2 \\ 2k_1 + 4k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \end{bmatrix}$$

Menurut definisi kesamaan vektor, dapat dituliskan persamaan masing-masing komponen yang bersesuaian adalah sebagai berikut.

$$k_1 + 6k_2 = 9$$
$$2k_1 + 4k_2 = 2$$
$$-k_1 + 2k_2 = 7$$

Dengan menyelesaikan sistem ini akan diperoleh $k_1 = -3$ dan $k_2 = 2$ sehingga

$$\vec{a} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$$

Selanjutnya untuk menunjukkan $\vec{b}$ merupakan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ maka akan ditunjukkan terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikians sehingga $\vec{b} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$ dan dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 6k_2 \\ 2k_1 + 4k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \end{bmatrix}$$

Menurtut definisi kesamaan vektor, dapat dituliskan persamaan masing-masing komponen yang bersesuaian sebagai berikut.

$$k_1 + 6k_2 = 4$$
$$2k_1 + 4k_2 = -1$$
$$-k_1 + 2k_2 = 8$$

Sistem persamaan ini tidak konsisten (buktikan), artinya tidak terdapat $\boldsymbol{k_1}$ dan $\boldsymbol{k_2}$ yang memenuhi sistem tersebut. Artinya $\vec{\boldsymbol{b}}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $\vec{\boldsymbol{u}}$ dan $\vec{\boldsymbol{v}}$.

2. Himpunan Yang membangun Ruang vektor

Teorema 1. Misalkan V adalah ruang vektor dan $W = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subseteq V$. Himpunan semua kombinasi linear dari W, yang dinotasikan dengan span(W) atau $\langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$, adalah subruang dari V.

Bukti. Diambil sebarang $w_1, w_2 \in span(W)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Karena $w_1, w_2 \in span(W)$, maka masing-masing vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di W. sehingga dapat dituliskan

$$w_1 = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r$$

$$w_2 = m_1v_1 + m_2v_2 + \cdots + m_rv_r$$

dengan $k_i + m_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, r$. Jelas bahwa

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r) + (m_1v_1 + m_2v_2 + \cdots + m_rv_r) \\ &= (k_1 + m_1)v_1 + (k_2 + m_2)v_2 + \cdots + (k_r + m_r)v_r. \end{aligned}$$

Karena $k_i + m_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, r, maka\ w_1 + w_2 \in span(W)$. Selanjutnya, dapat diperoleh bahwa

$$\alpha w_1 = \alpha(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r)$$

$$= (\alpha k_1)v_1 + (\alpha k_2)v_2 + \cdots + (\alpha k_r)v_r.$$

Karena $\alpha k_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,r$, maka $\alpha w_1 \in span(W)$.

Jadi, manurut Teorema pada materi sebelumnya $span(W)$ adalah subruang dari V.

Definisi 2. Misalkan dipunyai ruang vektor V dan himpunan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ di V. Himpunan S dikatakan membangun atau merentang ruang vektor V apabila $V = span(S)$.

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 3 Tunjukkan bahwa himpunan $B = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ membangun $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian.

Jelas bahwa $span(B) \subseteq \mathbb{R}^3$. Kemudian untuk setiap vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di B (lihat contoh 6.1), sehingga $\mathbb{R}^3 \subseteq span(B)$. Artinya $\mathbb{R}^3 = span(B)$. Jadi B membangun V.

Contoh 4 perhatikan ruang solusi $A = \left\{\begin{bmatrix}2s-3t\\s\\t\end{bmatrix} \in R^3 | s,t \in \mathbb{R}\right\}$ padaa contoh 5.17. setiap vektor di A dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix}2s-3t\\s\\t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$$

dengan $s,t \in \mathbb{R}$. Artinya untuk setiap vektor di A, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $B = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Jadi, B membangun A.

contoh 5 Apakah $E = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ membangun $\mathbb{R}^3$?

Diambil sebarang, $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Akan ditentukan nilai k_1, k_2, k_3 sehingga

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan ini konsisten dengan solusi

$$k_1 = \frac{a+b-c}{2}, \quad k_2 = \frac{a+c-b}{2}, \quad k_3 = \frac{b+c-a}{2}$$

Jadi, E membangun $\mathbb{R}^3$

3. Kebebasan Linear

Definisi 3. Misalkan dipunyai $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor disuatu ruang vektor V. Jika persamaan vektor

$$k_1 v_1 + k_1 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0$$

mempunyai tepat satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0,$$

maka S disebut himpunan yang bebas linear (linearly independent). Jika terdapat solusi lain, maka S disebut himpunan yang tidak bebas linear (linearly dependent).

Contoh Soal dan Pembahasan

- **Contoh 6** Jika $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, maka himpunan $S = \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ tidak bebas linear, karena persamaan $k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + k_3\overrightarrow{v_3} = \vec{0}$ dipenuhi oleh

  $k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = -1.$

- **Contoh 7** Perhatikan vektor-vektor

  $$\vec{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  di R^3. Persamaan berikut

  $$k_1\vec{\imath} + k_2\vec{\jmath} + k_3\vec{k} = \vec{0}$$

  dapat diuraikan menjadi

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem tersebut mempunyai solusi trivial $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. Jadi himpunan $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ bebas linear.

Penjelasan yang sama dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa vektor-vektor

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ : \\ . \\ 0 \end{bmatrix}. \overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ : \\ . \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \overrightarrow{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ : \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

membentuk himpunan vektor-vektor yang bebas linear di R^n.

- **Contoh 8** Tentukan apakah vektor-vektor

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

membentuk suatu himpunan yang bebas linear atau tidak.

Penyelesaian. Persamaan $k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + k_3\overrightarrow{v_3} = \vec{0}$ dapat diuraikan menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut diperoleh solusi

$$k_1 = -\frac{1}{2}t, k_2 = -\frac{1}{2}t, k_3 = t$$

dengan $t \in R$. Karena Persamaan 1 mempunyai solusi nontrivial, artinya $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ tidak bebas linear.

Istilah tidak bebas linear menunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut bergantung satu sama lain. Jika dipunyai vektor-vektor yang tidak bebas linear, maka salah satu vektornya dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor yang lain. Berikut teorema yang menunjukkan hal tersebut.

Teorema 2. Misalkan dipunyai himpunan S yang memuat dua atau lebih vektor-vektor.

a. S tidak bebas linear jika dan hanya jika setidak-tidaknya terdapat satu vektor pada S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain pada S.

b. S bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor pada A yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain pada S.

Bukti,

a. Misalkan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan dua atau lebih pada suatu ruang vektor.

($\Longrightarrow$) Dipunyai S tidak bebas linear. Artinya terdapat skalar $k_1,\ k_2, \dots,\ k_r$ yang tidak semuanya nol, sehingga

$$k_1 v_1 + k_1 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0. \qquad (2)$$

Misalkan $k_1 \neq 0$. Persamaan 6.2 dapat dituliskan menjadi

$$k_1 v_1 = (-k_2) v_2 + (-k_3) v_3 + \cdots + (-k_r) v_r$$

$$v_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right) v_2 + \left(-\frac{k_3}{v_1}\right) v_3 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{v_1}\right) v_r$$

yang menunjukkan bahwa $v_1$merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain di S. Dengan analogi yang sama , jika $k_j \neq 0$ untuk nilai $j = 2,3, \dots, n$, maka v_j dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor-vektor yang lain S.

($\Longleftarrow$) Diasumsikan terdapat setidaknya satu vektor di S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor-vektor yang lain di S. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$v_1 = c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_r v_r$$

sehingga diperoleh

$$v_1 - c_2 v_2 - c_3 v_3 - \cdots - c_r v_r = 0.$$

Artinya S tidak bebas linear karena Persamaan 2 dipenuhi oleh

$$k_1 = 1, k_2 = -c_2, \dots, k_r = c_r$$

yang tidak semuanya nol.

Jadi terbukti bahwa S tidak bebas linear jika dan hanya jika setidak-tidaknya terdapat satu vektor pada S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain pada S.

b. Berdasar Butir a diperoleh bahwa S bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor pada A yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain pada S.

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 9 Pada contoh 6.6, telah ditunjukkan bahwa $S = \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ tidak bebas linear. Sehingga menurut Teorema 6.3.1, paling tidak salah satu dari vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor-vektor lain. Menurut persamaan $3\,\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} = \vec{0}$ diperoleh

$$\overrightarrow{v_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{v_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v_3}, \qquad \overrightarrow{v_2} = -3\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}, \quad dan\ \overrightarrow{v_3} = 3\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}.$$

Teorema berikut menjelaskan tentang akibat-akibat kebebasan linear yang penting untuk dipahami.

Teorema 3.

a. Suatu himpunan terhingga vektor – vektor yang mengandung vektor nol adalah tidak bebas linear

b. Suatu himpunan yang memuat tepat dua vektor adalah himpunan yang bebas linear jika dan hanya jika tak satupun dari vektor – vektornya merupakan kelipatan skalar dari vektor lainnya.

Bukti.

a. Misalkan dipunyai himpunan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, 0\}$ dengan $v_1, v_2, \ldots, v_r$ adalah vektor sembarang. Diperhatikan bahwa kita dapat menyatakan vektor 0 sebagai

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_r + 1(0) = 0.$$

yang merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di S dengan koefisien – koefisien yang tidak semuanya nol. Artinya S tidak bebas linear.

b. ($\Rightarrow$) Dipunyai himpunan vektor – vektor tak nol $A = \{u, v\}$ bebas linear. artinya persamaan

$$k_1 u + k_2 v = 0 \qquad (3)$$

Hanya dipenuhi oleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$. Andaikan u merupakan kelipatan skalar dari v, yakni u = rv untuk suatu skalar r tak nol. Sehingga diperoleh u – rv = 0. Artinya persamaan 3 dipenuhi oleh $k_1 = 1$ dan $k_2 = -r$ yang tidak semuanya nol. Hal ini kontradiksi dengan fakta bahwa A bebas linear sehingga pengandaian dibatalkan. Jadi, u bukan merupakan kelipatan skalar dari v. Hal yang sama juga berlaku apabila v merupakan kelipatan skalar dari u.

(⇐) dipunyai vektor – vektor tak nol $A = \{u, v\}$ sedemikian sehingga tidak satupun dari mereka yang merupakan kelipatan skalar dari vektor yang lain. Andaikan A tidak bebas linear. Artinya terdapat skalar k_1 dan k_2 yang tak semuanya nol sehingga persamaan 3 terpenuhi. Misalkan $k_1 \neq 0$, persamaan 3 dapat diuraikan menjadi $u = \left(-\frac{k_1}{k_2}\right)$ v yang berarti u merupakan kelipatan skalar dari v. kontradiksi dengan yang diketahui sehingga pengandaian ditolak. Jadi A bebas Linear. hal yang sama juga berlaku apabila $k_2 \neq 0$.

Teorema berikutnya menunjukkan bahwa himpunan vektor – vektor di R^n berkardinalitas lebih dari n adalah himpunan yang tidak bebas linear.

Teorema 4. Misalkan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan vektor – vektor di R^n. Jika r > n, maka S tidak bebas linear.

Bukti.

Misalkan

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix}, \vec{v_2} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \vec{v_r} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{rn} \end{bmatrix}$$

Maka persamaan $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0$ dapat diuraikan menjadi

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{r1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan tersebut merupakan sistem persamaan homogen yang terdiri dari n

persamaan dengan sebanyak r faktor yang tidak diketahui, yakni $k_1, k_2, \dots, k_r$. Karena r > n, sistem tersebut mempunyai solusi nontrivial. Jadi S tidak bebas linear.

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 10 Menurut teorema 4, himpunan – himpunan berikut tidak bebas linear.

1. $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\-1\end{bmatrix}\right\} \subseteq R^2$

2. $\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\6\end{bmatrix}\right\} \subseteq R^3$

3. $\left\{\begin{bmatrix}4\\-3\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}13\\0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-12\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-2\\11\\8\end{bmatrix}\right\} \subseteq R^4$

C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Kebebasan Linear, saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut:

SOAL LATIHAN

1. Diberikan $S = \left\{\overrightarrow{s_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{s_2} = \begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{s_3} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ apakah vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix}-2\\1\\-5\end{bmatrix}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di S?

2. Diberikan $T = \left\{\overrightarrow{t_1} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}, \overrightarrow{t_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{t_3} = \begin{bmatrix}-3\\0\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{t_4} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$. Apakah vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix}2\\6\\1\end{bmatrix}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di T?

3. Tentukan apakah vektor $\vec{v}$ berikut berada di $span\{\vec{u}, \vec{w}\}$,

   a. $\vec{v} = \begin{bmatrix}1/2\\2/3\end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

   b. $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$

   c. $\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

d. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Tentukan apakah himpunan berikut bebas linear atau tidak

a. $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ -20 \end{bmatrix} \right\} \subseteq R^3$

b. $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \subseteq R^3$

c. $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq R^3$

d. $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

5. Misalkan $u\ dan\ v$ adalah vektor-vektor di suatu vektor V, buktikan bahwa jika $\{u, v\}$ bebas linear, maka $\{u, u + v\}$ juga bebas linear.