Nama :____ **Tanggal:** ________________

Tingkat: ____________

Pokok Bahasan/ Pembelajaran :
Sasaran Pembelajaran:
Di akhir modul, mahasiswa dapat:

1. Memahami dan Menjelaskan Tentang Basis dan Dimensi
2. Mampu Menyelesaikan soal tentang Basis dan Dimensi

Materi:
BASIS DAN DIMENSI

Referensi:

1. Anton, Howard. (2000). Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. Interaksara: Batam
2. Rainarli, E dan Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Aljabar Linear dan Matriks Edisi 1*. Unikom: Bandung [Online]
3. Gozali, S. M. (2010). *Aljabar Linear*. UPI: Bandung [Online]

A. TINJAUAN PENDAHULUAN

<u>Pendahuluan</u>

Basis dan dimensi merupakan suatu konsep yang penting di $\mathbb{R}^n$. Konsep ini akan berpe an dalam menentukan banyaknya elemen pembangun suatu ruang vektor sehingga setiap vektor dalam ruang vektor tersebut hanya dapat dinyatakan secara tunggal sebaga kombinasi linear elemen-elemen pembangunnya.

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari materi Ruang Vektor Real dan Sub Ruang, meliputi:

- ❖ Basis
- ❖ Dimensi

B. MATERI PEMBELAJARAN

Konten/Isi

1. Basis

Definisi 1. Misalkan V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, , \overrightarrow{v_r} \subseteq V . S$ disebut basis dari V apabila S bebas linear dan S membangun V

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 1 Telah dijelaskan pada Contoh 6.3 dan 6.7 bahwa himpunan

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Membangun $\mathbb{R}^3$ dan bebas linear. Artinya B adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$.

Contoh 2 – Basis Standar untuk $\boldsymbol{R^n}$. Berdasarkan Contoh 6.3 dan 6.7, telah ditunjukkan bahwa vektor-vektor

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \overrightarrow{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

membentuk himpunan yang bebas linear dan membangun $\boldsymbol{R^n}$**.** Jadi, $S = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_n}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ merupakan basis untuk $\boldsymbol{R^n}$ dan disebut sebagai basis standar untuk $\boldsymbol{R^n}$. ■

Teorema berikut akan menjelaskan keistimewaan basis pada suatu ruang vektor.

Teorema 1. Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V, maka setiap vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S dengan tepat satu cara.

***Bukti*.**

Karena S basis untuk V, maka S bebas linear dan merentang V. Artinya setia vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S. Diambil sebarang $v \in V$. Misalkan v dapat dinyatakan sebagai

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \text{ dan } v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Dari dua persamaan tersebut diperoleh

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$$

$$\leftrightarrow (c_1 - k_1)v_1 + (c_2 - k_2)v_2 + \cdots + (c_n - k_n)v_n = 0$$

Karena S bebas linear, maka persamaan terakhir hanya dipenuhi oleh

$$c_1 - k_1 = 0, \qquad c_2 - k_2 = 0, \qquad \ldots, \quad c_n - k_n = 0$$

yang ekuivalen dengan

$$c_1 = k_1, \qquad c_2 = k_2, \qquad \ldots, \quad c_n = k_n$$

Artinya, kombinasi linear untuk v di atas adalah sama. Jadi, setiap vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S dengan tepat satu cara. ■

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 3 Misalkan

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Adalah vektor-vektor di $\boldsymbol{R}^3$. Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis untuk $\boldsymbol{R}^3$.

Penyelesaian

Untuk menunjukkan S adalah basis untuk $\boldsymbol{R}^3$, akan ditunjukkan S membangun $\boldsymbol{R}^3$ dan S bebas linear.

Untuk menunjukkan S membangun $\boldsymbol{R}^3$, diambul sebarang $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$. Akan ditunjukkan $\vec{u}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S, yakni

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = \vec{u}$$

yang ekuivalen dengan

$$\begin{bmatrix} -k_1+2k_2 \\ 2k_1+2k_2+2k_3 \\ k_2+2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Persamaan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Untuk menunjukkan *S* membangun $\boldsymbol{R^3}$, harus ditunjukkan Persamaan 1 mempunyai solusi untuk setiap pilihan vektor $\vec{u}$.

Selanjutnya, untuk menunjukkan *S* bebas linear, akan ditunjukkan bahwa persamaan

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

hanya dipenuhi oleh $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Persamaan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} -k_1+2k_2 \\ 2k_1+2k_2+2k_3 \\ k_2+2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang ekuivalen dengan

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Untuk menunjukkan *S* bebas linear, harus ditunjukkan Persamaan Homogen 2 mempunyai solusi trivial.

Dapat diperhatikan bahwa Persamaan 1 dan 2 mempunyai matriks koefisien yang sama. Persamaan-persamaan tersebut mempunyai solusi yang tunggal apabila determinan matriks koefisiennya tak nol. Dapat ditunjukkan bahwa

$$det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$$

sehingga Persamaan 1 dan 2 konsisten yang berarti *S* membangun $\boldsymbol{R^3}$ dan bebas

linear. Jadi, *S* adalah basis untuk $\boldsymbol{R^3}$.

2. Dimensi

Teorema 2. misalkan V adalah ruang vektor berdimensi berhingga dan himpunan $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis sembarang di V. misalkan himpunan $S \subseteq V$.

a. Jika S memuat lebih dari n vektor, maka S tidak bebas linear.

b. Jika S memuat kurang dari n vektor, maka S tidak membangun V.

Pembuktian Teorema 2 ditinggalkan untuk pembaca. Jika $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis sembarang untuk suatu ruang vektor V, maka semua himpunan pada V yang bebas linear dan membangun V akan mempunyai kardinalitas yang sama, atau memuat tepat banuyak n vektor. Jadi, semua basis pada ruang vektor V harus mempunyai vektor yang sama. Sebagai akibat dari Teorema 2, Teorema berikut merupakan teorema yang memegang peranan paling pentung dalam aljabar linear.

Teorema 3. Semua basis ruang vektor berdimensi berhingga memiliki banyak vektor yang sama.

Selanjutnya, muncullah definisi tentang dimensi yang merujuk pada banyaknya vektor pada basis suatu ruang vektor.

Definisi 2. Misalkan dipunyai ruang vektor V. Dimensi ruang vektor V, dinotasikan dengan $dim(V)$, didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada basis untuk V. Ruang vektor nol didefinisikan berdimensi nol.

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 4. Menurut Contoh 6.11, himpunan $\{e_1, e_2, e_3\}$ merupakan basis untuk R^3. Jadi, $dim(R^3) = 3$. Dapat dengan mudah diipahami bahwa $dim(R^3) = n$.

Contoh 5. – Basis dari Ruang solusi. Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi sistem homogen berikut.

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +x_5 & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & & -x_5 & = 0 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = 0 \end{array}$$

Penyelesaian.

Dapat ditunjukkan bahwa solusi umum dari sistem tersebut adalah

$$x_1 = -s - t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = -t, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = t$$

Dengan $s, t \in \mathbb{R}$. Solusi-solusi dari sistem tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dapat diperlihatkan bahwa vektor-vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Membangun ruang solusi. Menurut Teorema 6.3.2, himpunan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bebas linear (buktikan). Jadi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ adalah basis untuk ruang solusi dan ruang solusi sistem hmogen tersebut berdimensi dua.

3. Teorema-Teorema Dasar Basis dan Dimensi

Teorema 4. Misalkan *S* adalah himpunan tak kosong vektor-vektor di ruang vektor *V*.

a. Jika *S* adalah himpunan bebas linear dan *v* adalah suatu vektor pada *V* yang tidak berada di *span(S)*, maka himpunan $S \cup \{v\}$ juga bebas linear.

b. Jika *v* adalah vektor di *S* yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lain di *S*, maka ruang yang dibagun oleh *S* dan $S - \{v\}$ adalah sama, yakni $span(S) = span(S \cup \{v\})$.

Bukti.

a. Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor yang bebas linear di *V* dan *v* adalah vektor yang tidak berada di *span(S)*. Akan ditunjukkan himpunan $S' = S \cup \{v\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, v\}$ adalah himpunan yang bebas linear.

Perhatikan bahwa S' bebas linear jika persamaan

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r + k_{r+1} v = 0 \qquad (3)$$

Hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = k_{r+1} = 0$. Andaikan $k_{r+1} \neq 0$. Artinya Persamaan 3 dapat diubah menjadi

$$v = \frac{k_1}{k_{r+1}} v_1 - \frac{k_2}{k_{r+1}} v_2 - \cdots - \frac{k_r}{k_{r+1}} v_r$$

Yang artinya *v* merupakan kombinasi linear dari *S*. Hal ini bertentangan denganargumen bahwa $v \notin span(S)$ sehingga pengandaian harus ditolak. Jadi $k_{r+1} = 0$.

Karena $k_{r+1} = 0$, maka Persamaan 6.6 dapat disederhanakan menjadi

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0 \quad (4)$$

Dan dengan kebebaslinear *S*, diperoleh bahwa $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$. Sehingga Persamaan 3 hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = k_{r+1} = 0$. Jadi S' bebas linear.

b. Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, v\}$ adalah himpunan vektor-vektor di *V* dan *v* adalah suatu kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Vektor *v* dapat dinyatakan sebagai

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r \quad (5)$$

Akan ditunjukkan bahwa jika *v* dikeluarkan dari *S*, maka himpunan sisanya, yaitu $S' = S - \{v\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, masih merentang *span(S)*. Akan ditunjukkan bahwa setiap vektor $w \in span(S)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S'. Diambil sebarang $w \in span(S)$, artinya *w* dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari *S*. Dapat dituliskan

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r + k_{r+1} v \quad (6)$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan 6.8 pada Persamaan 6 diperoleh

$$\begin{aligned} w &= k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r + k_{r+1}(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r) \\ &= (k_1 + k_{r+1} c_1) v_1 + (k_2 + k_{r+1} c_2) v_2 + \cdots + (k_r + k_{r+1} c_r) v_r \end{aligned}$$

Yang menyatakan *w* sebagai kombinasi linear dari S'. Jadi, $span(S) = span(S')$.

Teorema 4 memberikan konsep yang baik yang memudahkan penentuan basis suatu ruang vektor apabila dimensi dari ruang vektor tersebut diketahui.

Teorema 5. Misalkan dipunyai V adalah ruang vektor berdimensi n dan himpunan $S \subseteq V$ dengan kardinalitas n.

a. Jika S bebas linear, maka S basis untuk V.

b. Jika S membangun V, maka S basis untuk V

Bukti.

a. Misalkan S bebas linear. Untuk menunjukkan S adalah untuk V, akan ditunjukkan S membangun V. Andaikan S tidak membangun V. Artinya terdapat vektor $v \in V$ yang bukan anggota $span(S)$. Menurut Teorema 4, himpunan $S \cup \{v\}$ yang memuat sebanyak $n+1$ bebas linear. Namun menurut Teorema 4, hal ini tidak mungkin dipenuhi, karena tidak asa himpunan sebanyak $n+1$ vektor yang bebas linear pada ruang vektor berdimensi n. Sehingga pengandaian dibatalkan. Jadi S membangun V yang membawa kita pada kesimpulan S adalah basis untuk V.

b. Misalkan S membangun V, Untuk menunjukkan S adalah basis untuk V, akan ditunjukkan S bebas linear. Andaikan S tidak bebas linear. Artinya terdapat vektor $v \in S$ yang merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain. Menurut Teorema 4, himpunan $S - \{v\}$ yang mmuat vektor sebanyak $n-1$ vektor masih membangun V. Namun menurut Teorema 2 himpunan sebanyak $n-1$ vektor tidak mungkin membangun ruang vektor berdimensi n. Pengandaian harus ditolak. Jadi S bebas linear. Sebagai konsekuensinya S adalah basis untuk V.

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 6 Himpunan vektor-vektor

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Adalah himpunan yang bebas linear di $\mathbb{R}^3$. Menurut Teorema 5, karena $\mathbb{R}^3$ berdimensi 3 dan B adalah himpunan bebas linear (buktikan) dengan kardinalitas 3, maka B adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$

Contoh 7 Himpunan vektor-vektor

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

membangun $\mathbb{R}^4$. Menurut Teorema 5, karena $\mathbb{R}^4$ berdimensi 4, G berkardinalitas 4 dan membangun $\mathbb{R}^4$ (buktikan), maka G adalah basis untuk $\mathbb{R}^4$.

Teorema berikut merujukkan bahwa untuk suatu ruang vektor yang berdimensi berhingga, setiap himpunan yang merentang V memuat basis untuk V dan setiap himpunan yang bebas linear di V adalah bagian dari basis untuk V. Bukti dari teorema-teorema berikut sengaja ditinggalkan sebagai latihan.

Teorema 6 Misalkan S adalah himpunan berhingga dari vektor-vektor di suatu ruang vektor V yang berdimensi berhingga.

a. Jika S bebas linear dan bukan basis ultuk V, maka S dapat diperbesar menjadi suatu basis untuk V dengan menambahkan vektor-vektor tertentu ke dalam S.
b. Jika S merentang V dan bukan basis untuk V, maka S dapat direduksi menjadi suatu basis untuk V dengan mengeluarkan vektor vektor tertentu di S.

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 8. Misalkan dipunyai himpunan

$$B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Adalah himpunan yang bebas linear. Tambahkan sebuah vektor di $\mathbb{R}^4$ sedemikian sehingga himpunan yang baru merupakan basis di $\mathbb{R}^4$.

Diperhatikan bahwa vektor-vektor di *span(B)* dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b+c\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dari sini dapat diperoleh bahwa vektor

$$\vec{s} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \notin span(B).$$

sehingga menurut Teorema 4, himpunan $B' = B \cup \vec{s}$ juga bebas linear. Karena B' adalah himpunan yang bebas linear di ruang vektor berdimensi 4 dan

$n(B') = 4$, maka menurut Teorema 6.6.2 B' merupakan basis di $\mathbb{R}^4$.

Contoh 9. Tentukan basis untuk suatu sub ruang di $\mathbb{R}^4$ berikut

$$U = span\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Misalkan R_1, R_2, R_3 berturut-turut adalah vektor pembangun U yang dinyatakan dalam matriks kolom. Sehingga

$$R_1 = [1 \quad -1 \quad 3 \quad 2]\,, R_2 = [0 \quad -1 \quad 2 \quad 1]\,, dan\ R_3 = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

Misalkan A adalah matriks yang baris-barisnya tersusun atas R_1, R_2, dan R_3. Sehingga

$$A = \begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 2\\0 & -1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Dengan mengubah eliminasi Gauss untuk mengubah matriks A dalam matriks eselon baris, diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix}R_1 & 1 & -1 & 3 & 2\\R_2 & 0 & -1 & 2 & 1\\R_3 & 2 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{} \begin{bmatrix}R_1 & 1 & -1 & 3 & 2\\R_2 & 0 & -1 & 2 & 1\\R_3 - 2R_1 & 0 & 3 & -6 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 + 3R_3]{}$$

$$\begin{bmatrix}R_1 & 1 & -1 & 3 & 2\\R_2 & 0 & -1 & 2 & 1\\R_3 - 2R_1 + 3R_2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Dari sini diperoleh bahwa $R_3 = 2R_1 - 3R_2$ yang berarti $\mathbb{R}_3$ berada di *span*(R_1, R_2). Sehingga menurut Teorema 6.6.3 diperoleh

$$U = span\,\{R_1, R_2, R_3\} = span\{R_1, R_2\}.$$

Karena $\{R_1, R_2\}$ bebas linear (buktikan), maka himpunan $\{R_1, R_2\}$ merupakan basis di U

Dapat diperhatikan juga bahwa $R_1 = \frac{3}{2}R_2 + \frac{1}{2}R_3$ yang berarti $R_1 \in span\,\{R_2, R_3\}$. Dengan analogi yang sama dapat diperoleh bahwa himpunan $\{R_2, R_3\}$ juga merupakan basis untuk U.

Teorema 7. Jika W adalah suatu subruang dari suatu ruang vektor V yang berdimensi berhingga, maka $dim(W) \leq dim(V)$. Lebih lanjut, jika $dim(W) = dim(V)$. Maka $W = V$.

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 10 Misakan dipunyai ruang vektor $\mathbb{R}^4$. Jika W adalah suatu subruang di $\mathbb{R}^4$, maka menurut teorema 6.6.4 karena $dim(\mathbb{R}^4) = 4$ haruslah $dim(\mathbb{R}^4) \leq$ 4 4. Jika W berdimensi 4, maka $W = \mathbb{R}^4$.

C. MENGECEK PEMAHAMAN

Untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang Basis dan Dimensi, saatnya latihan mandiri. Silakan kerjakan soal berikut:

SOAL LATIHAN

1. Ujilah apakah himpunan-himpunan berikut merupakan basis untuk ruang vektor yang diberikan.

   a. $\left\{\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\-12\end{bmatrix}\right\}$ pada $\boldsymbol{R^2}$

   b. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}\right\}$ pada $\boldsymbol{R^3}$

   c. $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ pada $\boldsymbol{R^4}$

2. Tentukan basis dan dimensi ruang solusi dari sistem berikut.

   a. $$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2x - y + 2z &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{aligned}$$

   b. $$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ 2x - 6y + 2z &= 0 \\ 3x - 9y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

   c. $$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ x + 5z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

3. Diketahui bahwa himpunan berikut membangun $\mathbb{R}^3$

$$H = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

   Tentukanlah satu vektor $\vec{w}$ pada H yang merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain sehingga himpunan $H - \{\vec{w}\}$ masih tetap membangun $\mathbb{R}^3$