DUALITAS DAN SENSITIVITAS LP

MK Riset Operasional #4

Indah Setiawati, S.P., M.P.

KONSEP DUALITAS

- Setiap persoalan linear programing mempunyai suatu linear program yang berkaitan, yang disebut “dual”.
- Solusi dari persoalan asli LP (Primal), juga memberikan solusi pada dualnya

Hubungan *primal-dual*

Primal	$\longleftrightarrow$	*Dual*
Batasan *i*	$\longleftrightarrow$	Variabel *i*
Fungsi Tujuan	$\longleftrightarrow$	Nilai Kanan

Contoh : (masalah primal)

Merek / Mesin	I_1	I_2	Kapasitas Maksimum
1	2	0	8
2	0	3	15
3	6	5	30
Sumbangan laba	3	5	

Tabel *primal-dual*

Merek / Mesin	X_1	X_2	
Y_1	2	0	≤ 8
Y_2	0	3	≤ 15
Y_3	6	5	≤ 30
	≥ 3	≥ 5	

Tabel *primal-dual*

Merek / Mesin	X_1	X_2	
Y_1	2	0	≤ 8
Y_2	0	3	≤ 15
Y_3	6	5	≤ 30
	≥ 3	≥ 5	

Fungsi *primal-dual*

Kunci 1

Batasan *i* ↓ Variabel *i*

Kunci 2

Fungsi Tujuan ↓ Nilai Kanan

Tujuan :

Maks $Z = 3X_1 + 5X_2$

Batasan :

$2X_1 \leq 8$

$3X_2 \leq 15$

$6X_1 + 5X_2 \leq 30$

dan

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

Tujuan :

Min $Y = 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3$

Batasan :

$2Y_1 + 6Y_3 \geq 3$

$3Y_2 + 5Y_3 \geq 5$

dan

$Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0$

Interpretasi Ekonomis

Fungsi primal

$$\text{Tujuan : Maks } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\text{Batasan} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

X_j = Tingkat aktivitas ke *j*
C_j = Laba persatuan aktivitas *j*
Z = Laba total dari seluruh aktivitas
b_i = Jumlah sumber *i* yang tersedia
a_{ij} = jumlah sumber *i* yang "dipakai" oleh setiap satuan aktivitas *j*

Dengan menggantikan Z_j, metode simpleks dapat diartikan mencari nilai Y_m

Fungsi dual

$$\text{Tujuan : Min } Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$$

$$\text{Batasan} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \geq C_j$$

Y_i = kontribusi persatuan sumber *i* terhadap laba

Hasil masalah *dual*

Tujuan :

$$\text{Min } Y = 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3$$

Batasan :

$$2Y_1 + 6Y_3 \geq 3$$

$$3Y_2 + 5Y_3 \geq 5$$

dan

$$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0$$

Analisis Simplex

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 5/6,\ Y_3 = 1/2$$

$$Y = 8(0) + 15(^5/_6) + 30(^1/_2)$$

$$\mathbf{Y = 27^1/_2}$$

Analisa Sensitivitas

- Bagaimana pengaruh perubahan data terhadap solusi optimum
- Memberikan jawaban atas : “sampai seberapa jauh perubahan dibenarkan tanpa mengubah solusi optimum, atau tanpa menghitung solusi optimum dari awal

Ada tiga pertanyaan yang ingin dijawab dalam analisa sensitivitas

1. Kendala mana yang dapat dilonggarkan (dinaikkan) dan seberapa besar kelonggaran (kenaikan) dapat dibenarkan, sehingga menaikkan nilai Z tetapi tanpa melakukan penghitungan dari awal. Sebaliknya, kedala mana yang dapat dikurangi tanpa menurunkan nilai Z, dan tanpa melakukan perhitungan dari awal
2. Kendala mana yang mendapatkan prioritas untuk dilonggarkan (dinaikkan)
3. Seberapa besar koefisien fungsi tujuan dapat dibenarkan untuk berubah, tanpa mengubah solusi optimal

Contoh

CV CIARD memproduksi jenis Astro dan cosmos diperlukan bahan baku A dan B serta jam tenaga kerja. Maksimum penyediaan bahan baku A, 60 kg perhari, bahan B, 30 kg perhari dan tenaga kerja 40 jam perhari. Kedua jenis produk memberikan keuntungan sebesar Rp 40 untuk astro dan Rp 30 untuk cosmos.

Jenis bahan baku dan tenaga kerja	Kg bahan baku dan jam tenaga kerja		Maksimum penyediaan
	Astro	Cosmos	
Bahan baku A	2	3	60 kg
Bahan baku B	-	2	30 kg
Tenaga kerja	2	1	40 jam

Z mak = $40X_1 + 30X_2$

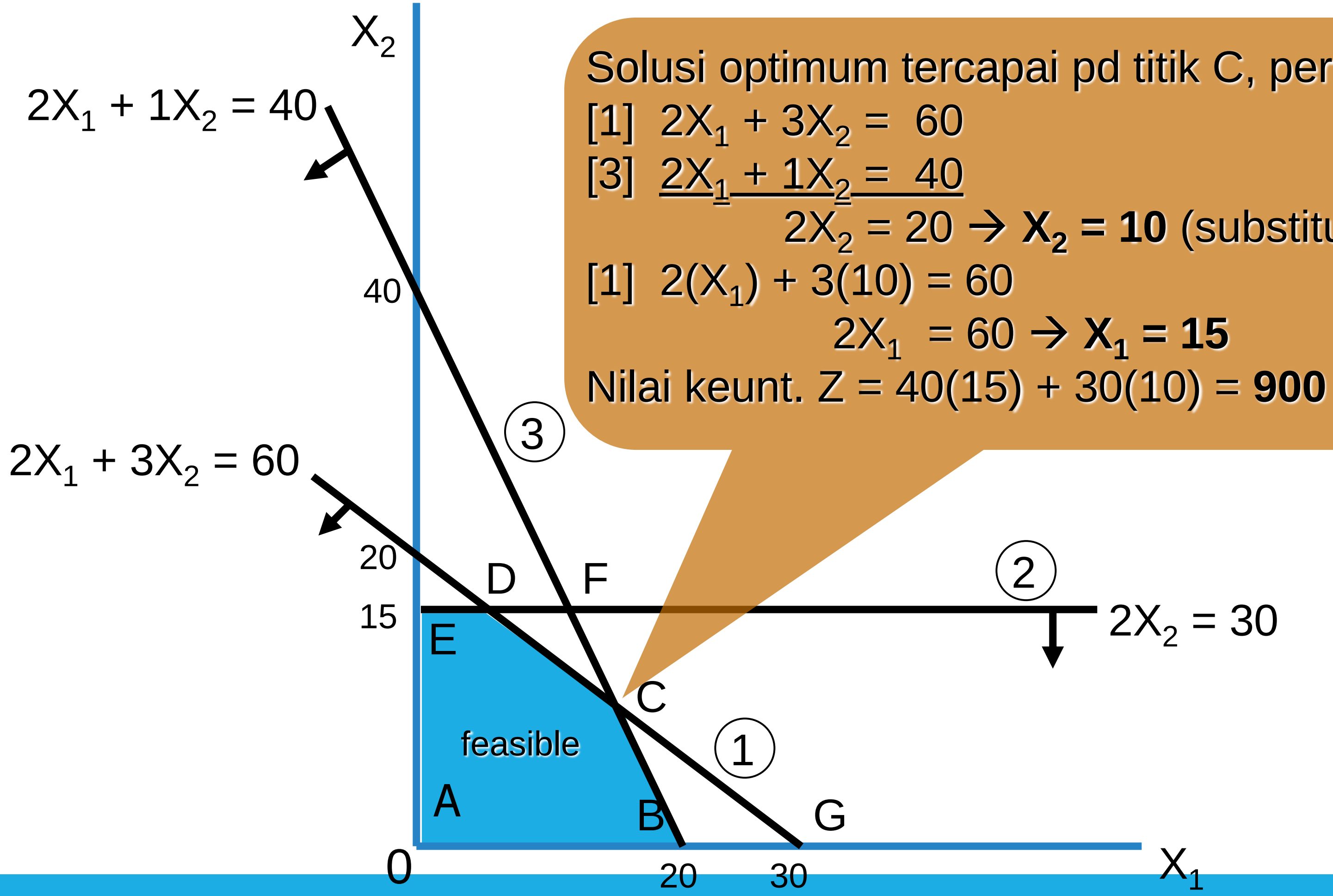
Kendala : 1. $2X_1 + 3X_2 \leq 60$ (bahan baku A)

2. $2X_2 \leq 30$ (bahan baku B)

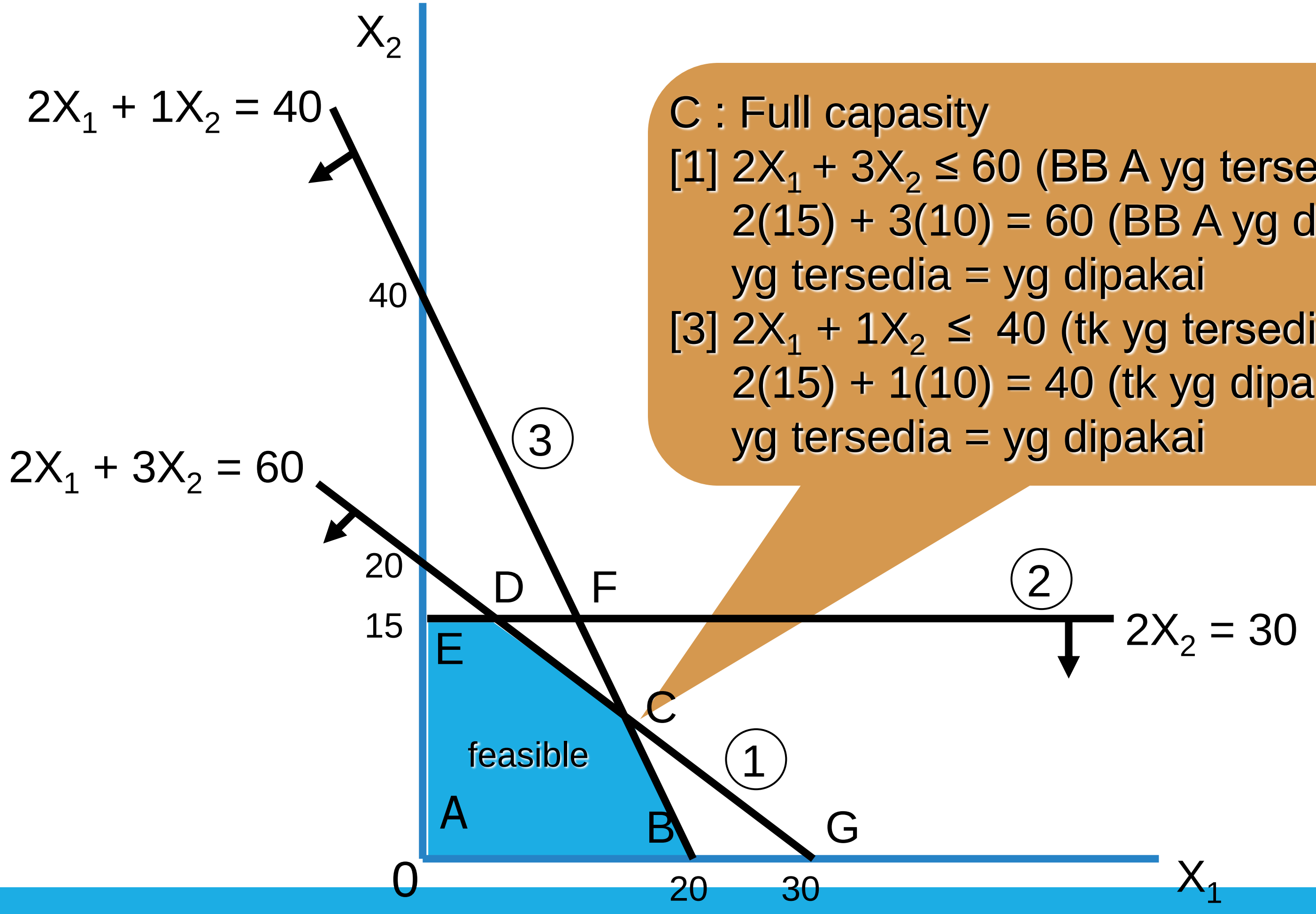
3. $2X_1 + 1X_2 \leq 40$ (jam tenaga kerja)

4. $X_1 \geq 0$ (nonnegativity)

5. $X_2 \geq 0$ (nonnegativity)



Dari perhitungan pencarian solusi optimum (titik C: X_1=15, X_2=10), akan ditemukan kendala yang sudah habis terpakai (scare) atau full capasity, dan kendala yang berlebihan (redundant) atau idle capasity



Perubahan Kapasitas Sumberdaya

1. Perubahan Bahan Baku A

   Jika BB A ditambah, pers. [1] bergeser hingga F (persilangan [2] dan [3])

- F : [3] $2X_1 + 1X_2 = 40$

  [2] $2X_2 = 30 \rightarrow X_2 =$ **15**
- Substitusikan $X_2 = 15$ ke (3)

  [3] $2(X_1) + 1(15) = 40$

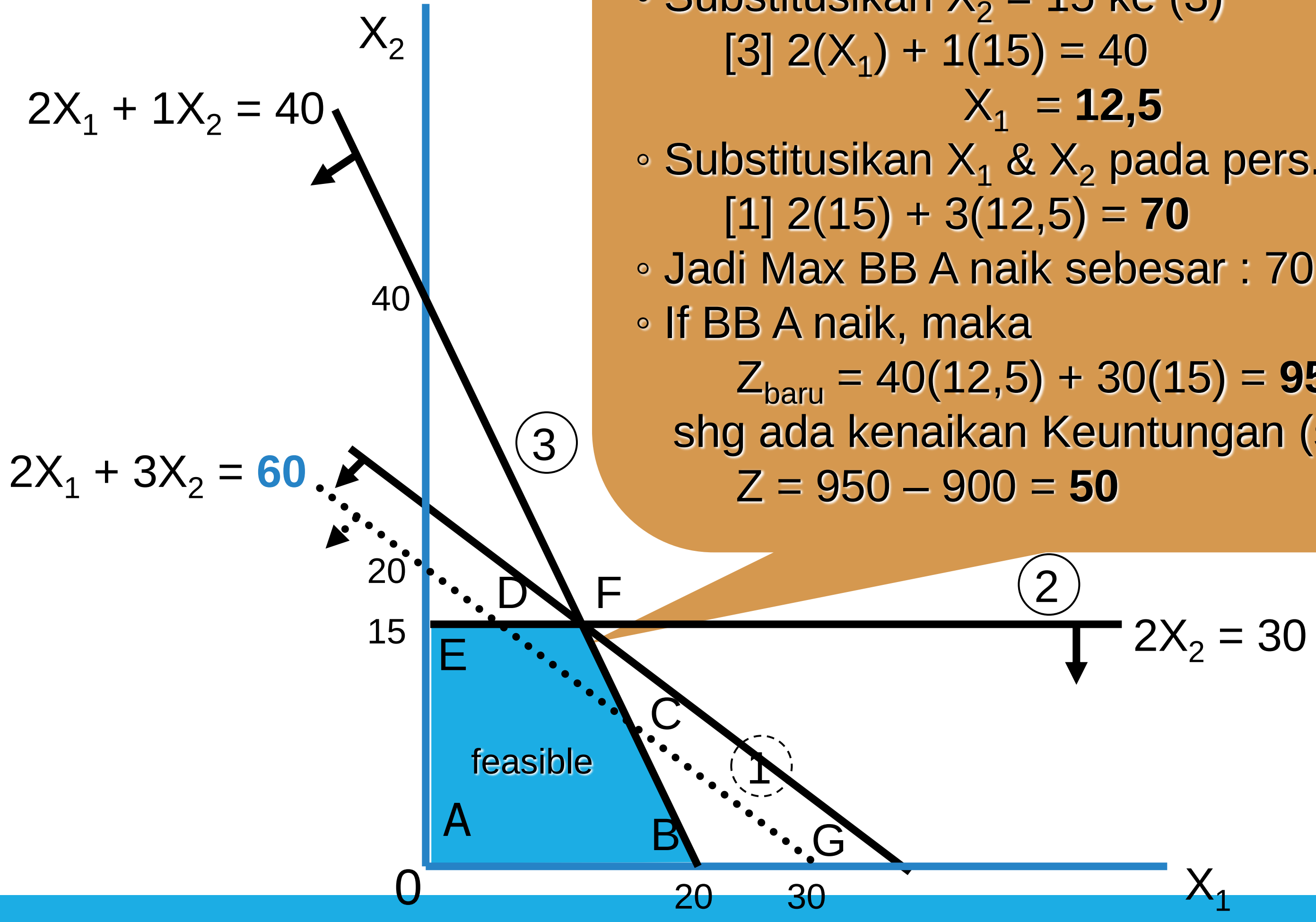
  $X_1 =$ **12,5**
- Substitusikan X_1 & X_2 pada pers. [1]

  [1] $2(15) + 3(12,5) =$ **70**
- Jadi Max BB A naik sebesar : 70 – 60 = **10**
- If BB A naik, maka

  $Z_{baru} = 40(12,5) + 30(15) =$ **950**

  shg ada kenaikan Keuntungan (shadow price) :

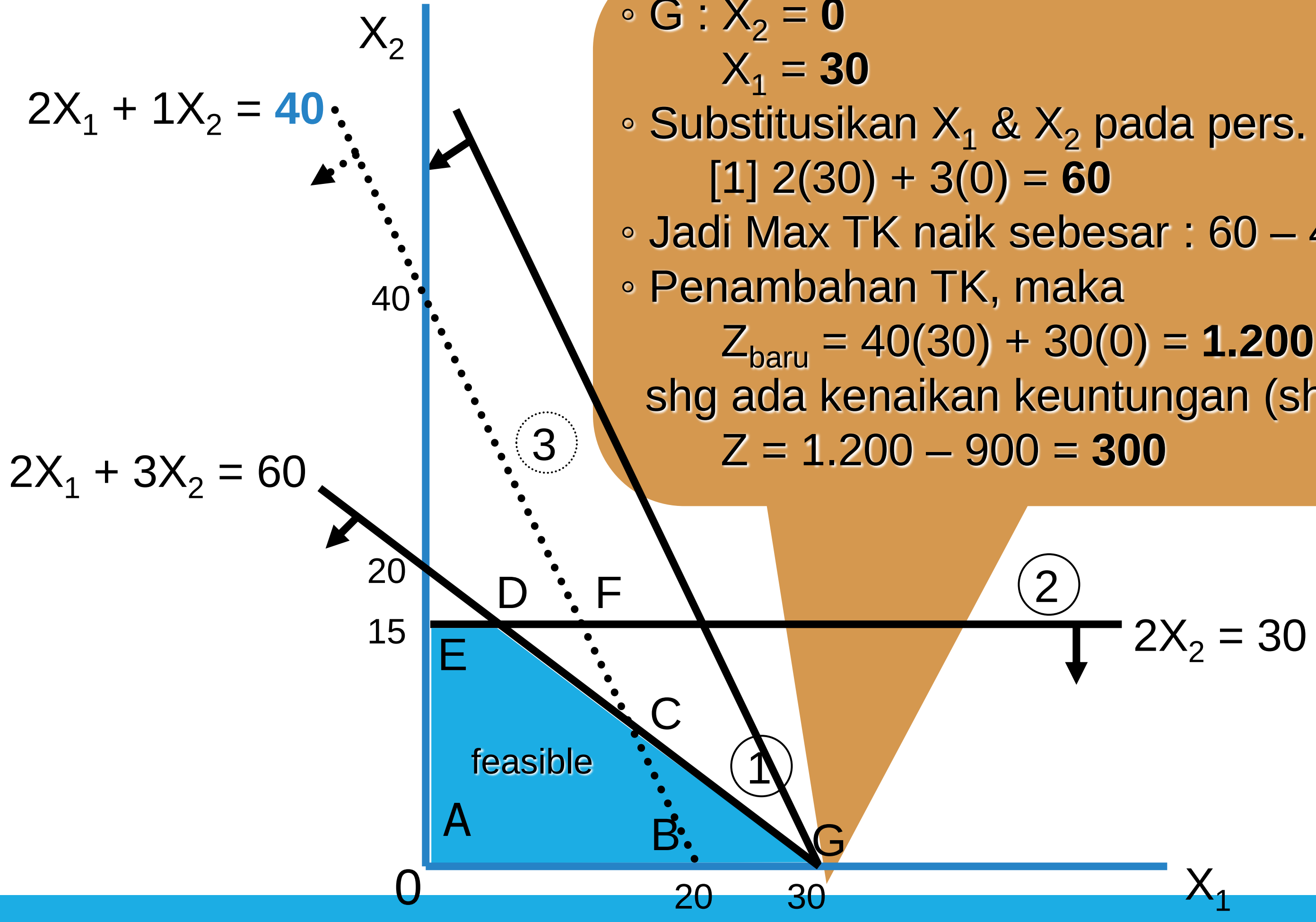
  Z = 950 – 900 = **50**



Perubahan Kapasitas Sumberdaya

2. Perubahan jam tenaga kerja

   Jika TK ditambah, pers. [3] bergeser hingga titik G



- G : X_2 = **0**
  X_1 = **30**
- Substitusikan X_1 & X_2 pada pers. [3]
  [1] 2(30) + 3(0) = **60**
- Jadi Max TK naik sebesar : 60 – 40 = **20**
- Penambahan TK, maka
  Z_{baru} = 40(30) + 30(0) = **1.200**

  shg ada kenaikan keuntungan (shadow price) :
  Z = 1.200 – 900 = **300**

Perubahan Kapasitas Sumberdaya

3. Perubahan Bahan Baku B

   BB B diturunkan, pers. [2] bergeser hingga titik C (titik optimum tidak berubah)